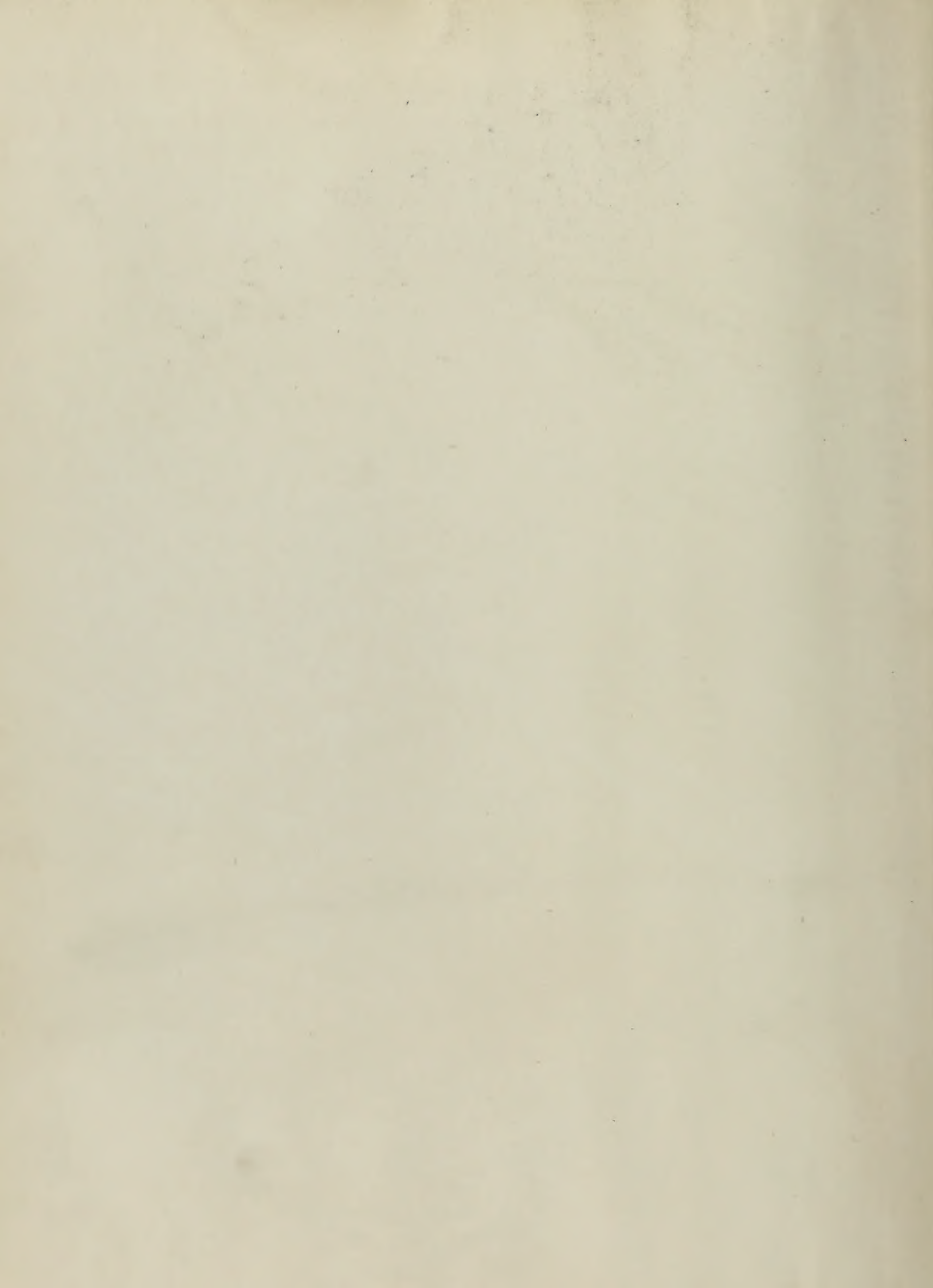
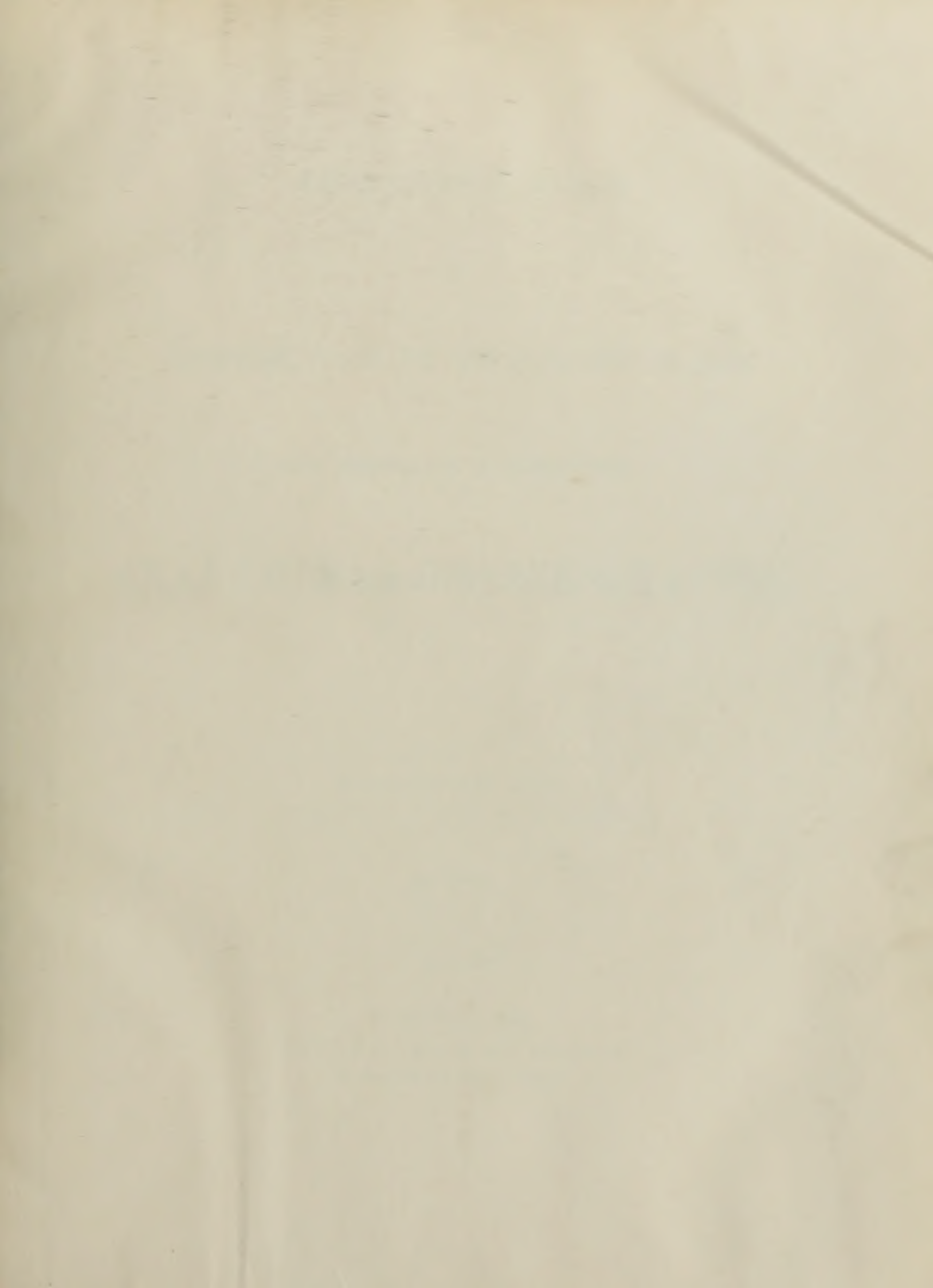
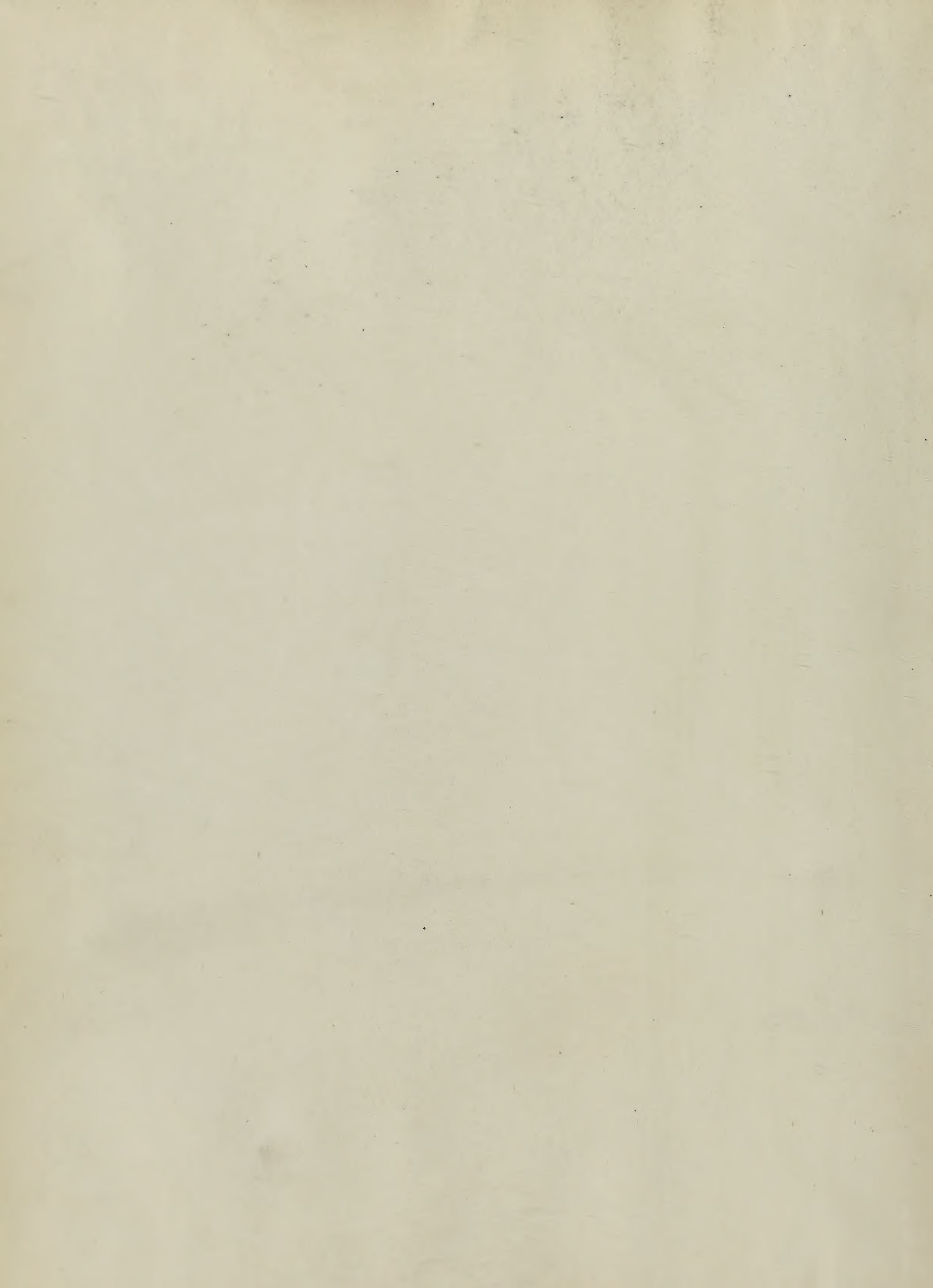
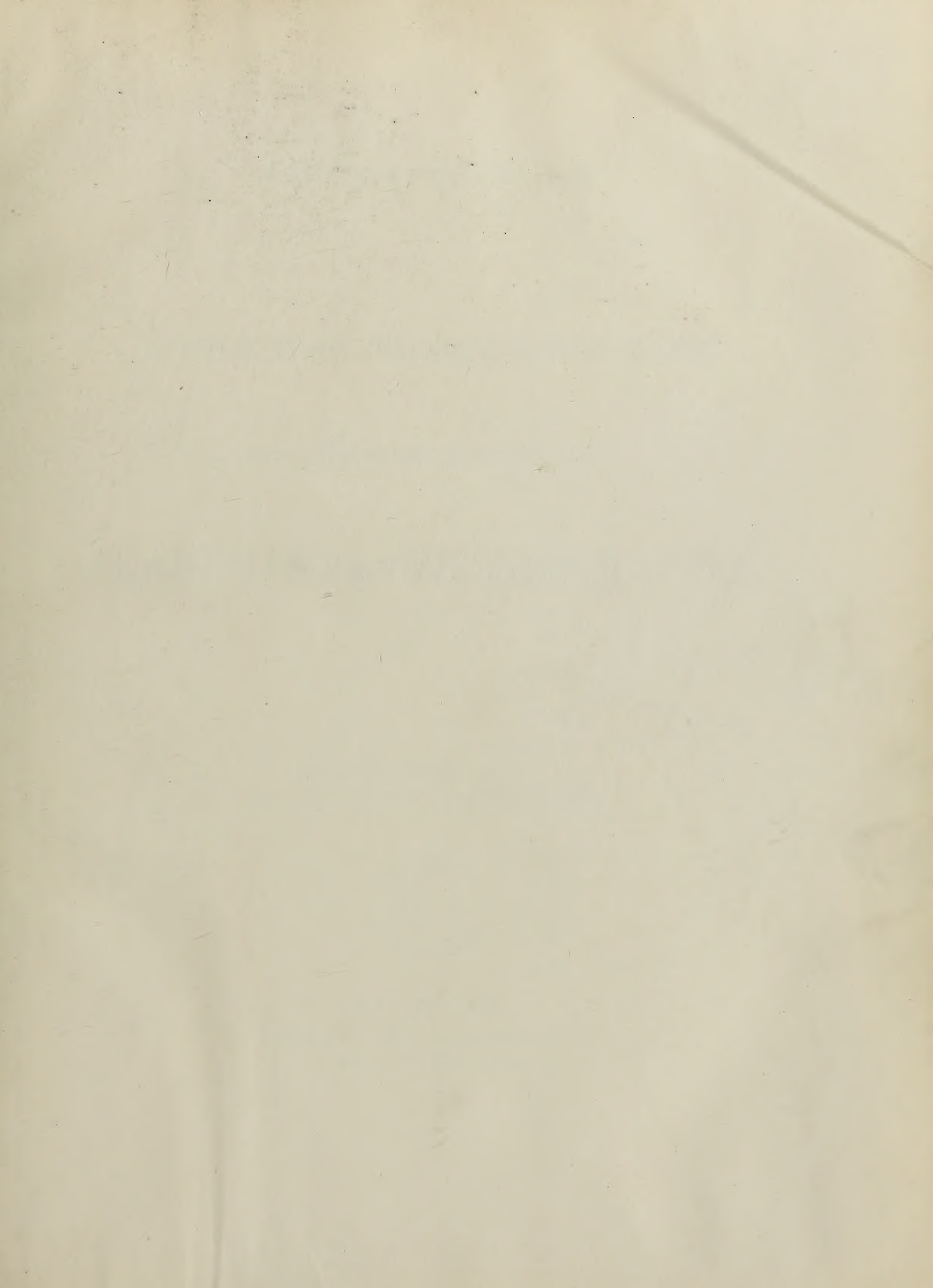












# ABHANDLUNGEN

DER

## MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHEN CLASSE

DER KÖNIGLICH BAYERISCHEN

# AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

SIEBZEHNTER BAND.

IN DER REIHE DER DENKSCHRIFTEN DER LXIII. BAND.




MÜNCHEN 1892.
VERLAG DER K. AKADEMIE
IN COMMISSION BEI G. FRANZ.

AKADEMISCHE BUCHDRUCKEREI VON F. STRAUB IN MÜNCHEN.

# Inhalt des XVII. Bandes.



# ABHANDLUNGEN

DER

## MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHEN CLASSE

DER KÖNIGLICH BAYERISCHEN

# AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

SIEBZEHNTEN BANDES

ERSTE ABTHEILUNG.

IN DER REIHE DER DENKSCHRIFTEN DER LXIII. BAND.




MÜNCHEN 1889.

VERLAG DER K. AKADEMIE

IN COMMISSION BEI G. FRANZ.



# Fortgesetzte Untersuchungen

über das

# mehrfache Sternsystem ζ Cancri

von

**H. Seeliger.**

(Mit 1 Tafel.)

---



In einer Abhandlung, welche im XLIV. Bande der Denkschriften der Wiener Akademie[1]) erschienen ist, habe ich die interessanten Verhältnisse, welche das mehrfache Sternsystem ζ Cancri in dynamischer Beziehung darbietet, näher untersucht. Die daselbst verwertheten Beobachtungen reichen bis zum Jahre 1880. Wenngleich seitdem 8 Jahre verflossen sind, so ist doch selbstverständlich nicht anzunehmen, dass das vorliegende Bewegungsproblem jetzt schon, nach einer verhältnissmässig geringen Vermehrung des Beobachtungsmateriales, soweit entwickelt erscheint, dass die naturgemässen Schwierigkeiten, die sich damals einer exacten Bestimmung verschiedener Bewegungselemente entgegenstellten, behoben sein können. Diese werden vielmehr, wie leicht einzusehen, noch lange fortbestehen und erst nach Verlauf von Zeiträumen, deren Grösse noch nicht anzugeben ist, wird es gelingen in dieser Richtung einen wesentlichen Fortschritt zu machen. Für die theoretische Erkenntniss der Eigenthümlichkeiten des Problemes aber ist dieser an sich freilich nicht befriedigende Zustand weniger wichtig. Man kann sich jetzt schon eine genügende Einsicht in die vorliegenden dynamischen Verhältnisse verschaffen und im Allgemeinen jene Methoden angeben, die später eine bessere Bestimmung der vorkommenden Unbekannten ermöglichen werden, als dies gegenwärtig möglich ist.

In der Hauptsache zwar habe ich den Resultaten meiner früheren Arbeit nichts Wesentliches hinzuzufügen. Trotzdem schien es mir der Mühe werth, eine neue Bearbeitung desselben Gegenstandes zu unter-

---

1) Untersuchungen über die Bewegungsverhältnisse in dem dreifachen Sternsystem ζ Cancri. Wien 1881. Im Folgenden soll diese Arbeit mit I bezeichnet werden. Einen kurzen Auszug der genannten Abhandlung findet man in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie, Band LXXXIII, II. Abth. Maiheft 1881.

nehmen und zwar zunächst aus dem Grunde, um manches stärker hervorzuheben, als es damals geschehen ist. Wenn sich hierdurch eine gute und zum Theil auf directerem Wege erhaltene Controle für die Richtigkeit der früheren nicht ganz einfachen Rechnungen ergab, so war dies natürlich nicht unwichtig. Mir schien aber eine solche Prüfung deshalb eine erhöhte Bedeutung zu besitzen, weil in den letzten Jahren Ansichten über die Verhältnisse in dem Sternsystem $\zeta$ Cancri ausgesprochen worden sind, die ich als mit meinen Untersuchungen durchaus unvereinbar ansehen muss.

Die folgende Abhandlung ist in 5 Paragraphen getheilt.

Im ersten werde ich zur Erleichterung der Uebersicht zuerst die Resultate von I kurz anführen und daran eine Darstellung der hauptsächlichsten Resultate knüpfen, welche die vorliegende Arbeit ergeben hat.

Der zweite Paragraph enthält die Grundlagen der folgenden Rechnungen. Es werden also hier die nothwendigen Formeln entwickelt und der Nachweis der Berechtigung gewisser Annahmen geführt, die später gemacht werden müssen.

Im dritten Paragraphen soll die Bewegung der zwei inneren Sterne um einander behandelt werden, während der vierte sich mit der Bewegung des entfernteren Begleiters und der fünfte speciell mit den auf diesen sich beziehenden Beobachtungen beschäftigen wird.

## § 1.

Der Stern $\zeta$ Cancri ($\Sigma$1196; $\alpha = 8^h\,3^m\!.6$, $\delta = +8^0\,6'$, 1850.0) wurde im Jahre 1781 von W. Herschel als dreifach erkannt und zwar wurde von ihm an einem Abende die gegenseitige Stellung der 3 Sterne bestimmt. Derselbe Beobachter hat noch einmal, im Jahre 1802, dasselbe Object aufgesucht, die beiden inneren Sterne aber nicht getrennt gesehen, wenigstens liegt keine diesbezügliche Messung vor. Infolge dessen ist der physische Zusammenhang aller 3 Sterne erst durch W. Struve's Beobachtung im Jahre 1826 nachgewiesen worden. Struve bezeichnet die beiden nahe an einander stehenden Sterne mit $A$ und $B$, den entfernteren mit $C$. Die Helligkeiten in Grössenklassen sind nach demselben Astronomen:

$$A = 5.0,\ B = 5.7,\ C = 5.5.$$

Wenngleich die neueren Schätzungen zum Theil etwas andere Helligkeiten ergeben haben, so scheint doch mit ziemlicher Sicherheit hervorzugehen, dass $A$ der hellste, $B$ der schwächste ist und beide nicht um eine ganze Grössenklasse von einander verschieden sind. $\zeta$ Cancri hat zwar keine grosse, aber doch eine bemerkbare Eigenbewegung. Nach Mädler [1]) ist dieselbe in $\alpha + 10''6$ und in $\delta - 11''$ im Jahrhundert. Wenn auch diese Angabe mit unzweifelhafter Sicherheit auf eine Zusammengehörigkeit der drei Sterne hinweist, so ist ein Nachweis auf diesem Wege heute kaum mehr nöthig. Zu einem Ueberblicke über die stattfindenden Verhältnisse mag noch erwähnt werden, dass die beiden Sterne $A$ und $B$ in etwa 60 Jahren einen Umlauf um einander beschreiben und hierbei eine Distanz von 0''6 bis 1''1 einhalten. Der Stern $C$ dagegen hat seit Herschel's Beobachtung bis jetzt um die Mitte von $A$ und $B$ (im Folgenden kurz mit $\frac{A+B}{2}$ bezeichnet) in Positionswinkel etwa $55^0$ beschrieben bei einer Distanz von $5\frac{1}{2}''$.

Nach diesen orientirenden Bemerkungen gehe ich dazu über, die Resultate meiner früheren Arbeit kurz zu resumiren.

1) Sowohl eine Prüfung des Flächensatzes, als auch die Berechnung einer elliptischen Bahn ergaben, dass man den Beobachtungen von $A$ und $B$ beinahe vollkommen genügen kann, ohne eine Einwirkung des dritten Sternes zu berücksichtigen. In der allgemein üblichen Bezeichnungsweise sind als solche Elemente für die Bewegung von $B$ um $A$ zu betrachten (I pg. 8 und pg. 52):

| | $IV_a$ | $IV_b$ |
|---|---|---|
| $T =$ | 1870.393 | 1870.082 |
| $\lambda =$ | 113°872 | 125°405 |
| $\Omega =$ | 71.532 | 63.260 |
| $i =$ | 10.888 | 15.643 |
| $\varphi =$ | 20.076 | 20.774 |
| $n =$ | —5.8867 | —5.6939 |
| $a =$ | 0''852 | — |

1) Dorpater Beobachtungen, Band 14.

Die letzteren schmiegen sich den in I benutzten Beobachtungen besser an als die ersteren. Elemente $IV_a$ dagegen stellen die allerneuesten Beobachtungen etwas besser dar, weshalb sie im Folgenden benutzt werden. In jedem Falle dürfen die aus den genannten Elementen folgenden Positionswinkel und Distanzen innerhalb der Zeit 1828—1880 als die Messungen beinahe vollständig darstellend bezeichnet werden.

2) Hieraus darf aber nicht geschlossen werden, dass der dritte Stern $C$ keinen bedeutenden Einfluss auf die Bewegung von $B$ um $A$ ausübt. Vielmehr hat sich ergeben, dass man für den Stern $C$ sehr bedeutende Massenwerthe annehmen kann, ohne die Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung zu gefährden und dass man ziemlich bedeutende Massenwerthe annehmen muss, um die beste Darstellung im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate zu erhalten. Infolge der unter 1) gemachten Bemerkungen aber ist es natürlich, dass eine wirkliche Bestimmung des Massenwerthes ausserordentlich unsicher ausfallen muss. Diese Unsicherheit wird noch vermehrt dadurch, dass die Beobachtungen von $C$, da sie sich nur auf die Projectionsebene senkrecht zum Visionsradius beziehen, vorderhand noch keinen Schluss über die Lage der Bahn im Raume. welche $C$ beschreibt, gestatten. Ich habe indessen eine Bestimmung der Grössen, welche diese Lage bestimmen und ebenso des Massenwerthes trotzdem versucht, obwohl das Resultat dieser mühsamen und weitläufigen Untersuchung vorauszusehen war. Es hat sich ergeben, das die Genauigkeit der Beobachtungen gegenwärtig es noch als völlig gleichgiltig erscheinen lässt, welche Annahme man über die Bahnebene, welche $C$ um $\frac{A+B}{2}$ im Grossen und Ganzen einhält, machen will. Aus Gründen der Analogie bin ich schliesslich bei der Annahme, der auch sonst nicht widersprochen wird, stehen geblieben, dass $C$ sich in der Projectionsebene selbst bewegt. Angemessen der geringen Sicherheit, mit welcher diese Annahme gestützt werden kann, und angemessen den geringen Folgen, welche eine thatsächliche Abweichung davon hat, wenn sie nur gewisse Grenzen nicht überschreitet, können wir diese Annahme auch so formuliren: der Stern $C$ bewegt sich in einer nur wenig gegen die Projectionsebene geneigten Bahn. Unter diesen Voraussetzungen, die aber, wie nach-

drücklich hervorgehoben werden muss, den Beobachtungen durchaus entsprechen, wurden schliesslich nach mehrfachen Verbesserungen folgende Elemente für die Bewegung von *B* um *A* abgeleitet (I. pg. 38 und 40):

Osculation 1836.2

$$\left.\begin{aligned} \frac{m'}{1+m} &= 2.368 \\ T &= 1868.022 \\ \lambda &= 109^\circ.735 \\ \Omega &= 81.550 \\ i &= 15.530 \\ \varphi &= 23.007 \\ n &= -5.9675 \\ a &= 0''.8532 \end{aligned}\right\} \quad \text{(VIII)}$$

Hierin bedeutet $\frac{m'}{1+m}$: Masse *C* dividirt durch die Summe der Massen *A* und *B*. Die Darstellung der Beobachtungen durch diese Elemente ist, wie eigentlich selbstverständlich, etwas besser als durch die rein elliptischen $IV_a$ und $IV_b$. Ebenso von selbst klar ist es aber auf der anderen Seite, dass der erlangte Vortheil nur ein geringer sein kann.

Auf den ersten Blick mag das erhaltene Resultat paradox erscheinen. Wir haben auf der einen Seite eine Bewegung, die im Vergleiche mit den Verhältnissen in unserem Sonnensystem ganz enorme Störungen aufweist, auf der anderen Seite lässt sich dieselbe Bewegung durch die Kepler'schen Gesetze allein beinahe ebenso gut darstellen. Eine einfache Ueberlegung aber, die wir nun anstellen wollen, erklärt dieses Vorkommniss vollkommen.

Zunächst muss hervorgehoben werden, dass die Genauigkeit der Beobachtungen vergleichsweise zu denen, die wir im Planetensystem vorauszusetzen haben, sehr gering ist. Es müssen schon sehr günstige Umstände obwalten, wenn das Mittel aus mehreren Beobachtungen der Wahrheit bis auf wenige Zehntel Grad im Positionswinkel und einige Hundertstel Bogensecunde in der Distanz nahe kommt. Ausserdem treten die sog. persönlichen Fehler hindernd in den Weg, systematische Abweichungen zwischen Theorie und Beobachtung auch dort zu erkennen, wo dies ohne dieselben möglich

wäre. Im vorliegenden Falle z. B. werden Fehler von 0.05 bis 0.1 der Distanz durchaus nicht mit Sicherheit zu constatiren sein. Hält man sich ferner gegenwärtig, dass bei ζ Cancri die Störungswerthe in Distanz diese Grenze nicht viel überschreiten, und dass schliesslich die grosse Halbaxe der Bahn so bestimmt wird, dass der beste Anschluss hervorgeht, so wird es nicht auffallen, dass in Distanz die Einwirkung des dritten Sternes nicht bemerkbar wird. Ganz anders gestaltet sich die Sachlage für die Positionswinkel. Die weiter unten folgenden Rechnungen geben Störungen im Positionswinkel bis zu 28 Grad und die Thatsache, dass diese Störungswerthe durch eine passend gewählte elliptische Bewegung ziemlich nahe dargestellt werden, muss einen tieferen Grund haben. Diesen findet man in der That im Folgenden. Nennt man die mittleren Bewegungen der Sterne $B$ und $C$ um $A$, $n$ und $n'$, so sind bekanntlich die Hauptglieder der im Positionswinkel auftretenden Störungen von der Form

$$a_0 + a_1 t + {}_{ii'}\Sigma A_{ii'} \cos (i n t - i' n' t + c_{ii'})$$

wo $i$ und $i'$ ganze Zahlen sind. Im Falle nicht bedeutender Excentricität kann man den Positionswinkel $p$ in eine Reihe entwickeln von der Form:

$$p = \alpha_0 + \alpha_1 t + {}_{ii'}\Sigma \mathfrak{A}_{ii'} \cos (i n_0 t + \gamma_{ii'})$$

Bedenkt man noch weiter, dass im vorliegenden Falle sowohl die $A_{ii'}$ als auch die $\mathfrak{A}_{ii'}$ mit wachsenden $i$ und $i'$ rasch kleiner werden, dass ferner $n'$ im Vergleiche zu $n$ sehr klein $\left(n' < \frac{1}{10} n\right)$ ist, so ist sofort klar, dass man die grössten Glieder der ersten Formel mit analogen Gliedern in der zweiten dadurch vereinigen kann, dass man die Coëfficienten, also die Bahnelemente danach bestimmt. Wie lange auf solche Weise die Darstellung der Beobachtungen erzwungen werden kann, kann natürlich auf diesem allgemeinen Wege nur durch nicht ganz einfache, wenn auch nicht schwierig durchzuführende, Entwickelungen gezeigt werden, auch muss auf den interpolatorischen Character des ganzen Vorganges hierbei Rücksicht genommen werden. Ich habe keinen Grund hierauf näher einzugehen, weil ich diese Verhältnisse durch umfangreiche numerische Rechnungen, also auf einem völlig einwurfsfreiem Wege, bei ζ Cancri zuerst aufgedeckt und dargethan habe.

Vielleicht liegen bei anderen dreifachen Sternen die Verhältnisse ein wenig anders. Im Allgemeinen aber werden wir Vorkommnisse, wie die geschilderten, bei jenen Systemen wiederfinden, in welchen der dritte Stern, vergleichsweise zum zweiten, vom ersten weit absteht, also die ihm zugehörige mittlere Bewegung klein, wenn weiter die Excentricität der Bahn, welche $B$ um $A$ beschreibt, nicht gross ist und schliesslich natürlich die Einwirkung des dritten Sternes auf die Bewegung des zweiten eine gewisse Grenze nicht übersteigt. Selbstverständlich ist es und wurde oben bereits hervorgehoben, dass alles Gesagte nur für beschränkte Zeiten gilt und dass nach Ablauf genügend grosser Zeiträume die erwähnte interpolatorische Darstellung durch die Kepler'sche Ellipse nicht mehr genügen wird.

Mir scheint überhaupt die Genauigkeit der Doppelsternmessungen und die Kürze der Zeit, über welche sie sich erstrecken, durchaus nicht der Sicherheit zu entsprechen, mit welcher man behauptet, dass die bisher berechneten Doppelsternbahnen den Beweis geliefert hätten für die Geltung des Newton'schen Gravitationsgesetzes in jenen entfernten Himmelsräumen. Auch ohne diese Berechnungen würde wahrscheinlich Niemand daran gezweifelt haben, dass das genannte Gesetz im Grossen und Ganzen auch auf die Fixsterne anwendbar sei. Es handelt sich also nur um kleinere Abweichungen, die eventuell zu constatiren wären. Solche erscheinen aber selbst in einem Betrage, der in unserem Planetensysteme bereits eine völlige Disharmonie zwischen Theorie und Beobachtung ergeben würde, bei der Genauigkeit, die man den Doppelsternmessungen jetzt geben kann, völlig verdeckt. Mit dieser Bemerkung soll natürlich durchaus nicht als wahrscheinlich hingestellt werden, dass nachweisbare Abweichungen vom Newton'schen Gesetze überhaupt existiren.

3) Die Beobachtungen des Sternes $C$ zeigen Anomalien höchst merkwürdiger Art. Otto Struve hatte vor mehreren Jahren darauf aufmerksam gemacht, dass seine Messungen mit grosser Deutlichkeit eine periodische Veränderung in Positionswinkel und Distanz ergeben, die beinahe vollkommen durch die Annahme fortgeschafft werden konnte, der Stern $C$ bewege sich in etwa 18 Jahren in einer Kreisbahn vom Radius 0''2 um

einen Punkt, der wieder in einer Kreisbahn langsam um $\frac{A+B}{2}$ fortrückt. In der That ist die durch diese Hypothese erzielte Uebereinstimmung so auffällig, dass an ihrer Berechtigung schon damals kaum zu zweifeln war. Indessen sind bekanntlich die O. Struve'schen Messungen nicht frei von systematischen Fehlern und es war demgemäss nöthig, eine in jeder Beziehung so wichtige und interessante Thatsache auch an den von anderen Astronomen herrührenden Messungen zu prüfen und namentlich zu untersuchen, ob die gegebene Interpretation mehr Wahrscheinlichkeit für sich hat, als etwa andere mögliche [1]).

Mit Hülfe eines grossen Beobachtungsmateriales habe ich diese Frage in Angriff genommen und bin zu einer vollkommenen Bestätigung der genannten Ansicht gelangt. Die von einander unabhängige Behandlung der Positionswinkel und der Distanzen ermöglichte eine Beweisführung auf zwei verschiedenen Wegen. Ferner war, weil eine rein interpolatorische Darstellung gewählt worden war, das erlangte Resultat frei von irgendwelchen Hypothesen. Nach mehrfachen Verbesserungen bin ich bei folgenden Formeln stehen geblieben (I pg. 65 und 69):

$$p = 145^\circ\!.074 - 0^\circ\!.523\,t + 0^\circ\!.001400\,t^2 - 2^\circ\!.040 \sin 20^0 t + 0^\circ\!.100 \cos 20^0 t \qquad \text{(III)}$$

$$\varrho = 5''\!.595 - 0''\!.0253 \left(\frac{t}{10}\right) + 0''\!.01754 \left(\frac{t}{10}\right)^2 + (0''\!.171 \cos 20^0 t + 0''\!.010 \sin 20^0 t)\,\frac{\varrho}{5.610} \qquad \text{(B)}$$

Hierin ist die Zeit $t$ von 1850.0 gezählt.

Beide Formeln geben also beinahe vollkommen übereinstimmende Werthe für die Bewegung von $C$ um einen Punkt, der nicht durch einen leuchtenden Stern markirt ist und diese Uebereinstimmung schien mir sehr in's Gewicht zu fallen. Ehe man nun aber aus diesem Ergebnisse, welches sich nur auf das geometrische Verhalten der von $C$ beschriebenen Bahn bezieht, die Folgerung ziehen dürfte, dass hier thatsächlich ein

1) Dass bei solchen Fragen grosse Vorsicht nöthig ist, mag der Umstand beweisen, dass aus Otto Struve's Beobachtungen von $AB$ grosse Abweichungen von dem Kepler'schen Gesetze der Flächen folgen, die nach Hinzuziehung der andern verfügbaren Beobachtungen verschwinden und auch nach den Untersuchungen des nächsten Paragraphen gar nicht vorkommen können.

ganz ähnliches Phänomen vorliegt, wie etwa bei Sirius oder Procyon, musste zuerst, in Anbetracht der hier vorliegenden complicirten Verhältnisse, gezeigt werden, dass dergleichen Anomalien nicht etwa Folgen der Einwirkungen der beiden Sterne $A$ und $B$ sein können. Die Frage nun, ob Bewegungen, wie sie der Stern $C$ zeigt, in einem System von 3 sich gegenseitig anziehenden Massenpunkten unter den obwaltenden Verhältnissen stattfinden können, habe ich mit Hülfe eines einfachen und allgemeinen Theorems verneinen können, welches fast ohne Rechnung durch ein blosses Betrachten der vorliegenden Beobachtungsergebnisse eine Entscheidung gestattet. Ich komme auf diesen Punkt im folgenden Paragraphen ausführlicher zu sprechen.

Dies waren die wesentlichsten Resultate meiner früheren Untersuchungen. Ich will nun gleich, mit Weglassung aller Einzelheiten, zusammenfassen, was die folgenden Seiten enthalten.

Nach den obigen Bemerkungen muss gegenwärtig der Versuch, aus den Beobachtungen von $A$ und $B$ die Masse des Sternes $C$ und die Lage seiner Bahn um $\frac{A+B}{2}$ bestimmen zu wollen, als aussichtslos angesehen werden. Man wird dieses Problem erst in ferner Zukunft lösen können. Dies wird vielleicht nicht früher möglich sein, als bis sich die Bewegung von $C$ um $\frac{A+B}{2}$ so entwickelt hat, dass man eine directe Bahnbestimmung für $C$ mit Erfolg versuchen können wird. Dann wird allerdings die ganze Sachlage mit einem Schlage ausserordentlich vereinfacht werden. Denn kennt man die Umlaufszeit von $C$ um $\frac{A+B}{2}$, so geben die Kepler'schen Gesetze sofort einen Werth für das oben mit $\frac{m'}{1+m}$ bezeichnete Massenverhältniss. Unter den obwaltenden Umständen, wo also gewisse Willkürlichkeiten nicht zu umgehen sind, musste der Vortheil, mit den früheren Rechnungen in Contact zu bleiben, von massgebendem Einfluss bei der Wahl der Ausgangspunkte der vorliegenden Untersuchungen sein. Ich habe also angenommen: 1) der dritte Körper, welcher die Bewegung von $B$ um $A$ beeinflusst, bewegt sich nahezu in der Projectionsebene. 2) Seine Masse ist dieselbe wie bei den Elementen VIII.

Mit diesen Annahmen habe ich nun die ganze Störungsrechnung

nach einer Methode von Neuem durchgeführt, die von der in I benutzten in mehreren Punkten abweicht. Wie zu erwarten, ergab sich eine gute Bestätigung der früher gefundenen Zahlen. Nach Ausführung der nothwendig gewordenen neuen Ausgleichung erhielt ich als beste Elemente für die Bewegung des Sternes $B$ um $A$:

Elemente IX.

Osculation 1842.2

$$\begin{aligned} T &= 1868.112 \\ \lambda &= 109^\circ.735 \\ \Omega &= 80.190 \\ i &= 11.135 \\ \varphi &= 22.450 \\ n &= -6.0898 \end{aligned} \quad \left.\begin{matrix} \\ \lambda \\ \Omega \\ i \\ \\ \end{matrix}\right\} 1850.0$$

Die Darstellung der Beobachtungen durch diese Elemente ist eine völlig befriedigende. Als werthvolle Prüfung, deren Bedeutung jedoch nicht überschätzt werden darf, ergab sich noch, dass Elemente IX die W. Herschel'sche Beobachtung vom Jahre 1781 beinahe vollständig darstellen, während gleiches die Elemente $IV_a$ und $IV_b$ nicht leisten.

Die weiter unten folgenden Untersuchungen über die Bewegung des Sternes $C$ gehen von einer, allerdings unbedeutenden, Unvollkommenheit der Formeln (III) und (B) aus. Man kann nämlich, worauf ich im folgenden Paragraphen zu sprechen komme, zeigen, dass die nicht periodischen Theile der genannten Formeln sehr nahe den Flächensatz:

$$\varrho^2 \frac{dp}{dt} = \text{Const.}$$

erfüllen müssen. Es ist bekannt, dass sich der Schwerpunkt des dynamischen Systems, dessen sichtbares Mitglied der Stern $C$ ist, nahe nach den Kepler'schen Gesetzen um den Schwerpunkt von $A$ und $B$ bewegen muss. Dieser Bedingung genügen die erwähnten Formeln nicht. Es war dies auch nicht, nach der Art, wie dieselben gewonnen worden sind, zu erwarten, weil die Abweichungen von dieser Bedingung innerhalb der Zeiten, für welche die Formeln angewendet worden sind, nur sehr gering und durch eine kleine Correctur zu beseitigen sind. Immerhin erschien es erforderlich, diese strengere Ausgleichung auszuführen. Der Rechnung

wurden provisorische Normalörter zu Grunde gelegt, bei welchen die persönlichen Fehler noch nicht genügend eliminirt waren. Auf solche Weise wurden die Formeln gewonnen:

$$\left.\begin{aligned} p &= 145^\circ\!.506 - 0^\circ\!.5151\,t - 0^\circ\!.1886\left(\frac{t}{20}\right)^2 - 1^\circ\!.688 \sin 20^\circ t + \\ &\qquad + 0^\circ\!.349 \cos 20^\circ t - 0.037\,f \\ \varrho &= 5''\!.638 - 0''\!.0489\left(\frac{t}{10}\right) + 0''\!.165 \cos 20^\circ t + 0''\!.0341 \cos 20^\circ t - 0.037\,f \end{aligned}\right\} \text{(IV)}$$

Hierin ist wieder die Zeit von 1850.0 an gezählt und $f$ bedeutet die Anzahl Grade resp. Secunden, welche man an $p$ resp. $\varrho$ anzubringen hat, um diese auf $\frac{A+B}{2}$ bezogenen Grössen von $B$ aus zu rechnen.

Wenngleich diese Formeln der Wahrheit ziemlich nahe kommen dürften, so fordert der systematische Character der übrig bleibenden Fehler doch noch zu einer erneuten Untersuchung auf. Ich habe nun zunächst durch ein allerdings nicht einwurfsfreies Verfahren die persönlichen Fehler zu ermitteln gesucht und aus den solchergestalt corrigirten Beobachtungen neue Normalörter gebildet. Jetzt wurde ein von dem früheren völlig verschiedenes Verfahren eingeschlagen. Innerhalb der Zeit, über welche sich die Beobachtungen seit W. Struve erstrecken, hat der Stern $C$ um den hypothetischen Schwerpunkt, den ich mit $S_2$ bezeichnen will, schon drei Mal einen vollen Umlauf beschrieben. Es lag deshalb nahe, die elliptische Bahn, die er hierbei beschreibt, vollständig zu bestimmen. Das vorliegende Problem ist eine Verallgemeinerung der Aufgabe, welche bei den Betrachtungen über sogenannte veränderliche Eigenbewegungen zu lösen war. Als Unbekannte treten auf die Bestimmungsstücke der erwähnten elliptischen Bewegung des Sternes $C$ um $S_2$ und die Constanten, welche die Bewegung der Projection von $S_2$ um die Projection des Schwerpunktes von $A$ und $B$ bestimmen. Es wäre nun der Unsicherheit, welche dem Resultate nothwendigerweise anhaften muss, kaum entsprechend, die vorliegende verwickelte Aufgabe strenge nach der Methode der kleinsten Quadrate zu behandeln. Ich habe deshalb ein etwas vereinfachtes, aber doch, wie ich glaube, genügend sicheres Verfahren angewandt und für die Bewegung von $C$ um $S_2$ folgende Elemente erhalten:

$$\left.\begin{array}{lcl} T & = & 1860.127 \\ \Omega & = & 71^\circ\!.96 \\ \lambda & = & 109.68 \\ i & = & 17.35 \\ n & = & -20.460 \\ e & = & 0.1106 \\ a & = & 0''\!.217 \end{array}\right\} (V_a)$$

und für die Bewegung von $S_2$ $(p_0, \varrho_0)$ um $\frac{A+B}{2}$ ergaben sich die Formeln:

$$\left.\begin{array}{l} \varrho_0 = 5''\!.439 \\ p_0 = 145^\circ\!.42 - 0^\circ\!.513\,(t - 1850.2) \end{array}\right\} (V)$$

Dieses Resultat genügt den Beobachtungen, wie im letzten Paragraphen gezeigt wird, so gut als man nur erwarten konnte. Eine gute Uebersicht in dieser Beziehung giebt auch die dieser Abhandlung beigefügte Tafel, deren nähere Erklärung unten gegeben wird.

Was nun aber den Punkt $S_2$ betrifft, so kann derselbe wohl kaum anders aufgefasst werden, als der Schwerpunkt von $C$ und einem dunklen Begleiter. Ich werde im nächsten Paragraphen zeigen, dass mit grosser Wahrscheinlichkeit behauptet werden darf, dieser Begleiter befinde sich in einer Entfernung von $C$, die einige wenige Zehntel einer Bogensecunde nicht überschreiten kann. Diese Annahme genügt gegenwärtig allen Forderungen der Beobachtungen, während gleiches keine andere Hypothese leisten kann. Ich für meinen Theil stehe deshalb nicht an, derselben eine Sicherheit zuzusprechen, die so gross ist, wie sie wenigen Erklärungsversuchen in der Stellarastronomie zukommt, die nicht durch den blossen Augenschein sofort bewiesen werden können. — Wenn man alle diese Verhältnisse, die im Folgenden eingehend besprochen werden sollen, näher in's Auge fasst, so scheint die Ansicht wohl berechtigt, dass das mehrfache Sternsystem $\zeta$ Cancri in vieler Beziehung eines der interessantesten Objecte am ganzen Fixsternhimmel ist. Wir haben hier einen merkwürdigen Fall des Problemes der 3 Körper vor uns, das sich vor unseren Augen entwickelt; wir haben ferner die Bewegung des Sternes $C$ um $S_2$, den Schwerpunkt von $C$ und einem

bis jetzt nicht gesehenen Begleiter, deren Elemente schon jetzt mit einiger Sicherheit zu ermitteln möglich ist. Wenn sich nun, was ja auch nur eine Frage der Zeit ist, die Elemente der Bewegung von $S_2$ um den Schwerpunkt von $A$ und $B$ bestimmen lassen werden, dann liegt vor uns in der That eine wunderbare Bewegungserscheinung, die trotz ihrer Complicirtheit aus einer solchen Anordnung der sich gegenseitig anziehenden Massen entspringt, dass mit verhältnissmässig einfachen Hülfsmitteln ein vollständiges Eindringen in die Eigenthümlichkeiten des ganzen Systemes möglich ist.

## § 2.

Es sollen jetzt einige Entwickelungen vorgenommen werden, die den speciellen Verhältnissen, welche $\zeta$ Cancri[1]) darbietet, angepasst sind. Hier haben die beiden Sterne $A$ und $B$ eine kleine Entfernung von einander im Vergleiche zu den Entfernungen $AC$ und $BC$. Es sollen nun diese Quotienten als kleine Grössen erster Ordnung betrachtet und nach ihren Potenzen entwickelt werden.

Die Massen der 3 Sterne $A$, $B$, $C$ seien $m_1$, $m_2$, $m_3$; die Entfernungen $AB$, $BC$, $AC$ bezw. $r$, $r_{23}$, $r_{13}$. Ferner werde die Entfernung $C \; \frac{A+B}{2}$ mit $r_1$ bezeichnet und der Winkel, welchen die Richtung $AB$, nach $B$ hin positiv genommen, mit $r_1$ bildet mit $\sigma$. Legt man in den Stern $A$ ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen $Z$-Axe mit dem Visionsradius, dessen $X$-Axe in der Projectionsebene mit der Nullrichtung der Positionswinkel zusammenfällt und dessen $Y$-Axe den Positionswinkel $90^0$ anzeigt und nennt man die auf dieses System bezogenen Coordinaten von $B$ und $C$, $x$, $y$, $z$ bez. $x_3$ $y_3$ $z_3$, so hat man:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2(m_1+m_2)\frac{x}{r^3} + k^2 m_3\left(\frac{x_3-x}{r_{23}^3} - \frac{x_3}{r_{13}^3}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -k^2(m_1+m_2)\frac{y}{r^3} + k^2 m_3\left(\frac{y_3-y}{r_{23}^3} - \frac{y_3}{r_{13}^3}\right)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -k^2(m_1+m_2)\frac{z}{r^3} + k^2 m_3\left(\frac{z_3-z}{r_{23}^3} - \frac{z_3}{r_{13}^3}\right)$$

---

1) In dieselbe Categorie fällt auch der dreifache Stern $\xi$ Scorpii u. A.

worin $k$ die Gauss'sche Anziehungsconstante ist. Durch Entwickelung von

$$r_{23}^2 = r_1^2 + \frac{1}{4} r^2 - r\, r_1 \cos\sigma$$

$$r_{13}^2 = r_1^2 + \frac{1}{4} r^2 + r\, r_1 \cos\sigma$$

erhält man:

$$\frac{1}{r_{23}^3} = \frac{1}{r_1^3} \left\{ 1 + \frac{3}{2} \frac{r}{r_1} \cos\sigma + \frac{3}{8} \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 (5\cos^2\sigma - 1) + \cdots \right\}$$

$$\frac{1}{r_{13}^3} = \frac{1}{r_1^3} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \frac{r}{r_1} \cos\sigma + \frac{3}{8} \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 (5\cos^2\sigma - 1) + \cdots \right\}$$

Nennt man weiter $\xi, \eta, \zeta$ die Coordinaten von $C$ gegen ein dem früheren gleichgerichtetes Coordinatensystem mit seinem Anfang in $\frac{A+B}{2}$, so ist:

$$x_3 = \frac{1}{2} x + \xi; \quad y_3 = \frac{1}{2} y + \eta; \quad z_3 = \frac{1}{2} z + \zeta$$

und durch Einführung dieser Grössen gestaltet sich die erste der drei Differential-Gleichungen so:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -k^2 (m_1 + m_2) \frac{x}{r^3} - \frac{k^2 m_3}{r_1^{\ 3}} \left\{ x - 3\,\xi \frac{r}{r_1} \cos\sigma + \frac{3}{8} \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 x\,(5\cos^2\sigma - 1) + \cdots \right\}$$

Das letzte Glied innerhalb der Klammer ist um 2 Ordnungen kleiner als die beiden ersten. Es soll von nun an fortgelassen werden. Beachtet man weiter, dass

$$\cos\sigma = \frac{\xi x + \eta y + \zeta z}{r\, r_1}$$

so stellen sich die Bewegungsgleichungen in der Form dar:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2 x}{d t^2} &= -k^2 (m_1 + m_2) \frac{x}{r^3} - \frac{k^2 m_3}{r_1^{\ 3}} \left[ x - 3\,\xi \frac{r}{r_1} \cdot \frac{\xi x + \eta y + \zeta z}{r\, r_1} \right] \\
\frac{d^2 y}{d t^2} &= -k^2 (m_1 + m_2) \frac{y}{r^3} - \frac{k^2 m_3}{r_1^{\ 3}} \left[ y - 3\,\eta \frac{r}{r_1} \cdot \frac{\xi x + \eta y + \zeta z}{r\, r_1} \right] \\
\frac{d^2 z}{d t^2} &= -k^2 (m_1 + m_2) \frac{z}{r^3} - \frac{k^2 m_3}{r_1^{\ 3}} \left[ z - 3\,\zeta \frac{r}{r_1} \cdot \frac{\xi x + \eta y + \zeta z}{r\, r_1} \right]
\end{aligned}\right\} \quad \text{(I)}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen ergiebt sich:

$$x \frac{d^2 y}{d t^2} - y \frac{d^2 x}{d t^2} = 3\, \frac{k^2 m_3}{r_1^{\ 3}} \cdot \frac{r}{r_1} \cdot \frac{\xi x + \eta y + \zeta z}{r\, r_1} (x\,\eta - \xi\, y)$$

Führt man Positionswinkel und Distanz ein durch die Formeln:

$$x = \varrho \cos p \quad | \quad \xi = \varrho_1 \cos p_1$$

$$y = \varrho \sin p \quad | \quad \eta = \varrho_1 \sin p_1$$

so kann die letzte Gleichung geschrieben werden:

$$\frac{d\left(\varrho^2 \frac{dp}{dt}\right)}{dt} = 3\, \frac{k^2 m_3}{r_1^{\,5}}\, \varrho\, \varrho_1 \sin(p_1 - p) \{ \varrho\, \varrho_1 \cos(p_1 - p) + \zeta z \}$$

Aus diesem Ausdrucke, dessen rechte Seite von der zweiten Ordnung ist, ergiebt sich, dass nur dann, wenn $m_3$ sehr gross ist, eine Abweichung vom Kepler'schen Gesetze bemerkbar sein wird. Die Untersuchung des Flächensatzes wird demnach kein zweckmässiges Mittel sein, um eine Einwirkung des dritten Sternes auf die Bewegung der beiden inneren zu constatiren. Ich habe bei $\zeta$ Cancri durch wirkliche Bildung von $\varrho^2 \frac{dp}{dt}$ (I pag. 16) nachgewiesen, dass dort eine solche eventuelle Einwirkung durch die Beobachtungsfehler vollkommen verdeckt wird. Ich will diesen Gegenstand noch einmal an der Hand der obigen Formel besprechen, weil ich annehmen muss, dass die erwähnte Thatsache von anderer Seite nicht gehörig beachtet worden ist. Im Anschlusse an die Bemerkungen des vorigen Paragraphen setzen wir $\zeta = 0$ also auch $r_1 = \varrho_1$. Dann wird also

$$\frac{\left(d\, \varrho^2 \frac{dp}{dt}\right)}{dt} = \frac{3}{2}\, \frac{k^2 m_3}{\varrho_1} \left(\frac{\varrho}{\varrho_1}\right)^2 \sin 2\,(p_1 - p) \tag{1}$$

Die Constante $k$ ist hier in folgenden Einheiten: Bogensecunde, Grad, Jahr, auszudrücken. Bezeichnet also $n_0$ die mittlere Bewegung von $B$ um $A$ in Einheiten des Radius, $a_0$ die zur selben Zeit stattfindende grosse Halbaxe in Bogensecunden ausgedrückt, $\varepsilon = 57^\circ\!.29\ldots$, so hat man bekanntlich:

$$k^2 (m_1 + m_2) = n_0^{\,2}\, a_0^{\,3}\, \varepsilon$$

Die Gleichung (1) wird also:

$$\varrho^2 \frac{dp}{dt} = \text{Const.} + \frac{3}{2}\, \varepsilon\, n_0^2\, a_0^3\, \frac{m_3}{m_1 + m_2} \cdot \int \frac{\varrho^2}{\varrho_1^3} \sin 2\,(p_1 - p)\, dt \tag{2}$$

Auf die leichteste Weise wird das Integral in dieser Formel auf mechanische Weise berechnet. Ich habe diese einfache Rechnung für

$\zeta$ Cancri durchgeführt und zwar wurden alle den Stern $B$ betreffenden Angaben aus den Elementen (VIII) entnommen. $\varrho_1$ und $p_1$ bedeuten hier die Coordinaten des Punktes $S_2$, sind also nach Formel V zu berechnen. Nimmt man als untere Grenze des Integrales 1828.2, so kann man schreiben

$$\varrho^2 \frac{dp}{dt} = \left(\varrho^2 \frac{dp}{dt}\right)_{1828.2} - f \cdot \frac{m_3}{m_1 + m_2}$$

und für $f$ habe ich gefunden:

| | |
|---|---|
| 1828.2 | 0.000 |
| 38.2 | 0.043 |
| 48.2 | 0.079 |
| 58.2 | 0.075 |
| 68.2 | 0.062 |
| 78.2 | 0.064 |

Bei der numerischen Integration wurde zwischen 1828 und 1858 in Intervallen von 2, von da ab in solchen von 1 Jahr vorwärts gegangen. Ich erinnere noch, dass in I als Mittelwerth gefunden wurde:

$$\varrho^2 \frac{dp}{dt} = -4.235$$

und dass die Abweichungen, welche in dieser Constanten durch die Beobachtungsfehler entstanden, sehr oft mehrere Einheiten der ersten Decimale betrugen. Die obigen Zahlen ergeben nun, dass in der That, wenn, wie früher angenommen, $\frac{m_3}{m_1 + m_2}$ einige Einheiten nicht übersteigt, der Flächensatz als so nahe erfüllt angesehen werden kann, als es die Genauigkeit der Beobachtungen zulässt. Aber selbst bei grossen Werthen für das genannte Massenverhältniss könnte sich höchstens in der Zeit von 1828 bis 1838 ein Einfluss bemerkbar machen.

Ich will nun die Gleichungen (I) in eine Form bringen, in welcher sie im Folgenden gebraucht werden. Ohne auf eine, von selbst klare, allgemeinere Anwendbarkeit des folgenden Verfahrens hinzuweisen, nehme ich gleich $\zeta = 0$ an. Die Gleichungen (I) schreiben wir nun in der Form, welche in der Theorie der speciellen Störungen üblich ist:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}+k^2(m_1+m_2)\frac{x}{r^3}&=X\\ \frac{d^2y}{dt^2}+k^2(m_1+m_2)\frac{y}{r^3}&=Y\\ \frac{d^2z}{dt^2}+k^2(m_1+m_2)\frac{z}{r^3}&=Z\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

wo also:

$$X=-\frac{k^2m_3}{\varrho_1^3}\left\{x-3\frac{\xi}{\varrho_1^2}(\xi x+\eta y)\right\}$$

$$Y=-\frac{k^2m_3}{\varrho_1^3}\left\{y-3\frac{\eta}{\varrho_1^2}(\xi x+\eta y)\right\}$$

$$Z=-\frac{k^2m_3}{\varrho_1^3}\,z$$

Durch Einführung von Positionswinkel und Distanz erhält man:

$$\left.\begin{aligned}X&=-\frac{k^2m_3}{\varrho_1{}^3}\,\varrho\left[\cos p-3\cos p_1\cos(p_1-p)\right]\\ Y&=-\frac{k^2m_3}{\varrho_1{}^3}\,\varrho\left[\sin p-3\sin p_1\cos(p_1-p)\right]\\ Z&=-\frac{k^2m_3}{\varrho_1{}^3}\,z.\end{aligned}\right\}\quad(3\,\mathrm{a})$$

Es soll nun vorausgesetzt werden, dass man von osculirenden Elementen ausgeht. Diese. sowie die aus ihnen hervorgehenden Coordinaten werden mit dem Index 0 bezeichnet. Setzt man weiter

$$x=x_0+\delta x;\quad y=y_0+\delta y;\quad z=z_0+\delta z;\quad r=r_0+\delta r$$

so sind $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ die Störungen in den Coordinaten. Es ist aber zu beachten. dass die Beobachtungen die gestörten Werthe $x$, $y$ ergeben. Mit $z$ und $r$ verhält es sich anders. Wären die osculirenden Elemente genau bekannt, so wären es natürlich auch $z_0$ und $r_0$. Dieses ist nun allerdings nicht der Fall, aber man wird auf Grund der Rechnungen in (I) annehmen dürfen, dass die osculirenden Werthe wenigstens näherungsweise bekannt sind. Eine kleinere Unsicherheit in dieser Beziehung wird bei $\zeta$ Cancri von keinem Einflusse sein, weil die Neigung $i$ klein ist und also die von der $z$-Coordinate herrührende Störungscomponente keinen

grossen Einfluss haben kann. Die Gleichungen (3) schreiben wir nun in bekannter Weise:

$$\frac{d^2 \delta x}{dt^2} = X - k^2 (m_1 + m_2) \left(\frac{x}{r^3} - \frac{x_0}{r_0^{\ 3}}\right)$$

$$\frac{d^2 \delta y}{dt^2} = Y - k^2 (m_1 + m_2) \left(\frac{y}{r^3} - \frac{y_0}{r_0^{\ 3}}\right)$$

$$\frac{d^2 \delta z}{dt^2} = Z - k^2 (m_1 + m_2) \left(\frac{z}{r^3} - \frac{z_0}{r_0^{\ 3}}\right)$$

Setzt man noch

$$\frac{z}{\varrho} = \operatorname{tg} \sigma\,; \quad f = \left(\frac{r_0 \cos \sigma}{\varrho}\right)^3$$

so wird $r = \frac{\varrho}{\cos \sigma}$ und man hat:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 \delta x}{dt^2} &= X + \frac{k^2 (m_1 + m_2)}{r_0^{\ 3}} \{x(1-f) - \delta x\} \\ \frac{d^2 \delta y}{dt^2} &= Y + \frac{k^2 (m_1 + m_2)}{r_0^{\ 3}} \{y(1-f) - \delta y\} \\ \frac{d^2 \delta z}{dt^2} &= Z + \frac{k^2 (m_1 + m_2)}{r_0^{\ 3}} \{z(1-f) - \delta z\} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Wie diese Gleichungen in der wirklichen numerischen Rechnung anzuwenden sind, wird später erörtert werden.

---

Die Verhältnisse bei $\zeta$ Cancri werden, wie in § 1 bereits ausführlich besprochen, in höchst interessanter Weise complicirt, durch die Anomalien, welche in der Bewegung des dritten Sternes $C$ aufgedeckt worden sind. Ich habe oben bereits erwähnt, dass, ehe man an die Erklärung dieser Anomalien schreiten kann, zuerst nachgewiesen werden muss, dass nicht etwa bloss eine im Problem der 3 Körper ($A$, $B$, $C$) mögliche Bewegungsform vorliege. Ich habe diesen Beweis in höchst einfacher Weise und völlig streng in meiner früheren Arbeit (I pg. 58 ff.) geführt. Derselbe stützte sich auf einen einfachen Satz, welcher mir an sich so evident schien, dass ich kein besonderes Gewicht auf denselben legte. Die Thatsache aber, dass derselbe Missverständnissen ausgesetzt sein konnte und dass Zweifel an seiner Richtigkeit, wenn auch nur vorübergehend,

ausgesprochen werden konnten, lässt mich demselben nun eine grössere Wichtigkeit beimessen. Ich will deshalb die diesen Punkt betreffenden Untersuchungen hier zum Theil wörtlich anführen und daran einige kurze Bemerkungen knüpfen. Den erwähnten Satz habe ich in I so abgeleitet:

Ich bezeichne mit 1, $m$ und $m'$ die respectiven Massen der drei Sterne $A$, $C$ und $B$. Ich lege ferner in den Stern $A$ als Mittelpunkt ein sonst beliebiges rechtwinkeliges Coordinatensystem der $x$, $y$, $z$, bezeichne mit $x$, $y$, $z$ die Coordinaten von $C$ und mit $x'$, $y'$, $z'$ diejenigen von $B$, mit $r$ und $r'$ die Entfernungen $AC$ und $AB$ und schliesslich mit $\varrho$ die Entfernung $BC$. Dann wird die Bewegung von $C$ durch die Differentialgleichungen definirt:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2(1+m)\frac{x}{r^3}=k^2m'\left(\frac{x'-x}{\varrho^3}-\frac{x'}{r'^3}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+k^2(1+m)\frac{y}{r^3}=k^2m'\left(\frac{y'-y}{\varrho^3}-\frac{y'}{r'^3}\right)$$

indem ich die $z$-Coordinate unberücksichtigt lasse. Aus diesen Gleichungen ergiebt sich:

$$\frac{d}{dt}\left(y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}\right)=k^2m'(x'y-xy')\left(\frac{1}{\varrho^3}-\frac{1}{r'^3}\right) \qquad (\alpha)$$

In analoger Weise betrachte ich die relative Bewegung von $C$ um $B$. Ich lege also nach $B$ den Anfangspunkt eines neuen, dem früheren parallel gerichteten Coordinatensystems und bezeichne mit $x''$, $y''$, $z''$ und $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die Coordinaten von $C$ und von $A$. Dann ergiebt eine Wiederholung der eben ausgeführten Betrachtung:

$$\frac{d}{dt}\left(y''\frac{dx''}{dt}-x''\frac{dy''}{dt}\right)=k^2(\xi y''-\eta x'')\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r'^3}\right) \qquad (\beta)$$

Wie man aber sofort übersieht, ist:

$$\xi y''-\eta x''=-(x'y-y'x) \qquad (\gamma)$$

Ferner sind bei $\zeta$ Cancri die gegenseitigen Entfernungen der drei Sterne so beschaffen, dass für alle Zeiten, über welche sich die Beobachtungen erstrecken

$$\varrho>r'\,; \qquad r>r'$$

die in ($\alpha$) und ($\beta$) vorkommenden Differenzen

$$\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r'^3} \text{ und } \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}$$

sind infolgedessen stets negativ.

Da sich nun weiter infolge von ($\gamma$) die Gleichung ($\beta$) schreiben lässt:

$$\frac{d}{dt}\left(y''\frac{dx''}{dt} - x''\frac{dy''}{dt}\right) = -k^2(x'y - xy')\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right)$$

so können wir sagen, es muss immer sein

$$\frac{d}{dt}\left(y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt}\right) = +T$$

$$\frac{d}{dt}\left(y''\frac{dx''}{dt} - x''\frac{dy''}{dt}\right) = -T_1$$

wobei $T$ und $T_1$ zwei Functionen der Zeit bedeuten, die beide zu gleicher Zeit entweder positiv oder zu gleicher Zeit negativ sind.

Bezeichnet man nun mit $p$ und $\varrho$ Positionswinkel und Distanz des Sternes $C$ von $A$ aus gemessen, $p''$ und $\varrho''$ dieselben Grössen von $B$ aus, so hat man also:

$$\varrho^2\frac{dp}{dt} = C + \int T\,dt$$

$$\varrho''^2\frac{dp''}{dt} = C_1 - \int T_1\,dt$$

oder wenn man die Werthe von $\varrho$, $p$, $\varrho''$ und $p''$ für die Zeit $t = t_0$ durch dieselben mit dem Index 0 versehenen Buchstaben bezeichnet und ausserdem setzt:

$$\delta\left(\varrho^2\frac{dp}{dt}\right) = \varrho^2\frac{dp}{dt} - \varrho_0^2\frac{dp_0}{dt}$$

$$\delta\left(\varrho''^2\frac{dp''}{dt}\right) = \varrho''^2\frac{dp''}{dt} - \varrho_0''^2\frac{dp_0''}{dt}$$

so kann man die letzten Relationen auch schreiben:

$$\delta\left(\varrho^2\frac{dp}{dt}\right) = +\int_{t_0}^{t} T\,dt$$

$$\delta\left(\varrho''^2\frac{dp''}{dt}\right) = -\int_{t_0}^{t} T\,dt$$

So lange sich die beiden bestimmten Integrale aus lauter Grössen mit demselben Vorzeichen zusammensetzen, müssen also

$$\delta\left(\varrho^2 \frac{dp}{dt}\right) \text{ und } \delta\left(\varrho''^2 \frac{dp''}{dt}\right)$$

stets verschiedene Zeichen haben.

Ich habe die frühere Ableitung dieses Satzes zum Theil wörtlich hingesetzt, weil ich auch jetzt noch seine Fassung als völlig unzweideutig und klar ansehe. Was die Einschränkung „aus lauter Grössen mit demselben Vorzeichen“ betrifft, so kann doch wohl kaum ein Zweifel über ihre Bedeutung obwalten. Mit etwas anderen Worten heisst sie: $T$ und $T_1$ dürfen innerhalb der Zeit $t_0$ bis $t$ das Zeichen nicht wechseln und da diese Grössen sich aus zwei Factoren zusamensetzen, von denen der eine, wie besonders hervorgehoben worden, überhaupt immer dasselbe Zeichen hat. so kann sich die gemachte Einschränkung nur auf den zweiten Factor

$$(x' y - x y')$$

beziehen. Dieses ist der analytische Ausdruck für den doppelten Flächeninhalt des Dreieckes $ABC$ und ändert offenbar sein Zeichen nur dann, wenn er durch Null hindurchgeht. Die gemachte Einschränkung bedeutet also: innerhalb der Zeit $t_0$ bis $t$ dürfen die Projectionen der drei Sterne $ABC$ niemals in einer geraden Linie liegen.

Dass dem genannten Satze die Beobachtungen von $C$ zu wiederholten Malen widersprechen, folgt durch einen Anblick der betreffenden Zusammenstellung in I (pg. 57). Ich nehme aus dieser beispielsweise die folgenden auf $A$ resp. $B$ bezogenen Positionswinkel:

| | $AC$ | $BC$ |
|---|---|---|
| | $p$ | $p''$ |
| 1833.25 | 148°.47 | 157°.02 |
| 35.31 | 145.44 | 153.65 |
| 36.27 | 144.13 | 152.14 |
| 40.25 | 145.35 | 152.08 |
| 41.07 | 145.59 | 151.87 |
| 42.32 | 145.20 | 150.75 |
| 43.29 | 147.03 | 151.96 |
| 44.28 | 148.80 | 153.14 |
| 45.37 | 149.54 | 153.23 |

Hierzu die Bemerkung in Erinnerung behalten, dass innerhalb der angeführten Zeiten die Projectionen der $ABC$ niemals in einer Geraden stehen und ausserdem beide Distanzen stets zwischen 5″ und 6″ liegen, so ist alles gegeben, um den Widerspruch mit dem bewiesenen Satze auf den ersten Blick zu entdecken. Von 1833 bis etwa 1840 sind sowohl $\frac{dp}{dt}$ als auch $\frac{dp''}{dt}$ negativ. Hierauf wird $\frac{dp}{dt}$ positiv; es müsste also $\frac{dp''}{dt}$ zum mindesten stark negativ bleiben. Wenn man also vielleicht auch das Positivwerden dieser Grösse den Beobachtungsfehlern zuschreiben wollte, so dürfte sie doch bei der geringen Veränderung von $\varrho''$, nicht der Null nahe kommen, was doch zweifelsohne stattfindet.

Betrachtet man demnach $\zeta$ Cancri als ein System von 3 Körpern, so sind die Eigenthümlichkeiten, welche die Bewegung des Sternes $C$ zeigt, nicht zu erklären. Dass dies aber vollständig der Fall ist, wenn man annimmt, dass $C$ in seiner Nähe einen vierten Massenpunkt hat, ist schon oben erwähnt worden. Es stellt sich uns also nun die Aufgabe entgegen, gewisse Beziehungen in einem solchen System von 4 Massen, von denen je 2 einander sehr nahe stehen, aufzudecken. Dies soll jetzt geschehen.

Die 4 Sterne $A$, $B$, $C$, $D$ mit den Massen $m_1$, $m_2$, $m_3$, $m_4$ und den gegenseitigen Entfernungen $r_{12}$, $r_{13}$ etc. sollen auf ein festes Coordinatensystem bezogen die Coordinaten $x_1 \ldots x_4$, $y_1 \ldots y_4$, $z_1 \ldots z_4$ haben. $X_1$, $Y_1$, $Z_1$ seien die Coordinaten des Schwerpunktes $S_1$ der beiden Massen $m_1$ und $m_2$; $X_2$, $Y_2$, $Z_2$ die Coordinaten des Schwerpunktes $S_2$ von $m_3$ und $m_4$. In Bezug auf ein Axensystem, das dem früheren parallel gerichtet seinen Anfang in $S_1$ hat, seien die Coordinaten der 4 Punkte der Reihe nach $\xi_1$, $\eta_1$, $\zeta_1$, $\xi_2$, $\eta_2$, $\zeta_2$ etc., während die Coordinaten von $S_2$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ sind. Ferner werde allgemein die Bezeichnung eingeführt:

$$\frac{x_\varkappa - x_\lambda}{r^3_{\varkappa\lambda}} = \frac{\xi_\varkappa - \xi_\lambda}{r^3_{\varkappa\lambda}} = (\varkappa, \lambda)$$

Dann hat man sofort:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = k^2 m_2 (21) + k^2 m_3 (31) + k^2 m_4 (41)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = k^2 m_1 (12) + k^2 m_3 (32) + k^2 m_4 (42)$$

Hieraus ergiebt sich:

$$(m_1 + m_2)\frac{d^2 X_1}{d t^2} = k^2 \{m_1 m_3 (31) + m_2 m_3 (32) + m_1 m_4 (41) + m_2 m_4 (42)\}$$

und auf ganz gleiche Weise:

$$(m_3 + m_4)\frac{d^2 X_2}{d t^2} = k^2 \{m_1 m_3 (13) + m_1 m_4 (14) + m_2 m_3 (23) + m_2 m_4 (24)\}$$

Bedenkt man, dass: $\xi = X_2 - X_1$ so folgt sofort:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2 \xi}{d t^2} = \lambda \{m_1 m_3 (13) + m_1 m_4 (14) + m_2 m_3 (23) + m_2 m_4 (24)\} \\ \text{wo} \quad &\lambda = k^2 \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}{(m_1 + m_2)(m_3 + m_4)} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Ganz analoge Gleichungen bestehen selbstverständlich für die Coordinaten $\eta$ und $\zeta$. Hieraus leitet man sofort ab:

$$\frac{1}{\lambda}\left\{\xi \frac{d^2 \eta}{d t^2} - \eta \frac{d^2 \xi}{d t^2}\right\}$$

$$= \frac{m_1 m_3}{r_{13}^3}\Big[(\eta_1 - \eta_3)\,\xi - (\xi_1 - \xi_3)\,\eta\Big] + \frac{m_1 m_4}{r_{14}^3}\Big[(\eta_1 - \eta_4)\,\xi - (\xi_1 - \xi_4)\,\eta\Big]$$

$$+ \frac{m_2 m_3}{r_{23}^3}\Big[(\eta_2 - \eta_3)\,\xi - (\xi_2 - \xi_3)\,\eta\Big] + \frac{m_2 m_4}{r_{24}^3}\Big[(\eta_2 - \eta_4)\,\xi - (\xi_2 - \xi_4)\,\eta\Big]$$

Beachtet man nun, dass nach der Definition

$$m_1 \xi_1 + m_2 \xi_2 = 0$$

$$m_3 \xi_3 + m_4 \xi_4 = (m_3 + m_4)\,\xi$$

so erhält man schliesslich:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\lambda}\left\{\xi \frac{d^2 \eta}{d t^2} - \eta \frac{d^2 \xi}{d t^2}\right\} = m_2 (\eta_2 \xi - \xi_2 \eta)\left[m_3\left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}\right) + m_4\left(\frac{1}{r_{24}^3} - \frac{1}{r_{14}^3}\right)\right] \\ + m_3 (\eta_3 \xi - \xi_3 \eta)\left[m_1\left(\frac{1}{r_{14}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}\right) + m_2\left(\frac{1}{r_{24}^3} - \frac{1}{r_{23}^3}\right)\right] \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Dieser Ausdruck soll nun wieder unter der Voraussetzung entwickelt werden, dass die Entfernungen $AB$ und $CD$ vergleichsweise mit den Strecken $AC$, $AD$ etc. sehr klein sind. Zu diesem Zwecke seien $r_1$, $r_2$, $r_3$, $r_4$ die Entfernungen der 4 Punkte $A$, $B$, $C$, $D$ von $S_1$. Ferner sei $\sigma_3$ der Winkel, welchen die Richtungen von $A$ nach $B$ und von $S_1$ nach

$C$ mit einander bilden und $\sigma_4$ der in derselben Richtung gezählte Winkel zwischen $AB$ und $S_1 D$. Dann ist:

$$\frac{1}{r_{23}^3} = \frac{1}{r_3^3}\left(1 + 3\frac{r_2}{r_3}\cos\sigma_3 + \cdots\right)$$

$$\frac{1}{r_{13}^3} = \frac{1}{r_3^3}\left(1 - 3\frac{r_1}{r_3}\cos\sigma_3 + \cdots\right)$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\frac{m_2}{r_{23}^3} + \frac{m_1}{r_{13}^3} = \frac{m_1 + m_2}{r_3^3} + \cdots$$

und auf gleiche Weise:

$$\frac{m_2}{r_{24}^3} + \frac{m_1}{r_{14}^3} = \frac{m_1 + m_2}{r_4^3} + \cdots$$

Man hat also:

$$m_1\left(\frac{1}{r_{14}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}\right) + m_2\left(\frac{1}{r_{24}^3} - \frac{1}{r_{23}^3}\right) = (m_1 + m_2)\left(\frac{1}{r_4^3} - \frac{1}{r_3^3}\right) + \cdots$$

Ebenso leicht findet man:

$$\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3} = \frac{3}{r_3^4}(r_1 + r_2)\cos\sigma_3 + \cdots$$

$$\frac{1}{r_{24}^3} - \frac{1}{r_{14}^3} = \frac{3}{r_4^4}(r_1 + r_2)\cos\sigma_4 + \cdots$$

Vernachlässigt man die Glieder höherer Ordnung, so kann man $\sigma_3 = \sigma_4 = s$ setzen, wo $s$ der Winkel zwischen den Richtungen $AB$ und $S_1 S_2$ ist. Nennt man noch $r$, $\varrho_3$ und $\varrho_4$ die Strecken $S_1 S_2$, $C S_2$, $D S_2$ und den Winkel zwischen $S_2 S_1$ und $S_2 C$, $s_1$, so wird

$$\frac{1}{r_3^3} - \frac{1}{r_4^3} = \frac{3}{r^4}(\varrho_3 + \varrho_4)\cos s_1 +$$

Alle diese Ausdrücke in (6) eingesetzt geben:

$$\frac{d\left(\xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt}\right)}{dt} = 3\lambda m_2(\eta_2\xi - \xi_2\eta)\frac{r_1 + r_2}{r^4}(m_3 + m_4)\cos s$$

$$- 3\lambda m_3(\eta_3\xi - \xi_3\eta)\frac{(\varrho_3 + \varrho_4)}{r^4}(m_1 + m_2)\cos s_1$$

$$= \frac{3k^2(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)}{r^4}\left\{\frac{m_2}{m_1}r_2\cos s\,(\eta_2\xi - \xi_2\eta) - \frac{m_3}{m_4}\varrho_3\cos s_1\,(\eta_3\xi - \xi_3\eta)\right\}$$

Berücksichtigt man die Gleichungen:

$$r r_2 \cos s = \xi \xi_2 + \eta \eta_2 + \zeta \zeta_2$$

$$- r \varrho_3 \cos s_1 = \xi(\xi_3 - \xi) + \eta(\eta_3 - \eta) + \zeta(\zeta_3 - \zeta)$$

und nennt man $x$, $y$, $z$ die Coordinaten von $B$ gegen $A$, so kann man die letzte Gleichung auch schreiben:

$$\frac{d\left(\xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt}\right)}{dt} = \frac{3k^2(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)}{r^5} \left\{ \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} (y\xi - \eta x)(\xi x + \eta y + \zeta z) \right.$$

$$\left. + \frac{m_3}{m_4} (\eta_3 \xi - \xi_3 \eta) [\xi(\xi_3 - \xi) + \eta(\eta_3 - \eta) + \zeta(\zeta_3 - \zeta)] \right\}$$

Hierin sollen nun Positionswinkel und Distanz eingeführt werden, indem man setzt:

$$\begin{array}{l|l|l} x = \varrho \cos p & \xi = \varrho_0' \cos p_0' & \xi_3 - \xi = g \cos \gamma \\ y = \varrho \sin p & \eta = \varrho_0' \sin p_0' & \eta_3 - \eta = g \sin \gamma \end{array}$$

und wie früher

$$\zeta = 0 \quad ; \quad r = \varrho_0'$$

Wird ferner zur Abkürzung gesetzt:

$$\alpha = \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2 + m_3 + m_4)}{(m_1 + m_2)^3}$$

$$\beta = \frac{m_3 (m_1 + m_2 + m_3 + m_4)}{m_4 (m_1 + m_2)}$$

so ergiebt sich schliesslich:

$$\frac{d\left(\varrho_0'^2 \frac{dp_0'}{dt}\right)}{dt} = \frac{3}{2} \frac{k^2(m_1 + m_2)}{\varrho_0'^3} \left\{ \alpha \varrho^2 \sin 2(p - p_0') + \beta g^2 \sin 2(\gamma - p_0') \right\}$$

Noch übersichtlicher wird diese Formel, wenn man setzt:

$$f_1 = \frac{3}{2} k^2 (m_1 + m_2) \int \frac{\varrho^2}{\varrho_0'^3} \sin 2(p_0' - p)\, dt$$

$$\varphi = \frac{3}{2} k^2 (m_1 + m_2) \int \frac{g^2}{\varrho_0'^3} \sin 2(p_0' - \gamma)\, dt$$

Denn jetzt wird einfach:

$$\varrho_0'^2 \frac{dp_0'}{dt} = c - \alpha f_1 - \beta \varphi \qquad (7)$$

$f_1$ ist nämlich nichts anderes als $f \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_3 + m_4}$, wo $f$ der pg. 18 bereits berechnete Ausdruck ist. Es wurde schon oben erwähnt, dass $\frac{m_3 + m_4}{m_1 + m_2}$ voraussichtlich einige Einheiten sein wird. Wir haben es $= 2.4$ angenommen. Ferner kann, wie noch weiter unten erwähnt werden wird, angenommen werden, dass sehr nahe $m_1 = m_2$. Hieraus ergiebt sich

$$\alpha = 0.9 \quad ; \quad \beta = 3.4 \frac{m_3}{m_4}$$

Aus der pg. 18 ausgeführten Rechnung folgt also, dass das Glied $\alpha f_1$ wegen seiner Kleinheit jedenfalls nicht in den Messungen zum Vorschein kommen wird. Aber auch das zweite Glied ist verschwindend. Sehr nahe ist nämlich, wenn $\mu$ eine Constante bedeutet:

$$p_0' - \gamma = - 20^0 t + \mu$$

$$g = 0''.25$$

$$\varrho_0' = 5''.44$$

und infolge dessen

$$\beta \varphi = 0.0011 \frac{m_3}{m_4} \cos (2 \mu - 40^0 t)$$

Es folgt also wiederum, dass eine Abweichung von dem Kepler'schen Flächensatze in der Bewegung des Schwerpunktes $S_2$ um $S_1$ in den Beobachtungen sich nicht verrathen wird. Dass auch die anderen Kepler'schen Gesetze in dieser Bewegung eingehalten werden, ist nun auch nach bekannten Entwickelungen ohne Weiteres anzunehmen.

Es wäre nun noch die Bewegung von $C$ um $S_2$ zu betrachten. Die völlige Analogie dieser Betrachtung, mit der, welche bei der Bewegung der Sterne $B$ und $A$ um einander angestellt worden ist, überhebt uns aber dieser Mühe. Zuerst ist sofort zu sehen, dass hier die Abweichungen von den Kepler'schen Gesetzen viel kleiner sein werden wie dort, weil die Distanz $C S_2$ viel kleiner ist als die Distanz $A B$; ferner weil voraussichtlich $\frac{m_3 + m_4}{m_1 + m_2} > 1$. Hiezu kommt noch die Bemerkung, dass auch hier wieder ein beträchtlicher Theil der Störungen sich durch eine passende Wahl der elliptischen Bahnelemente berücksichtigen lassen wird,

schliesslich, dass die relativen Coordinaten von $C$ gegen $S_2$ nur mit sehr geringer Genauigkeit aus den Beobachtungen hervorgehen.

Zuletzt tritt an uns die Frage heran, wie man sich das materielle System, dessen Schwerpunkt $S_2$ und zu welchem der Stern $C$ gehört, zu denken habe. Mit grosser Sicherheit geht nun aus den Rechnungen in I und den folgenden Paragraphen hervor, dass die Projection von $C$ in etwa 18 Jahren eine geschlossene, dem Kreise nahe kommende Bahn um die Projection von $S_2$ beschreibt. Von selbst drängt sich die weitere Interpretation auf, dass dieser Punkt $S_2$ nichts anderes ist als der Schwerpunkt des Sternes $C$ und eines unsichtbaren Begleiters $D$. Die weitere Verfolgung dieser Ansicht hat nun in allen Stücken eine so völlig befriedigende Darstellung der Beobachtungen ergeben, dass es mir geradezu unerklärlich ist, wie die Behauptung ausgesprochen werden konnte, die Beobachtungen des Sternes $C$ können nicht durch die Annahme eines nahen Begleiters allein dargestellt werden, sondern es müsse, wenn auch ein solcher vorhanden sein könne, noch ein fünfter Stern supponirt werden, der in grösserer Entfernung von $C$ sich befinden könne. Wenn hierbei auf Sterne aufmerksam gemacht worden ist, die sich in vielen Bogenminuten Entfernung von $\zeta$ Cancri befinden, so muss eine solche Meinung als in jeder Beziehung unzulässig bezeichnet werden. Die Frage indessen, ob der Stern $D$ sich in grosser Nähe bei $C$ befinden muss, wurde bisher nicht discutirt, sie lässt sich aber leicht erledigen und zwar in einer Weise, die einen Zweifel gar nicht mehr aufkommen lässt. Die Annahme, welche eine ganz befriedigende Darstellung aller Beobachtungen ergeben hat war die: die 4 Sterne $A$, $B$, $C$, $D$ gruppiren sich zu zwei Partialsystemen $AB$ und $CD$. Die Wirkung des zweiten auf das erste ist, obwohl sie an sich bedeutend sein kann, nur schwer in den Beobachtungen zu erkennen. Ebenso genügt die Annahme, dass sich $C$ um $D$ nach den Kepler'schen Gesetzen bewegt. Die Elemente dieser Bewegungen lassen sich mit grosser Sicherheit ermitteln, namentlich ergeben sich sehr sicher die Umlaufszeiten und die grossen Axen. Unter der Annahme gewisser Massenverhältnisse sind auch die osculirenden Elemente der Bewegung von $B$ um $A$ sicher abgeleitet worden und da eine Veränderung der Bewegungselemente von $C$ um $D$ nicht zu constatiren ist, kann sie nicht so bedeutend sein, dass man nicht

annehmen dürfte, dass die gefundenen, wenigstens in roher Näherung, als für dieselbe Zeit geltende osculirende Elemente angesehen werden können. Osculirende Elemente erfüllen aber nach ihrer Definition strenge die Kepler'schen Gesetze. Bezeichnet man also die mittleren Bewegungen von $B$ um $A$ und von $C$ um $D$ mit $n$ und $n_1$ und die grossen Halbaxen dieser Bahnen mit $a$ und $a_1$, so finden die Gleichungen statt:

$$k^2(m_1 + m_2) = a^3 n^2 \;;\quad k^2(m_3 + m_4) = a_1^3 n_1^2$$

und hieraus

$$\frac{(m_1 + m_2)\, n_1^2}{(m_3 + m_4)\, n^2} = \left(\frac{a}{a_1}\right)^3$$

Nennt man $c$ die grosse Halbaxe der Bahn, welche $C$ um $S_2$ beschreibt, so ist

$$c = \frac{m_4}{m_3 + m_4}\, a_1$$

also:

$$\frac{m_1 + m_2}{m_3 + m_4} = \left(\frac{n}{n_1}\right)^2 \left(\frac{a}{c}\right)^3 \left(\frac{m_4}{m_3 + m_4}\right)^3$$

Bezeichnet weiter der Kürze wegen:

$$y = \frac{m_3 + m_4}{m_1 + m_2} \;;\quad x = \frac{m_3}{m_4}$$

so hat man zufolge der letzten Gleichung

$$1 + x = \frac{a}{c}\left(\frac{n}{n_1}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot y^{\frac{1}{3}}$$

Nach den Elementen IX (pg. 12) und $V_a$ (pg. 14) ist aber:

$$c = 0''217 \;,\quad n_1 = -\,20^\circ\!.46$$
$$a = 0''87 \qquad n = -\;\;6^\circ\!.09$$

Es ergiebt sich demnach:

$$\left.\begin{aligned} 1 + x &= [0.252]\, y^{\frac{1}{3}} \\ a_1 &= [9.588-10]\, y^{\frac{1}{3}} \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

worin die eingeklammerten Zahlen Logarithmen sind. Diese Formeln zeigen zunächst, weil $x > 0$ sein muss, dass

$$y > 0.19$$

ist. Zweitens aber geben sie mit grosser Wahrscheinlichkeit eine obere Grenze für $a'$, die mittlere Entfernung der Massen $C$ und $D$. Berechnet

man nämlich für verschiedene $y$ die zugehörigen $a'$ und $x$, so erhält man folgende Zahlenreihe:

| $y$ | $a'$ | $x$ |
|---|---|---|
| 1 | 0.″39 | 0.79 |
| 2 | 0.49 | 1.25 |
| 3 | 0.56 | 1.58 |
| 4 | 0.61 | 1.83 |
| 10 | 0.83 | 2.85 |
| 20 | 1.05 | 3.85 |
| 100 | 1.80 | 7.30 |

Halten wir daran fest, dass die früheren Untersuchungen für $y$ den Werth 2.4 ergeben haben, dass überhaupt sehr grosse Werthe von $y$ wenig wahrscheinlich und voraussichtlich sogar bei genauerer Untersuchung der ausgeübten Störungen ganz auszuschliessen sind, so dürfte mit grosser Sicherheit der Schluss zu ziehen sein, dass der Stern $D$ in einem Abstand von wenigen Zehnteln einer Secunde sich von $C$ befinden muss. Abgesehen von allem Anderen dürfte diese grosse Nähe der beiden Massen die Thatsache genügend erklären, warum der jedenfalls lichtschwache Stern $D$ bisher nicht gesehen worden ist.

§ 3.

Ich gehe nun zur speciellen Betrachtung der Bewegung des Sternes $B$ um $A$ über.

Die in meiner früheren Arbeit (I p. 35) berechneten Störungswerthe, welche die Einwirkung des dritten Sternes auf die Bewegung von $B$ um $A$ ausdrücken, werden wohl kaum einer Verbesserung bedürfen. Trotzdem habe ich es nicht für unnütz gehalten, diesen Theil der Rechnung noch einmal zu wiederholen. Zunächst wollte ich hierdurch eine unabhängige Controle für die Richtigkeit jener Rechnungen erhalten, zugleich aber auch die a. a. O. (pg. 33) erwähnte, damals nicht zur Anwendung gekommene Methode nun wirklich benutzen. Diese Methode ist oben (pg. 20) ausführlich aus einander gesetzt worden. Es wurde also nach den Formeln (4) gerechnet und die Integration nach den zuerst von Encke gegebenen bekannten Vorschriften auf mechanischem Wege ausgeführt. Die ganze Rechnung gestaltet sich verhältnissmässig sehr einfach und

angenehm, namentlich infolge des Umstandes, dass die Kraftcomponenten $X$, $Y$, die Factoren $\frac{k^2(m_1+m_2)}{r_0^3}$ und die Coordinaten $x$, $y$, alle zusammen berechnet werden können und sich deshalb derjenige Theil der Arbeit, der sich erst successive von Ort zu Ort erledigen lässt, wesentlich abkürzt. Die Coordinaten $x$, $y$ sind durch die Beobachtungen gegeben. Statt aber diese durch Beobachtungsfehler entstellten Daten zu nehmen, ist es gerathener, interpolatorisch gewonnene Werthe, die sich jenen gut anschliessen, in Anwendung zu bringen. weil dadurch ein gleichmässiger Verlauf der Differenzen gesichert ist. Ich habe früher gezeigt, dass die Elemente $IV_a$ dieser Bedingung genügend entsprechen. Wenn dieselben auch nicht mehr die neuesten Beobachtungen hinlänglich darstellen, so werden sie doch gewiss zur sicheren Berechnung der Störungswerthe ausreichen. Ich habe deshalb $x$ und $y$ mit Hülfe der aus den genannten Elementen $IV_a$ folgende Ephemeride (I pg. 10) berechnet. Als osculirende Elemente wurden die am Schlusse der früheren Arbeit gefundenen Elemente VIII benutzt. Zur Erreichung eines besseren Anschlusses wurde jedoch die Osculationsepoche auf 1842.2 verlegt. Die störende Masse $m_3$, welche bei diesen Rechnungen als im Schwerpunkte $S_2$ vereinigt angenommen werden darf, wurde den früheren Untersuchungen zufolge abgerundet

$$m_3 = (m_1 + m_2) \times 2.37$$

angenommen. Dieser Massenwerth ist freilich ziemlich willkürlich. Doch ist gegenwärtig, wie oben ausführlich dargelegt, diese Willkür nicht zu umgehen. Nimmt man noch den Elementen VIII zufolge

$$n_0 = -5^\circ\!.9675 \;\; ; \;\; a_0 = 0''\!.8532$$

und nach den weiter unten folgenden Rechnungen

$$\varrho_1 = 5''\!.438$$

so folgt hieraus der in den Störungsformeln ($3_a$) (p. 19) vorkommende Factor:

$$\log \frac{k^2 m_3}{\varrho_1^3} = 5.9969-10$$

Die folgende Zusammenstellung enthält nun diejenigen Grössen, welche in den Störungsformeln vorkommen. Dabei ist zu bemerken, dass $X$ und $Y$ in Einheiten der 6. Stelle angegeben sind.

| | $X$ | $Y$ | $\log x$ | $\log y$ | $\log z_0$ | $\log \left(\frac{\varrho}{\varrho_1}\right)^3$ | $\log k^2 \frac{m_1 + m_2}{r_0^3}$ | $\log \left(\frac{r_0}{\varrho}\right)^3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1826.2 | + 14.1 | — 107.5 | 9.7846 | 9.8896 | 9.2059 *n* | 7.7755 | 7.7542 | 0.0926 |
| 28.2 | + 35.0 | — 117.2 | 9.8672 | 9.8529 | 9.2891 *n* | 7.8259 | 7.7055 | 0.0909 |
| 30.2 | + 54.9 | — 125.7 | 9.9284 | 9.8023 | 9.3513 *n* | 7.8685 | 7.6673 | 0.0865 |
| 32.2 | + 73.2 | — 132.6 | 9.9735 | 9.7342 | 9.3985 *n* | 7.9012 | 7.6389 | 0.0823 |
| 34.2 | + 90.1 | — 138.1 | 0.0065 | 9.6428 | 9.4341 *n* | 7.9252 | 7.6194 | 0.0778 |
| 36.2 | + 105.3 | — 142.0 | 0.0293 | 9.5157 | 9.4603 *n* | 7.9402 | 7.6083 | 0.0738 |
| 38.2 | + 119.0 | — 144.6 | 0.0441 | 9.3246 | 9.4781 *n* | 7.9495 | 7.6062 | 0.0666 |
| 40.2 | + 130.8 | — 145.7 | 0.0505 | 8.9561 | 9.4888 *n* | 7.9495 | 7.6112 | 0.0617 |
| 42.2 | + 140.9 | — 145.1 | 0.0494 | 8.5063 *n* | 9.4920 *n* | 7.9426 | 7.6250 | 0.0547 |
| 44.2 | + 149.2 | — 142.7 | 0.0403 | 9.1870 *n* | 9.4879 *n* | 7.9273 | 7.6476 | 0.0474 |
| 46.2 | + 155.7 | — 138.7 | 0.0233 | 9.4360 *n* | 9.4768 *n* | 7.9060 | 7.6785 | 0.0378 |
| 48.2 | + 159.9 | — 132.8 | 9.9966 | 9.5871 *n* | 9.4549 *n* | 7.8757 | 7.7209 | 0.0258 |
| 50.2 | + 162.1 | — 124.7 | 9.9587 | 9.6923 *n* | 9.4232 *n* | 7.8373 | 7.7733 | 0.0177 |
| 52.2 | + 161.6 | — 114.5 | 9.9062 | 9.7688 *n* | 9.3766 *n* | 7.7899 | 7.8378 | 9.9946 |
| 54.2 | + 158.3 | — 101.6 | 9.8338 | 9.8241 *n* | 9.3073 *n* | 7.7323 | 7.9161 | 9.9739 |
| 56.2 | + 151.9 | — 86.0 | 9.7312 | 9.8617 *n* | 9.2198 *n* | 7.6636 | 8.0097 | 9.9490 |
| 58.2 | + 142.0 | — 67.8 | 9.5769 | 9.8829 *n* | 9.0772 *n* | 7.5850 | 8.1202 | 9.9171 |
| 59.2 | + 135.4 | — 57.4 | 9.4634 | 9.8865 *n* | 8.9723 *n* | 7.5400 | 8.1809 | 9.9004 |
| 60.2 | + 127.9 | — 46.4 | 9.3025 | 9.8853 *n* | 8.8245 *n* | 7.4632 | 8.2479 | 9.8812 |
| 61.2 | + 118.9 | — 34.6 | 9.0335 | 9.8781 *n* | 8.5855 *n* | 7.4413 | 8.3174 | 9.8636 |
| 62.2 | + 108.9 | — 22.1 | 8.1444 | 9.8650 *n* | 7.9794 *n* | 7.3891 | 8.3892 | 9.8440 |
| 63.2 | + 97.3 | — 8.9 | 8.9107 *n* | 9.8434 *n* | 8.2939 | 7.3327 | 8.4615 | 9.8281 |
| 64.2 | + 84.6 | + 4.4 | 9.2384 *n* | 9.8125 *n* | 8.6841 | 7.2760 | 8.5308 | 9.8155 |
| 65.2 | + 70.1 | + 18.1 | 9.4180 *n* | 9.7680 *n* | 8.8765 | 7.2163 | 8.5930 | 9.8130 |
| 66.2 | + 54.5 | + 31.8 | 9.5369 *n* | 9.7073 *n* | 8.9968 | 7.1605 | 8.6423 | 9.8195 |
| 67.2 | + 37.8 | + 45.0 | 9.6201 *n* | 9.6221 *n* | 9.0753 | 7.1086 | 8.6730 | 9.8407 |
| 68.2 | + 20.2 | + 57.3 | 9.6787 *n* | 9.4990 *n* | 9.1239 | 7.0660 | 8.6808 | 9.8755 |
| 69.2 | + 2.2 | + 68.3 | 9.7164 *n* | 9.3033 *n* | 9.1486 | 7.0336 | 8.6646 | 9.9241 |
| 70.2 | — 15.8 | + 77.4 | 9.7366 *n* | 8.9001 *n* | 9.1527 | 7.0174 | 8.6267 | 9.9782 |
| 71.2 | — 33.1 | + 84.2 | 9.7405 *n* | 8.6526 | 9.1383 | 7.0195 | 8.5721 | 0.0307 |
| 72.2 | — 49.3 | + 88.6 | 9.7278 *n* | 9.2247 | 9.1061 | 7.0384 | 8.5068 | 0.0772 |
| 73.2 | — 63.8 | + 90.6 | 9.6994 *n* | 9.4547 | 9.0563 | 7.0750 | 8.4359 | 0.1114 |
| 74.2 | — 76.3 | + 90.1 | 9.6531 *n* | 9.5939 | 8.9862 | 7.1218 | 8.3636 | 0.1369 |
| 75.2 | — 87.1 | + 87.8 | 9.5876 *n* | 9.6898 | 8.8898 | 7.1794 | 8.2925 | 0.1505 |
| 76.2 | — 95.9 | + 83.6 | 9.4964 *n* | 9.7589 | 8.7543 | 7.2424 | 8.2241 | 0.1577 |
| 77.2 | — 102.9 | + 77.8 | 9.3674 *n* | 9.8097 | 8.5431 | 7.3027 | 8.1595 | 0.1601 |
| 78.2 | — 108.1 | + 70.9 | 9.1690 *n* | 9.8467 | 8.1080 | 7.3621 | 8.0994 | 0.1608 |
| 79.2 | — 111.9 | + 63.1 | 8.7756 *n* | 9.8748 | 7.9852 *n* | 7.4224 | 8.0435 | 0.1564 |
| 80.2 | — 114.4 | + 54.7 | 8.4651 | 9.8946 | 8.5048 *n* | 7.4785 | 7.9919 | 0.1519 |
| 81.2 | — 115.7 | + 45.7 | 9.0706 | 9.9077 | 8.7345 *n* | 7.5274 | 7.9446 | 0.1473 |
| 82.2 | — 116.0 | + 36.4 | 9.3112 | 9.9154 | 8.8778 *n* | 7.5790 | 7.9013 | 0.1421 |
| 83.2 | — 115.5 | + 26.7 | 9.4620 | 9.9185 | 8.9842 *n* | 7.6237 | 7.8615 | 0.1365 |
| 84.2 | — 114.2 | + 17.0 | 9.5698 | 9.9166 | 9.0672 *n* | 7.6636 | 7.8255 | 0.1333 |
| 85.2 | — 112.4 | + 7.2 | 9.6536 | 9.9116 | 9.1342 *n* | 7.7020 | 7.7927 | 0.1277 |
| 86.2 | — 110.0 | — 2.7 | 9.7206 | 9.9030 | 9.1898 *n* | 7.7365 | 7.7631 | 0.1228 |
| 87.2 | — 107.1 | — 12.4 | 9.7757 | 9.8907 | 9.2369 *n* | 7.7674 | 7.7365 | 0.1184 |
| 88.2 | — 104.0 | — 22.1 | 9.8223 | 9.8753 | 9.2771 *n* | 7.7965 | 7.7128 | 0.1130 |

Zu einem etwaigen Anschluss theile ich den Anfang und das Ende der Reihe der gefundenen Werthe für die zweiten Differentialquotienten mit. Alles ist in Einheiten der 4. Decimalstelle angesetzt.

| | $''f$ | $'f$ | $\frac{d^2\,\delta x}{dt^2}$ | $''f$ | $'f$ | $\frac{d^2\,\delta y}{dt^2}$ | $''f$ | $'f$ | $\frac{d^2\,\delta z}{dt^2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1826.2 | — 55.4 | | — 5.5 | — 79.2 | | — 8.0 | + 32.0 | | + 1.0 |
| | | + 20.5 | | | + 24.5 | | | — 8.5 | |
| 28.2 | — 34.9 | | — 5.4 | — 54.7 | | — 6.4 | + 23.5 | | + 1.4 |
| | | + 15.1 | | | + 18.1 | | | — 7.1 | |
| 30.2 | — 19.8 | | — 4.9 | — 36.6 | | — 4.9 | + 16.4 | | + 1.4 |
| | | | | | | | | | |
| 84.2 | — 1988.6 | | + 3.7 | — 164.8 | | — 17.6 | + 346.4 | | — 0.5 |
| | | + 86.9 | | | + 78.0 | | | — 30.1 | |
| 85.2 | — 1901.7 | | + 1.8 | — 86.8 | | — 15.4 | + 316.3 | | 0.0 |
| | | + 88.7 | | | + 62.6 | | | — 30.1 | |
| 86.2 | — 1813.0 | | + 0.5 | — 24.2 | | — 13.4 | + 286.2 | | + 0.4 |
| | | + 89.2 | | | + 49.2 | | | — 29.7 | |
| 87.2 | — 1723.8 | | — 0.5 | + 25.0 | | — 11.7 | + 256.5 | | + 0.7 |
| | | + 88.7 | | | + 37.5 | | | — 29.0 | |
| 88.2 | — 1635.1 | | — 1.0 | + 62.5 | | — 10.0 | + 227.5 | | + 0.8 |

Die durch doppelte Integration erhaltenen Störungswerthe ergaben sich so:

| | $\delta x$ | $\delta y$ | | $\delta x$ | $\delta y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1826.2 | — 0.0224 | — 0.0320 | 1865.2 | + 0.0780 | — 0.1497 |
| 28.2 | — 0.0141 | — 0.0221 | 66.2 | + 0.0690 | — 0.1784 |
| 30.2 | — 0.0082 | — 0.0148 | 67.2 | + 0.0516 | — 0.2071 |
| 32.2 | — 0.0041 | — 0.0095 | 68.2 | + 0.0254 | — 0.2328 |
| 34.2 | — 0.0011 | — 0.0056 | 69.2 | — 0.0088 | — 0.2518 |
| 36.2 | — 0.0003 | — 0.0030 | 70.2 | — 0.0481 | — 0.2614 |
| 38.2 | + 0.0001 | — 0.0013 | 71.2 | — 0.0889 | — 0.2606 |
| 40.2 | + 0.0001 | — 0.0003 | 72.2 | — 0.1273 | — 0.2500 |
| 42.2 | 0 | 0 | 73.2 | — 0.1606 | — 0.2316 |
| 44.2 | + 0.0002 | — 0.0003 | 74.2 | — 0.1872 | — 0.2082 |
| 46.2 | + 0.0010 | — 0.0011 | 75.2 | — 0.2070 | — 0.1823 |
| 48.2 | + 0.0029 | — 0.0026 | 76.2 | — 0.2202 | — 0.1560 |
| 50.2 | + 0.0063 | — 0.0049 | 77.2 | — 0.2278 | — 0.1306 |
| 52.2 | + 0.0116 | — 0.0084 | 78.2 | — 0.2308 | — 0.1071 |
| 54.2 | + 0.0193 | — 0.0135 | 79.2 | — 0.2302 | — 0.0860 |
| 56.2 | + 0.0296 | — 0.0213 | 80.2 | — 0.2269 | — 0.0675 |
| 58.2 | + 0.0426 | — 0.0333 | 81.2 | — 0.2216 | — 0.0514 |
| 59.2 | + 0.0500 | — 0.0416 | 82.2 | — 0.2149 | — 0.0377 |
| 60.2 | + 0.0577 | — 0.0521 | 83.2 | — 0.2071 | — 0.0262 |
| 61.2 | + 0.0654 | — 0.0650 | 84.2 | — 0.1988 | — 0.0166 |
| 62.2 | + 0.0724 | — 0.0809 | 85.2 | — 0.1902 | — 0.0088 |
| 63.2 | + 0.0779 | — 0.1003 | 86.2 | — 0.1813 | — 0.0025 |
| 64.2 | + 0.0804 | — 0.1233 | 87.2 | — 0.1724 | + 0.0024 |
| 65.2 | + 0.0780 | — 0.1497 | 88.2 | — 0.1635 | + 0.0062 |

Sind $p_0$, $\varrho_0$ die ungestörten d. i. aus den osculirenden Elementen berechneten Werthe für Positionswinkel und Distanz und $p$, $\varrho$ die wirklich stattfindenden, so hat man:

$$\varrho_0 \cos p_0 = \varrho \cos p - \delta x$$

$$\varrho_0 \sin p_0 = \varrho \sin p - \delta y$$

Wird noch

$$p = p_0 + \delta p \; ; \quad \varrho = \varrho_0 + \delta \varrho$$

gesetzt, so ergeben sich für $\delta p$ und $\delta \varrho$ folgende strenge Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta p &= \frac{A}{1-B} \\ \delta \varrho &= Bf\varrho - f\frac{(\delta x)^2 + (\delta y)^2}{2\varrho} \end{aligned}\right\}$$

Hierin bedeuten:

$$A = \frac{x\delta y - y\delta x}{\varrho^2} \; ; \quad B = \frac{x\delta x + y\delta y}{\varrho^2} \; ; \quad f = \frac{2\varrho}{\varrho + \varrho_0} = \left(1 + \frac{\delta\varrho}{2\varrho}\right)$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen findet man folgende Störungswerthe:

Osculation 1842.2

| | $\delta p$ | $\delta \varrho$ | | $\delta p$ | $\delta \varrho$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | ° | ″ | | ° | ″ |
| 1826.2 | — 0.12 | — 0.039 | 1866.2 | + 17.25 | + 0.085 |
| 28.2 | — 0.33 | — 0.026 | 67.2 | + 20.81 | + 0.076 |
| 30.2 | — 0.37 | — 0.016 | 68.2 | + 24.13 | + 0.062 |
| 32.2 | — 0.32 | — 0.008 | 69.2 | + 26.78 | + 0.044 |
| 34.2 | — 0.24 | — 0.003 | 70.2 | + 28.39 | + 0.021 |
| 36.2 | — 0.14 | — 0.001 | 71.2 | + 28.85 | — 0.001 |
| 38.2 | — 0.07 | 0 | 72.2 | + 28.32 | — 0.023 |
| 40.2 | — 0.02 | 0 | 73.2 | + 27.00 | — 0.042 |
| 42.2 | 0 | 0 | 74.2 | + 25.28 | — 0.058 |
| 44.2 | — 0.02 | 0 | 75.2 | + 23.33 | — 0.072 |
| 46.2 | — 0.04 | + 0.001 | 76.2 | + 21.36 | — 0.081 |
| 48.2 | — 0.07 | + 0.004 | 77.2 | + 19.47 | — 0.090 |
| 50.2 | — 0.07 | + 0.008 | 78.2 | + 17.73 | — 0.096 |
| 52.2 | 0 | + 0.014 | 79.2 | + 16 07 | — 0.101 |
| 54.2 | + 0.24 | + 0.023 | 80.2 | + 14.60 | — 0.105 |
| 56.2 | + 0.73 | + 0.034 | 81.2 | + 13.25 | — 0.106 |
| 58.2 | + 1.66 | + 0.048 | 82.2 | + 12.02 | — 0.109 |
| 59.2 | + 2.39 | + 0.055 | 83.2 | + 10.89 | — 0.110 |
| 60.2 | + 3.35 | + 0.063 | 84.2 | + 9.88 | — 0.112 |
| 61.2 | + 4.60 | + 0.071 | 85.2 | + 8.94 | — 0.112 |
| 62.2 | + 6.21 | + 0.078 | 86.2 | + 8.06 | — 0.111 |
| 63.2 | + 8.28 | + 0.083 | 87.2 | + 7.27 | — 0.111 |
| 64.2 | + 10.80 | + 0.086 | 88.2 | + 6.53 | — 0.110 |
| 65.2 | + 13.87 | + 0.086 | | | |

Diese Werthe stimmen mit den früher berechneten in Anbetracht der veränderten Umstände, unter denen sie zu Stande gekommen sind, beinahe vollkommen überein. Zunächst stellt sich nun die Aufgabe dar, die osculirenden Elemente VIII so zu verbessern, dass die Beobachtungen möglichst gut dargestellt werden. Ich werde weiter unten Alles zusammenstellen, was sich auf die Beobachtungen bezieht. Hier genügt es,

die Normalörter anzuführen, deren Zusammensetzung am genannten Orte gegeben wird. Die folgenden Positionswinkel sind wegen Präcession auf 1850.0 bereits reducirt und unterscheiden sich also um diese kleinen Reductionsgrössen von den directen Beobachtungsresultaten. Die Normalörter, um deren Darstellung es sich handelt, sind nun folgende, wobei die Gewichtszahlen $g$ gleich mit angeführt werden.

| | $p$ | $g$ | $\varrho$ | $g$ |
|---|---|---|---|---|
| | ° | | " | |
| 1832.2 | 28.80 | 36 | 1.129 | 24 |
| 36.2 | 18.33 | 14 | 1.171 | 8 |
| 39.2 | 8.75 | 12 | 1.175 | 6 |
| 42.2 | 358.57 | 28 | 1.156 | 24 |
| 45.2 | 350.17 | 16 | 1.118 | 15 |
| 48.2 | 339.25 | 25 | 1.040 | 23 |
| 51.2 | 328.31 | 26 | 1.040 | 23 |
| 54.2 | 316.03 | 31 | 0.991 | 26 |
| 57.2 | 301.49 | 33 | 0.931 | 21 |
| 60.2 | 284.49 | 16 | 0.827 | 14 |
| 63.2 | 262.76 | 16 | 0 693 | 16 |
| 66.2 | 235.77 | 25 | 0.598 | 17 |
| 69.2 | 199.78 | 25 | 0.522 | 18 |
| 72.2 | 162.72 | 38 | 0.586 | 24 |
| 75.2 | 129.36 | 41 | 0.628 | 37 |
| 78.2 | 100.98 | 35 | 0.698 | 35 |
| 81.2 | 81.48 | 25 | 0.851 | 25 |
| 84.2 | 64.74 | 24 | 0.934 | 24 |
| 87.2 | 48.94 | 12 | 0.904 | 12 |

Zur Verbesserung der Elemente VIII benutze ich, wie ich das schon früher gethan, allein die Positionswinkel. Bei Distanzen, die zum grössten Theile beträchtlich kleiner als $1''$ sind, scheinen doch sowohl die zufälligen als auch die persönlichen Fehler derart zu sein, dass zum mindesten keine Verbesserung der Resultate durch Berücksichtigung der Distanzen zu erhoffen ist. Bringt man nun an die zuletzt angeführten Positionswinkel die in der obigen Tabelle angeführten Störungen mit umgekehrtem Zeichen an, so erhält man osculirende Werthe der $p$, welche durch die Elemente darzustellen sind. Unter $B$ sind in der folgenden Uebersicht diese Positionswinkel gegeben. Daneben stehen unter $R$ die aus den Elementen VIII hervorgehenden Werthe; ferner ist noch der abgerundete Werth von $\sqrt{g}$, welcher im Folgenden benutzt worden ist, angeführt. Die weiteren Columnen finden später ihre Erklärung.

| | $B$ | $R$ | $B-R$ | $\sqrt{g}$ | $IX$ | $B-IX$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | ° | ° | ° | | ° | ° |
| 1832.2 | 29.12 | 28.54 | +0.58 | 6 | 29.61 | —0.49 |
| 36.2 | 18.47 | 16.82 | +1.65 | 4 | 17.32 | +1.15 |
| 39.2 | 8.79 | 8.05 | +0.74 | 3 | 8.34 | +0.45 |
| 42.2 | 358.57 | 359.10 | —0.53 | 5 | 359.27 | —0.70 |
| 45.2 | 350.20 | 349.84 | +0.36 | 4 | 349.84 | +0.36 |
| 48.2 | 339.32 | 339.71 | —0.39 | 5 | 339.75 | —0.43 |
| 51.2 | 328.35 | 328.56 | —0.21 | 5 | 328.58 | —0.23 |
| 54.2 | 315.79 | 315.81 | —0.02 | 6 | 315.74 | +0.05 |
| 57.2 | 300.32 | 300.34 | —0.02 | 6 | 300.29 | +0.03 |
| 60.2 | 281.14 | 280.99 | +0.15 | 4 | 280.65 | +0.49 |
| 63.2 | 254.48 | 254.94 | —0.46 | 4 | 254.25 | +0.23 |
| 66.2 | 218.52 | 218.79 | —0.27 | 5 | 218.05 | +0.47 |
| 69.2 | 173.00 | 174.10 | —1.10 | 5 | 174.09 | —1.09 |
| 72.2 | 134.40 | 133.91 | +0.49 | 6 | 134.25 | +0.15 |
| 75.2 | 106.03 | 105.20 | +0.83 | 6 | 104.98 | +1.05 |
| 78.2 | 83.25 | 84.81 | —1.56 | 6 | 83.88 | —0.63 |
| 81.2 | 68.23 | 69.20 | —0.97 | 5 | 67.76 | +0.47 |
| 84.2 | 54.86 | 56.59 | —1.73 | 5 | 54.61 | +0.25 |
| 87.2 | 41.67 | 45.67 | —4.00 | 3 | 43.33 | —1.66 |

Die Bedingungsgleichungen für die Verbesserung der Elemente werden hieraus, wenn Logarithmen angesetzt werden:

| $[0.7782]\,d\Omega+$ | $[0.9040]\,\frac{di}{10}+$ | $[0.7826]\,d\lambda+$ | $[0.2583]\,10\,dT+$ | $[0.4790\,n]\,d\varphi+$ | $[1.0367\,n]\,10\,dn=$ | $[0.5466]$ | 1.0613 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.6021 | 0.6325 | 0.6124 | 0.0671 | 9.7710 *n* | 0.7945 *n* | 0.8195 | 1.1250 |
| 0.4771 | 0.3553 | 0.4906 | 9.9461 | 9.5571 | 0.6300 *n* | 0.3464 | 0.8786 |
| 0.6990 | 0.2576 | 0.7145 | 0.1830 | 0.2948 | 0.8192 *n* | 0.4233 *n* | 0.7953 |
| 0.6021 | 9.5363 *n* | 0.6210 | 0.1127 | 0.4348 | 0.6953 *n* | 0.1584 | 0.9208 |
| 0.6990 | 0.4455 *n* | 0.7137 | 0.2440 | 0.6814 | 0.7653 *n* | 0.2900 *n* | 0.7899 |
| 0.6990 | 0.6984 *n* | 0.7101 | 0.2970 | 0.8054 | 0.7371 *n* | 0.0212 *n* | 0.8450 |
| 0.7782 | 0.8979 *n* | 0.7835 | 0.4440 | 0.9791 | 0.8088 *n* | 9.0792 *n* | 0.9965 |
| 0.7782 | 0.9045 *n* | 0.7747 | 0.4630 | 1.0551 | 0.7929 *n* | 9.0792 | 1.0740 |
| 0.6021 | 0.5426 *n* | 0.5896 | 0.4713 | 0.9262 | 0.5888 *n* | 9.7782 | 1.0975 |
| 0.6021 | 0.1043 | 0.5864 | 0.6105 | 0.9115 | 0 5179 *n* | 0.2648 *n* | 1.2103 |
| 0.6990 | 0.8404 | 0.6979 | 0.8426 | 0.7540 | 0.3274 *n* | 0.1303 *n* | 1.4162 |
| 0.6990 | 9.7902 | 0.7141 | 0.8736 | 0.5979 *n* | 0.1690 | 0.7404 *n* | 1.0122 |
| 0.7782 | 0.9062 *n* | 0.7825 | 0.8368 | 1.0848 *n* | 0.6820 | 0.4684 | 0.8103 |
| 0.7782 | 0.7872 *n* | 0.7675 | 0.6788 | 1.1101 *n* | 0.6590 | 0.6972 | 0.8547 |
| 0.7782 | 9.9758 *n* | 0.7623 | 0.5450 | 1.0570 *n* | 0.7769 | 0.9713 *n* | 9.6365 *n* |
| 0.6690 | 0.4628 | 0.6845 | 0.3640 | 0.8998 *n* | 0.7080 | 0.6857 *n* | 0.8673 |
| 0.6990 | 0.7254 | 0.6887 | 0.2888 | 0.8062 *n* | 0.7219 | 0.9370 *n* | 0.8671 |
| 0.4771 | 0.5976 | 0.4724 | 0.0131 | 0.4725 *n* | 0.5201 | 1.0792 *n* | 9.8439 *n* |

Bei der Berechnung dieser Coëfficienten wurde der Bequemlichkeit wegen $\varrho$ aus den Normalörtern genommen. Ferner ist an letzter Stelle der Logarithmus der Summe sämmtlicher in derselben Horizontalreihe stehender Coëfficienten mitgetheilt. Der Beobachtungsfehler $\Delta p$ im Positionswinkel ist bekanntlich abhängig von der Distanz, dergestalt, dass er innerhalb gewisser Grenzen mit zunehmender Distanz sich verkleinert. Das Gesetz dieser Abhängigkeit ist aber noch wenig bekannt, wird auch wohl von Beobachter zu Beobachter variiren und voraussichtlich keinen einfachen

Verlauf zeigen. Für mässige Distanzen, welche grösser als etwa 1″ sind. wird man indess vielleicht der Wahrheit nahe kommen, wenn man $\Delta p$ porportional mit $\frac{1}{\varrho}$ setzt. Dann wäre die Ausgleichung so auszuführen, dass man nicht $\Sigma(\Delta p)^2$, sondern $\Sigma(\varrho \Delta p)^2$ zu einem Minimum macht. Wenn ich hier dieses Verfahren nicht eingeschlagen, vielmehr die Bedingung $\Sigma(\Delta p)^2 = \text{Min.}$ aufgestellt habe, so geschah dies, weil es mir zweifelhaft ist, ob man bei so kleinen Distanzen, wie die vorliegenden, jenes Gesetz mit Vortheil annehmen darf. Im Uebrigen ist das erlangte Endresultat ganz zufriedenstellend und da dasselbe von mehr oder weniger willkürlichen Annahmen (z. B. über die Grösse der constanten Fehler) gänzlich frei zu machen doch nicht möglich ist, so wird es ziemlich gleichgültig sein, ob man nach dem einen oder andern der beiden genannten Gesichtspunkte die Normalgleichungen bildet. Die durch die bekannte Summencontrole strenge geprüften Normalgleichungen sind nun:

| $d\Omega$ | $\frac{di}{10}$ | $d\lambda$ | $(10\,dT)$ | $d\varphi$ | $(10\,dn)$ | = | $s$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| + 473.0 | − 63.7 | + 473.9 | + 299.4 | − 41.7 | − 166.1 | − 121.1 | + 853.7 |
| − 63.7 | + 468.6 | − 64.1 | − 55.3 | − 98.3 | − 10.5 | − 101.2 | + 75.5 |
| + 473.9 | − 64.1 | + 475.0 | + 299.5 | − 36.4 | − 173.8 | − 117.8 | + 856.3 |
| + 299.4 | − 55.3 | + 299.5 | + 254.8 | − 69.4 | − 31.7 | − 77.5 | + 619.8 |
| − 41.7 | − 98.3 | − 36.4 | − 69.4 | + 1046.7 | − 533.3 | + 106.9 | + 374.5 |
| − 166.1 | − 10.5 | − 173.8 | − 31.7 | − 533.3 | + 564.3 | − 190.7 | − 541.8 |

Es war von vornherein klar und eine Ansicht der Normalgleichungen bestätigt dies, dass eine unabhängige Bestimmung von $d\lambda$ und $d\Omega$ zu gleicher Zeit mit grosser Unsicherheit behaftet sein muss. Es ist dies eine unmittelbare Folge der kleinen Neigung und liegt also in der Natur der Sache. Man wird daher offenbar in der Darstellung der Beobachtung kaum eine nennenswerthe Einbusse erleiden, wenn man eine der beiden genannten Grössen von der Ausgleichung ausschliesst.

Ich habe $d\lambda = 0$ gesetzt; dann fällt die dritte Normalgleichung einfach fort und in den anderen ist $d\lambda$ wegzulassen. Die Auflösung dieses reducirten Systems mit 5 Unbekannten ergibt nun:

$$\left.\begin{aligned} dT &= +\,0.0895 \\ d\Omega &= -\,1^{\circ}.360 \\ d\varphi &= -\,0^{\circ}.557 \\ di &= -\,4^{\circ}.395 \\ dn &= -\,0.1223 \end{aligned}\right\}$$

Addirt man diese Correctionen zu den Elementen VIII, so erhalten wir

Elemente IX.

Osculation 1842.2

$$
\begin{aligned}
T &= 1868.112 \\
\lambda &= 109^{\circ}.735 \\
\Omega &= 80.190 \\
i &= 11.135 \\
\varphi &= 22.450 \\
n &= -6.0898
\end{aligned}
\qquad \left.\begin{matrix}\lambda\\ \Omega\\ i\end{matrix}\right\} 1850.0
$$

Diese Elemente nähern sich sehr den früher gefundenen (VII). Es erübrigt nun noch die Ableitung der halben grossen Axe $a$. Zu diesem Zwecke reduciren wir zunächst die beobachteten Distanzen der Normalörter durch Anbringung der Störungswerthe auf osculirende Distanzen, $B$ in der folgenden Zusammenstellung. Jede solche Distanz gibt mit Hülfe der Elemente IX ein $a$, aus welchen Zahlen dann nach Massgabe der daneben stehenden abgerundeten Gewichte $g_0$ das Mittel genommen wird.

| | $B$ | $g_0$ | $a$ | $B-R$ |
|---|---|---|---|---|
| 1832.2 | 1.″137 | 4 | 0.″861 | +0.″003 |
| 36.2 | 1.172 | 1 | 0.865 | +0.007 |
| 39.2 | 1.175 | 1 | 0.866 | +0.008 |
| 42.2 | 1.156 | 4 | 0.862 | +0.004 |
| 45.2 | 1.118 | 3 | 0.856 | −0 002 |
| 48.2 | 1.036 | 4 | 0.827 | −0.031 |
| 51.2 | 1.029 | 4 | 0.872 | +0.014 |
| 54.2 | 0.968 | 4 | 0.888 | +0.030 |
| 57.2 | 0.891 | 4 | 0.908 | +0.050 |
| 60.2 | 0.764 | 2 | 0.890 | +0 032 |
| 63.2 | 0.610 | 3 | 0.833 | −0.025 |
| 66.2 | 0.513 | 3 | 0.811 | −0.047 |
| 69.2 | 0.478 | 3 | 0.780 | −0.078 |
| 72.2 | 0.608 | 4 | 0.880 | +0.022 |
| 75.2 | 0.700 | 6 | 0.852 | −0.006 |
| 78.2 | 0.794 | 6 | 0.834 | −0.024 |
| 81.2 | 0.956 | 4 | 0.891 | +0.033 |
| 84.2 | 1.046 | 4 | 0.893 | +0.035 |
| 87.2 | 1.015 | 2 | 0.813 | −0.045 |

Mittel $a = 0.''8581$

Die Darstellung der Normalörter durch die Elemente IX ist unter den Rubriken $B-$ IX für Positionswinkel und $B-R$ für Distanz gegeben. Die dort angeführten Differenzen dürfen sowohl, was ihre Grösse

als auch die Vertheilung ihrer Vorzeichen betrifft, als befriedigend angesehen werden. Wenigstens ist die nicht ganz gute Vertheilung der V o r z e i c h e n nicht auffallend. wie noch weiter unten erörtert werden soll.

Zum Schlusse dieser Untersuchungen soll nun noch eine Ephemeride nach den Elementen IX mitgetheilt werden. Die Störungswerthe (pg. 34) sowie die kleine Reduction auf das jedesmalige Aequinoctium sind hierbei bereits hinzugefügt, so dass die folgenden Zahlen direct mit den Beobachtungen vergleichbar sind. Was die Reduction wegen Praecession betrifft, so ist die jährliche Veränderung des Positionswinkels gegeben durch:

$$\frac{dp}{dt} = + 0^\circ\!.0051\,(t - 1850).$$

Ephemeride nach Elementen IX.

| | $p$ (°) | Diff. (°) | $\varrho$ (″) | Diff. |
|---|---|---|---|---|
| 1826.2 | 50.00 | — 3.85 | 0.993 | + 30 |
| 27.2 | 46.15 | — 3.67 | 1.023 | + 26 |
| 28.2 | 42.48 | — 3.50 | 1.049 | + 23 |
| 29.2 | 38.98 | — 3.36 | 1.072 | + 21 |
| 30.2 | 35.62 | — 3.25 | 1.093 | + 18 |
| 31.2 | 32.37 | — 3.17 | 1.111 | + 16 |
| 32.2 | 29.20 | — 3.10 | 1.127 | + 12 |
| 33.2 | 26.10 | — 3.03 | 1.139 | + 11 |
| 34.2 | 23.07 | — 2.99 | 1.150 | + 7 |
| 35.2 | 20.08 | — 2.97 | 1.157 | + 6 |
| 36.2 | 17.11 | — 2.96 | 1.163 | + 3 |
| 37.2 | 14.15 | — 2.95 | 1.166 | + 2 |
| 38.2 | 11.20 | — 2.96 | 1.168 | — 2 |
| 39.2 | 8.24 | — 2.97 | 1.166 | — 2 |
| 40.2 | 5.27 | — 3.00 | 1.164 | — 6 |
| 41.2 | 2.27 | — 3.04 | 1.158 | — 6 |
| 42.2 | 359.23 | — 3.09 | 1.152 | — 9 |
| 43.2 | 356.14 | — 3.15 | 1.143 | — 9 |
| 44.2 | 352.99 | — 3.20 | 1.134 | — 11 |
| 45.2 | 349.79 | — 3.28 | 1.123 | — 13 |
| 46.2 | 346.51 | — 3.37 | 1.110 | — 14 |
| 47.2 | 343.14 | — 3.47 | 1.096 | — 16 |
| 48.2 | 339.67 | — 3.58 | 1.080 | — 18 |
| 49.2 | 336.09 | — 3.70 | 1.062 | — 18 |
| 50.2 | 332.39 | — 3.84 | 1.044 | — 21 |
| 51.2 | 328.55 | — 4.02 | 1.023 | — 20 |
| 52.2 | 324.53 | — 4.17 | 1.003 | — 23 |
| 53.2 | 320.36 | — 4.36 | 0.980 | — 22 |
| 54.2 | 316.00 | — 4.59 | 0.958 | — 25 |
| 55.2 | 311.41 | — 4.84 | 0.933 | — 25 |
| 56.2 | 306.57 | — 5.12 | 0.908 | — 25 |
| 57.2 | 301.45 | | 0.883 | |

| | $p$ (°) | Diff. (°) | $\varrho$ (″) | Diff. |
|---|---|---|---|---|
| 1857.2 | 301.45 | — 5.44 | 0.883 | — 28 |
| 58.2 | 296.01 | — 5.78 | 0.855 | — 29 |
| 59.2 | 290.23 | — 6.18 | 0.826 | — 28 |
| 60.2 | 284.05 | — 6.63 | 0.798 | — 30 |
| 61.2 | 277.42 | — 7.14 | 0.768 | — 30 |
| 62.2 | 270.28 | — 7.68 | 0.738 | — 31 |
| 63.2 | 262.60 | — 8.31 | 0.707 | — 29 |
| 64.2 | 254.29 | — 9.05 | 0.678 | — 29 |
| 65.2 | 245.24 | — 9.86 | 0.649 | — 27 |
| 66.2 | 235.38 | — 10.68 | 0.622 | — 23 |
| 67.2 | 224.70 | — 11.51 | 0.599 | — 19 |
| 68.2 | 213.19 | — 12.22 | 0.580 | — 12 |
| 69.2 | 200.97 | — 12.72 | 0.568 | — 6 |
| 70.2 | 188.25 | — 12.88 | 0.562 | + 1 |
| 71.2 | 175.37 | — 12.69 | 0.563 | + 7 |
| 72.2 | 162.68 | — 12.21 | 0.570 | + 15 |
| 73.2 | 150.47 | — 11.43 | 0.585 | + 21 |
| 74.2 | 139.04 | — 10.60 | 0.606 | + 24 |
| 75.2 | 128.44 | — 9.75 | 0.630 | + 28 |
| 76.2 | 118.69 | — 8.86 | 0.658 | + 29 |
| 77.2 | 109.83 | — 8.08 | 0.687 | + 29 |
| 78.2 | 101.75 | — 7.43 | 0.716 | + 32 |
| 79.2 | 94.32 | — 6.85 | 0.748 | + 30 |
| 80.2 | 87.47 | — 6.30 | 0.778 | + 30 |
| 81.2 | 81.17 | — 5.88 | 0.808 | + 27 |
| 82.2 | 75.29 | — 5.50 | 0.835 | + 27 |
| 83.2 | 69.79 | — 5.13 | 0.862 | + 26 |
| 84.2 | 64.66 | — 4.86 | 0.888 | + 23 |
| 85.2 | 59.80 | — 4.63 | 0.911 | + 23 |
| 86.2 | 55.17 | — 4.41 | 0.934 | + 20 |
| 87.2 | 50.76 | — 4.20 | 0.954 | + 20 |
| 88.2 | 46.56 | | 0.974 | |

Ich habe nun zu erklären, wie die dem Vorigen zu Grunde gelegten Normalörter zusammengesetzt sind.

Im Allgemeinen wurden die Beobachtungen der Zusammenstellung entnommen, die ich in meiner früheren Arbeit (p. 40 ff.) gegeben habe. Inzwischen sind aber eine beträchtliche Zahl neuerer Messungen veröffentlicht worden. Ausser den in den bekannten und allgemein zugänglichen periodischen Schriften enthaltenen konnte namentlich die schöne Reihe von Doppelsternmessungen benutzt werden, welche Schiaparelli[1]) kürzlich veröffentlicht hat. Diese Publikation kam in meine Hände kurz vor Abschluss der hier mitgetheilten Rechnungen. Zu bemerken ist ferner, dass ich die Beobachtungen Dembowski's[2]) nicht wie früher aus den „Astron. Nachr.“, sondern aus dem inzwischen erschienenen Werke entnommen habe, welches um Kleinigkeiten gegen die früheren Mittheilungen veränderte Jahresmittel enthält. Dieses mir zugängliche Material ist im folgenden chronologisch zusammengestellt. Es wurden aber nicht die von den Beobachtern angegebenen Resultate direct aufgenommen, vielmehr wurden gewisse Correctionen angebracht, über welche ich nun zu berichten habe.

Die Aufgabe, die Beobachtungen engerer Doppelsterne durch eine theoretische Formel möglichst gut darzustellen, hängt von dem äusserst schwierigen und in vielen Fällen gegenwärtig noch nicht vollständig zu bewältigenden Probleme ab, die constanten oder persönlichen Fehler der einzelnen Beobachter abzuleiten und numerisch zu bestimmen. Wären diese Fehler während der ganzen Zeit, über welche sich die Messungen eines Astronomen erstrecken, der Hauptsache nach wirklich constant, so wäre das Problem, wenigstens für die Sterne $A$ und $B$ bei $\zeta$ Cancri, verhältnissmässig einfach und sicher zu lösen. Hier liegen theoretische Voraussetzungen zu Grunde, die sich sicher verfolgen lassen und die, wie ich glaube, durch meine Arbeiten ziemlich sicher verfolgt worden sind. Es ist so die Basis vorhanden, welche gestattet, durch successive Näherungen, indem man die Resultate der Theorie wiederholt mit den Beobachtungen

1) Osservazioni sulle stelle doppie. Publicazioni del reale osservatorio di Brera in Milano No. XXXIII 1888.

2) Misure micrometriche di stelle doppie e multiple fatte negli anni 1852—1878, Roma 1883 u. 1884.

vergleicht, die constanten Fehler mit stets wachsender Genauigkeit abzuleiten. Zwei Umstände aber arbeiten der Zuverlässigkeit dieses Verfahrens entgegen. 1) Es ist längst bekannt, dass abgesehen von vielen anderen Umständen nicht unbeträchtliche zeitliche Aenderungen in den persönlichen Fehlern eines Beobachters eintreten können und wirklich eingetreten sind. Solche Aenderungen sind z. B. bei Otto Struve, dessen Messungen wegen ihrer grossen Zahl und der langen Zeit, über welche sie sich erstrecken, von geradezu dominirendem Einflusse sind, in starkem Masse constatirt und der Beobachter selbst hat bei der Untersuchung seiner Messungen mehrere getrennte Perioden unterscheiden müssen. Solche zeitliche Aenderungen der persönlichen Fehler sind aber sehr schwer in Rechnung zu bringen, weil bei den meisten Beobachtern die Anzahl der Messungen viel zu klein ist, um bei solchen Untersuchungen einige Sicherheit zu gestatten. Man wird sich der Wahrheit nur durch die Betrachtung der Messungen an vielen Sternen nähern können, wobei aber wieder andere nicht zu leugnende Störungen zu befürchten sind. Auf diese Weise wird man allerdings durch das Verfahren, welches ich in meiner früheren Arbeit angewandt habe, nicht völlig zufriedenstellende Werthe für die persönlichen Fehler erlangen. Man darf aber doch erwarten, grosse und besonders schädliche Einwirkungen dieser Art zu beseitigen. Zudem giebt der Verlauf der so erhaltenen Correctionen immerhin einen Massstab für die Sicherheit der erhaltenen Bestimmungen an und die Aufsuchung der mittleren Fehler, wie ich sie a. a. O. ausgeführt, giebt in der That einen Anhalt für die Abschätzung der relativen Gewichtszahlen. Ich muss demnach das von mir eingeschlagene Verfahren noch immer als das unter den obwaltenden Umständen (bei dem Sterne $C$ aus weiter unten folgenden Gründen in erhöhtem Masse) relativ beste bezeichnen. 2) Thatsächlich liegen oftmals die Verhältnisse so, dass die verschiedenen Beobachter desselben Doppelsternes sich zeitlich auf einander folgen und nur kurze Zeiträume hindurch gleichzeitig sich an den Messungen betheiligen. Es ist klar, dass dadurch der innere Zusammenhang zwischen den einzelnen Beobachtern gelockert erscheint und eine Ermittelung der persönlichen Fehler sehr erschwert ist. Bei $\zeta$ Cancri zeigt sich dieser Uebelstand sehr deutlich und in der That ist z. B. der Zusammenhang zwischen W. Struve, Dawes, Otto Struve ein sehr loser. Dieser

Umstand tritt noch mehr in den Vordergrund, wenn man die neueren Beobachter Dembowski, Dunér und Schiaparelli berücksichtigt. Im Allgemeinen wird hier zwischen den früheren und letzten Jahrzehnten nur durch O. Struve eine Verbindung hergestellt und diese Verbindung ist eine nicht zuverlässige, weil leider gerade O. Struve persönliche Fehler zeigt, die zeitliche und auch von anderen Umständen abhängige Veränderungen aufzuweisen scheinen. Die Folgen dieser misslichen Verhältnisse werden sich darin äussern, dass die übrigbleibenden Fehler nicht das Verhalten zufälliger Fehler zeigen werden, m. a. W. die Vertheilung der Vorzeichen wird nicht den Wahrscheinlichkeitsgesetzen entsprechen und man wird an diese nicht jene strengen Anforderungen stellen können, die man in anderen Theilen der Astronomie zu stellen berechtigt ist.

Was vor Allem die neuesten etwa seit 1875 angestellten Messungen von $\zeta$ Cancri betrifft, so erscheint es hier fast unmöglich, die constanten Fehler aus der Vergleichung mit der Theorie zu bestimmen. Ich habe deshalb auch, wenigstens bei dem Sterne *B*, von einer Anwendung dieses Verfahrens absehen müssen und konnte dies um so eher, als sich erwarten lässt, dass in Zukunft die Sachlage in dieser Beziehung sich besser gestalten wird. Dies gilt wenigstens, wenn, wie zu hoffen, die Mailänder und Pulkowaer Reihen fortgesetzt werden. Auf der anderen Seite muss hervorgehoben werden, dass durch den Tod der beiden Beobachter Engelmann und Jedrzejewicz zwei ausgezeichnete Mitarbeiter ausgeschieden sind. Vielleicht liesse sich aber doch durch eine eingehende Bearbeitung der von ihnen ausgeführten Messungen manches über die persönlichen Fehler derselben mit mehr Sicherheit aufdecken, als es jetzt möglich ist.

Den gemachten Bemerkungen zufolge wurden also die in der früheren Arbeit bereits benutzten Beobachtungen mit jenen Correctionen versehen, die damals gefunden worden sind. Die neu hinzugekommenen Messungen wurden mit Ausnahme von Schiaparelli uncorrigirt gelassen. An die Messungen von Schiaparelli (Sp.) wurde zufolge der Angaben des Beobachters (a. a. O. pg. 76) die Correction

$$\mathrm{Sp} = \Delta_2 + 0^\circ\!.40 \quad \text{und} \quad \mathrm{Sp} = \Delta_2 - 0''\!.040$$ [1])

1) Diese Zahl ist durch einen Schreibfehler entstellt worden. Sp. führt — 0''.020 an. Ich habe indessen bei dem provisorischen Character, den die Benutzung der neuesten Beobachtungen in der vorliegenden Arbeit haben muss, diesen an sich geringfügigen Fehler nicht corrigirt, da ich denselben erst nach völligem Abschluss der ganzen Untersuchung gefunden habe.

angebracht, wo $\Delta_2$ die Correction bedeutet, die an die Messungen von Dembowski angebracht werden muss. Für $\Delta_2$ habe ich früher + 0°.05 gefunden. In Distanz war die Ableitung von $\Delta_2$ infolge der vielen Schätzungen, welche hier vorkommen, sehr wenig sicher. Ich habe es deshalb für besser gehalten, die früher gefundene Correction (vgl. I pg. 44, 45) zu ersetzen durch die von Schiaparelli gemachte Angabe:

$$\Delta_2 = -\,0''.102$$

In der That scheint hierdurch der Anschluss besser geworden zu sein. Die anderen in Anwendung gebrachten Correctionen waren:

1) W. Struve ($\Sigma$) + 0°.93 und + 0″.004

2) O. Struve (O. $\Sigma$) $\begin{cases} \text{I} + 1^\circ.50 \\ \text{II} - 1.40 \end{cases}$ $\begin{cases} \text{I} \quad 0 \\ \text{II} + 0''.030 \\ \text{III} - 0.030 \end{cases}$

Es bedeuten dabei im Positionswinkel: II den Fall, wo die 3 Sterne *A*, *B*, *C* bis auf $\pm$ 10° in einer Geraden zu stehen scheinen, I den entgegengesetzten Fall. In Distanz sind unter I, II, III die 3 bekannten Zeitperioden verstanden, welche bei O. $\Sigma$ zu unterscheiden sind.

3) Dawes (D). Hier sind ebenfalls 3 Perioden zu unterscheiden. Als diesbezügliche Correctionen wurden angenommen:

$$\left.\begin{array}{l} \text{I} \;\; + 0^\circ.09 \\ \text{II} \; + 1.26 \end{array}\right\} - 0''.065$$
$$\text{III} + 0.65 \qquad 0$$

4) Secchi (S). Correction: — 0°.37 + 0″.026

5) Dembowski ($\Delta$). Aeltere Reihe $\Delta_1 = + 3^\circ.05$
Neuere Reihe $\Delta_2 = + 0^\circ.05$

6) Dunér (Du). Correction: — 3°.44 + 0″.014

7) Mädler (M). Correction:

$$\left.\begin{array}{l} \text{1. Periode} \\ \text{2. Periode} \end{array}\right\} - 1^\circ.99 \quad \begin{array}{l} + 0''.051 \\ - 0.145 \end{array}$$

8) Bessel. Correction: 0° — 0″.120

9) Engelmann. Beobachtungen aus den sechsziger Jahren erhielten die Correction: — 1°.72, — 0″.040; die neueren wurden in Ermangelung besserer Kenntnisse unverändert gelassen.

Alle übrigen Beobachtungen wurden uncorrigirt verwerthet.

Es ist keinem Zweifel unterworfen und wurde oben besonders hervorgehoben, dass die auf die angegebene Weise corrigirten Beobachtungen durchaus nicht völlig frei sind von den persönlichen Fehlern. Ebenso wenig zweifelhaft dürfte es sein, dass diese letzteren die zufälligen Beobachtungsfehler in den meisten Fällen bei Weitem übertreffen. Ich habe diesem Umstande in der früheren Abhandlung dadurch entsprochen, dass ich gewisse Gewichtszahlen einführte. Wegen der naturgemässen Unsicherheit, die diesen Bestimmungen anhaften muss, habe ich gegenwärtig eine völlig andere und einfachere Abschätzung eintreten lassen. Ich habe nämlich einem Jahresmittel, gebildet aus 1 oder 2 Abenden, das Gewicht 2 oder 1 und aus mehr als 2 Abenden das Gewicht 4 oder 2 gegeben, je nachdem der betreffende Beobachter $\Sigma$. O. $\Sigma$, Bessel, D, S, $\varDelta$, Du, Sp oder einer der übrigen war. Ich möchte nicht behaupten, dass diese Gewichtsbestimmung besser sei, wie die frühere. Sie hat aber den einen Vortheil, dass einige Beobachter, welche früher durch die grosse Zahl von Abenden, an denen sie durch mehrere Jahre $\zeta$ Cancri zu messen pflegten, einen vielleicht allzu grossen Einfluss auf die Normalörter ausgeübt haben, in ihrer Einwirkung etwas eingeschränkt werden. Diese Einschränkung wird deshalb nur von guter Wirkung sein, weil man doch behaupten darf, dass das Zusammenfassen möglichst vieler verschiedener Beobachter noch am ehesten die persönlichen Fehler unschädlich macht. Im Uebrigen weichen die neueren Jahresmittel von den früher gebildeten nur selten in erheblicher Weise ab und das Resultat der Ausgleichung wird durch die Gewichtsannahme nicht wesentlich beeinflusst. Eine Ausnahme möchten vielleicht die Jahresmittel von 1880 an machen. Diese sind aber überhaupt nicht sehr zuverlässig. Sie hängen wesentlich von der Richtigkeit der Correction Sp ab und von der Voraussetzung, dass Engelmann und Jedrzejewicz keine bedeutenden Correctionen erfordern. Das letztere namentlich wird schwerlich der Wahrheit entsprechen. Man wird deshalb wenig Gewicht darauf legen, wenn die letzten Jahresmittel systematische Unterschiede gegen die theoretisch berechneten Werthe zeigen. Keinesfalls wird man daraus auf eine nachweisbare Unrichtigkeit der letzteren schliessen dürfen.

Ich gehe nun zur Mittheilung der chronologisch geordneten Sammlung der Beobachtungsdaten über. Quellenangabe oder nähere Erläuterungen der einfachen Uebersicht scheinen mir nicht erforderlich.

| Jahr | Beobachter | Positionswinkel | Gewicht | Distanz | Gewicht |
|---|---|---|---|---|---|
| 1781.91 | W. Herschel | 3°.47 | — | — | — |
| 1826.22 | Σ | 57.63 | 4 | 1".144 | 4 |
| 28.80 | Σ | 39.38 | 2 | 1.044 | 2 |
| 30 39 | J. Herschel | 35.35 | 2 | — | — |
| 31.14 | J. Herschel | 31.57 | 2 | — | — |
| 31.28 | Σ | 30.73 | 4 | 1.052 | 4 |
| 31.30 | D | 30.87 | 2 | 1.034 | 2 |
| 32.12 | J. Herschel | 32.12 | 2 | — | — |
| 32.12 | D | 27.09 | 4 | — | — |
| 32.19 | Bessel | 31 33 | 4 | 1.205 | 4 |
| 32.28 | Σ | 28.45 | 4 | 1.154 | 4 |
| 33.14 | J. Herschel | 26.40 | 2 | — | — |
| 33.21 | D | 26.32 | 4 | 1.154 | 4 |
| 33.27 | Σ | 23.03 | 4 | 1.151 | 4 |
| 35.31 | Σ | 21.15 | 4 | 1.140 | 4 |
| 36.27 | Σ | 16.30 | 4 | 1.201 | 4 |
| 36.97 | D | 16.86 | 4 | — | — |
| 37.23 | D | 12.49 | 2 | — | — |
| 38.30 | D | 11.34 | 2 | — | — |
| 40.15 | Kaiser | 6.13 | 2 | 1.246 | 2 |
| 40.20 | D | 5.62 | 4 | 1.140 | 4 |
| 40.30 | O. Σ | 4.73 | 4 | — | — |
| 41.16 | D | 2.13 | 4 | 1.123 | 4 |
| 41.31 | M | 359.00 | 2 | 1.101 | 2 |
| 42.21 | M | 356.66 | 2 | 1.121 | 2 |
| 42.22 | D | 357.52 | 4 | 1.134 | 4 |
| 42.29 | O. Σ | 356.78 | 4 | — | — |
| 42.89 | Kaiser | 359.90 | 2 | — | — |
| 43.12 | Kaiser | — | — | 1.270 | 2 |
| 43.18 | D | 356.31 | 4 | 1.062 | 4 |
| 43.19 | M | 354.92 | 2 | 1 116 | 2 |
| 43.30 | O. Σ | 356.36 | 4 | 1.255 | 4 |
| 44.28 | O. Σ | 352.54 | 4 | 1.232 | 4 |
| 44.39 | M | 352.41 | 2 | 1.073 | 2 |
| 45.31 | O. Σ | 350.17 | 4 | 1.058 | 4 |
| 45.95 | Hind | 348.95 | 1 | — | — |
| 46.04 | Jacob | 346.50 | 1 | 1.200 | 1 |
| 46.29 | O. Σ | 346.97 | 4 | 1.062 | 4 |
| 47.08 | Hind | 341.95 | 2 | — | — |
| 47.29 | M | 341.02 | 1 | 1.077 | 1 |
| 47.33 | O. Σ | 343.90 | 4 | 1.053 | 4 |

| Jahr | Beobachter | Positions-winkel | Gewicht | Distanz | Gewicht |
|---|---|---|---|---|---|
| 1848.23 | D | 338°82 | 4 | 1″060 | 4 |
| 48.29 | M | 338.17 | 2 | 1.084 | 2 |
| 48.30 | O. Σ | 339.63 | 4 | 1.002 | 4 |
| 49.24 | D | 334.86 | 4 | 1.117 | 4 |
| 49.32 | O. Σ | 335.11 | 4 | 0.892 | 4 |
| 50.29 | O. Σ | 331.74 | 4 | 1.032 | 4 |
| 50.72 | M | 328.06 | 1 | 1.083 | 1 |
| 51.18 | Fletcher | 333.50 | 2 | — | — |
| 51.22 | M | 327.04 | 2 | 1.056 | 2 |
| 51.25 | D | 328.55 | 4 | 1.006 | 4 |
| 51.28 | O. Σ | 325.94 | 4 | 1.110 | 4 |
| 52.16 | Fletcher | 329.02 | 1 | — | — |
| 52.23 | D | 325.09 | 4 | 1.057 | 4 |
| 52.25 | M | 323.82 | 2 | 0.919 | 2 |
| 52.32 | O. Σ | 320.97 | 2 | 0.975 | 2 |
| 53.20 | Jacob | 322.04 | 2 | 1.220 | 2 |
| 53.26 | M | 321.64 | 2 | 0.918 | 2 |
| 53.30 | Fletcher | 321.06 | 1 | — | — |
| 53.30 | O. Σ | 318.71 | 2 | 0.923 | 2 |
| 53.95 | Jacob | 317.24 | 1 | 1.150 | 1 |
| 54.20 | D | 315.96 | 4 | 0.969 | 4 |
| 54.28 | M | 316.68 | 2 | 0.932 | 2 |
| 54.29 | Wrottesley | 320.17 | 1 | 1.034 | 1 |
| 55.10 | Δ | 311.64 | 4 | — | — |
| 55.19 | S | 312.07 | 4 | 1.093 | 4 |
| 55.27 | M | 308.65 | 2 | 0.915 | 2 |
| 55.31 | O. Σ | 309.76 | 4 | 0.848 | 4 |
| 55.31 | Winnecke | — | — | 1.038 | 2 |
| 56.07 | Δ | 307.28 | 4 | — | — |
| 56.21 | Jacob | 306.34 | 2 | 1.210 | 2 |
| 56.23 | Winnecke | 308.64 | 2 | 1.001 | 2 |
| 56.24 | Wrottesley | 309.42 | 1 | 1.119 | 1 |
| 56 25 | S | 306.23 | 2 | 0.796 | 2 |
| 56.29 | M | 305.51 | 2 | 0.853 | 2 |
| 56.93 | Δ | 299.55 | 4 | — | — |
| 57.27 | O. Σ | 300.02 | 4 | 0.941 | 4 |
| 57.30 | M | 302.54 | 2 | 0.819 | 2 |
| 57.90 | Jacob | 299.72 | 2 | 1.140 | 2 |
| 58.18 | Δ | 297.21 | 4 | — | — |
| 58.21 | M | 295.59 | 2 | 0.945 | — |
| 58.28 | O. Σ | 297.27 | 2 | 0.920 | 2 |
| 59 26 | M | 292.95 | 2 | 0.832 | 2 |
| 59.30 | O. Σ | 288.42 | 2 | 0.846 | 2 |
| 60.27 | Pulkowa | 283.05 | 2 | — | — |
| 60.27 | O. Σ | 283.04 | 2 | 0.780 | 2 |
| 60.29 | M | 283.98 | 2 | 0.872 | 2 |

| Jahr | Beobachter | Positions-winkel | Gewicht | Distanz | Gewicht |
|---|---|---|---|---|---|
| 1861.25 | M | 280°.21 | 2 | 0″.823 | 2 |
| 61.27 | O. Σ | 276.70 | 4 | 0.795 | 4 |
| 62.31 | M | 272.44 | 2 | 0.822 | 2 |
| 62.31 | O. Σ | 268.07 | 2 | 0.645 | 2 |
| 63.13 | Δ | 263.17 | 4 | 0.737 | 4 |
| 63.13 | Knott | 268.12 | 1 | 0.659 | 1 |
| 63.25 | Romberg | 267.28 | 1 | 0.955 | 1 |
| 64.15 | Δ | 255.08 | 4 | 0.550 | 2 |
| 64.30 | O. Σ | 253.03 | 2 | 0.623 | 2 |
| 65.21 | Δ | 245.79 | 4 | 0.50 | 2 |
| 65.23 | S | 244.93 | 2 | 0.667 | 2 |
| 65.36 | Knott | 241.71 | 2 | 0.638 | 2 |
| 65.88 | Engelmann | 238.65 | 2 | 0.699 | 2 |
| 66.19 | Δ | 238.45 | 4 | 0.520 | 2 |
| 66.27 | O. Σ | 237.38 | 2 | 0.602 | 2 |
| 66.29 | S | 234.25 | 2 | 0.426 | 2 |
| 66.38 | Barklay | 231.52 | 1 | 0.724 | 1 |
| 66.40 | Knott | 232.50 | 2 | 0.758 | 2 |
| 67.22 | Δ | 224.46 | 4 | — | — |
| 68.20 | Δ | 210.94 | 4 | 0.500 | 2 |
| 68.28 | O. Σ | 214.36 | 2 | 0.626 | 2 |
| 69.32 | O. Σ | 198.18 | 2 | 0.547 | 2 |
| 69.37 | Du | 200.21 | 4 | 0.496 | 4 |
| 70.15 | Δ | 187.33 | 4 | — | — |
| 70.28 | O. Σ | 186.10 | 4 | 0.572 | 4 |
| 70.30 | Du | 184.83 | 4 | 0.441 | 4 |
| 70.56 | Gledhill | 181.05 | 1 | — | — |
| 71.15 | Δ | 175.53 | 4 | — | — |
| 71.27 | Gledhill | 175.10 | 1 | — | — |
| 71.29 | Du | 174.76 | 4 | 0.567 | 4 |
| 71.30 | Scharnhorst | 169.40 | 1 | — | — |
| 71.31 | O. Σ | 170.48 | 4 | 0.547 | 4 |
| 72.05 | Gledhill | 166.75 | 1 | — | — |
| 72.12 | Knott | 166.73 | 1 | — | — |
| 72.21 | Wilson | 167.80 | 2 | — | — |
| 72.23 | Δ | 162.89 | 4 | — | — |
| 72.31 | O. Σ | 162.08 | 4 | 0.551 | 4 |
| 72.33 | Du | 159.86 | 4 | 0.704 | 4 |
| 73.19 | Δ | 150.22 | 4 | — | |
| 73.28 | O. Σ | 151.53 | 4 | 0.561 | 4 |
| 74.07 | Gledhill | 141.43 | 2 | — | — |
| 74.09 | Δ | 141.64 | 4 | 0.638 | 2 |
| 74.17 | Wilson | 141.33 | 2 | 0.670 | 2 |
| 74.28 | O. Σ | 140.54 | 4 | 0.597 | 4 |
| 74.29 | Du | 139.36 | 2 | 0.629 | 2 |

| Jahr | Beobachter | Positions-winkel | Gewicht | Distanz | Gewicht |
|---|---|---|---|---|---|
| | | ° | | " | |
| 1875.14 | Δ | 130.11 | 4 | 0.640 | 4 |
| 75.26 | Sp | 129.32 | 4 | 0.540 | 4 |
| 75.28 | O. Σ | 131.07 | 4 | 0.617 | 4 |
| 75.29 | Seabroke | 133.35 | 1 | 0.775 | 1 |
| 75.33 | Du | 126.02 | 4 | 0.602 | 4 |
| 76.14 | Δ | 119.41 | 4 | 0.621 | 4 |
| 76.29 | O. Σ | 118.05 | 4 | 0.660 | 4 |
| 76.34 | Du | 114.56 | 2 | 0.834 | 2 |
| 77.17 | Δ | 108.74 | 4 | 0.580 | 4 |
| 77.23 | Sp | 108.35 | 4 | 0.646 | 4 |
| 77.27 | O. Σ | 109.37 | 4 | 0.720 | 4 |
| 78.18 | Δ | 100.38 | 4 | 0.561 | 4 |
| 78.26 | Jedrzejewicz | 100.84 | 2 | 0.700 | 2 |
| 78.27 | Wilson & Seab. | 102.95 | 1 | 0.865 | 1 |
| 78.27 | Du | 103.06 | 2 | 0.714 | 2 |
| 78 29 | O. Σ | 100.67 | 4 | 0.730 | 4 |
| 79.27 | Sp | 93.52 | 4 | 0.726 | 4 |
| 79.28 | Seabr. | 96.02 | 2 | 0.858 | 2 |
| 79.29 | O. Σ | 93.33 | 4 | 0.737 | 4 |
| 80.22 | Verschiedene [1]) | 89.80 | 2 | 0.767 | 2 |
| 80.23 | Gledhill | 89.47 | 2 | 0.767 | 2 |
| 80.29 | Burnham | 85.20 | 2 | 0.730 | 2 |
| 80.32 | Seabr. | 86.83 | 2 | 0.775 | 2 |
| 81.24 | Jedrz. | 81.10 | 2 | 0.910 | 2 |
| 81.26 | Seabr. | 79.70 | 1 | 0.950 | 1 |
| 81.30 | Sp | 80.66 | 4 | 0.779 | 4 |
| 82.22 | Engelm. | 76.18 | 2 | 1.051 | 2 |
| 82.25 | Sp | 75.52 | 4 | 0.838 | 4 |
| 82.26 | Seabr. | 76.23 | 2 | 1.060 | 2 |
| 82.27 | Jedrz. | 75.02 | 2 | 0.940 | 2 |
| 83.24 | Engelm. | 72.45 | 2 | 1.047 | 2 |
| 83.29 | Sp | 69.75 | 4 | 0.860 | 4 |
| 83.34 | Küstner | 68.96 | 2 | 0.900 | 2 |
| 83.35 | Seabr. | 69.68 | 2 | 1.020 | 2 |
| 84.19 | Perrotin | 62.67 | 2 | 1.060 | 2 |
| 84.25 | Sp | 64.33 | 4 | 0.834 | 4 |
| 84.28 | Engelm. | 67.02 | 2 | 0.938 | 2 |
| 85.29 | Engelm. | 59.42 | 2 | 1.050 | 2 |
| 85.29 | Sp | 58.43 | 4 | 0.900 | 4 |
| 86.29 | Jedrz. | 51.22 | 2 | 0.980 | 2 |
| 86.30 | Engelm. | 56.28 | 2 | 1.076 | 2 |
| 87.25 | Sp | 48.83 | 4 | 0.829 | 4 |
| 88.27 | Sp | 44.14 | 4 | 0.897 | 4 |

1) Dieses Mittel, aus I pg. 49 entnommen, ist, wie ich nachträglich ersehe, apokryph. Es dürfte nicht unabhängig von den andern Mitteln desselben Jahres sein.

Die vorstehenden Beobachtungen wurden nach Massgabe der abtheilenden Zwischenräume und mit Berücksichtigung der Gewichte in folgende Jahresmittel vereinigt. Ich habe hierbei die für die Positionswinkel geltenden Epochen auch für die Distanzen angenommen. Eine erhebliche Ungenauigkeit kann dadurch nirgends entstehen.

| | | | | | $R$ | | $B-R$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $p$ | $g$ | $\varrho$ | $g$ | $p$ | $\varrho$ | | |
| | ° | | ″ | | ° | ″ | ° | ″ |
| 1781.91 | 3.5 | — | — | — | 1.5 | — | + 2.0 | — |
| 1826.22 | 57.63 | 4 | 1.144 | 4 | 49.93 | 0.994 | + 7.70 | + 0.155 |
| 1828.80 | 39.38 | 2 | 1.044 | 2 | 40.38 | 1.063 | — 1.00 | — 0.019 |
| 30.39 | 35.35 | 2 | — | — | 35.00 | — | + 0.35 | — |
| 31.25 | 30.98 | 8 | 1.046 | 6 | 32.20 | 1.013 | — 1.22 | + 0.033 |
| 32.19 | 29.41 | 14 | 1.180 | 8 | 29.23 | 1.127 | + 0.18 | + 0.053 |
| 33.22 | 25.02 | 10 | 1.153 | 8 | 26.09 | 1.139 | — 1.07 | + 0.014 |
| 35.31 | 21.15 | 4 | 1.140 | 4 | 19.75 | 1.158 | + 1.40 | — 0.018 |
| 36.62 | 16.58 | 8 | 1.201 | 4 | 15.87 | 1.165 | + 0.71 | + 0.036 |
| 37.23 | 12.49 | 2 | — | — | 14.07 | — | — 1.58 | — |
| 38.30 | 11.34 | 2 | — | — | 10.90 | — | + 0.43 | — |
| 40.23 | 5.57 | 10 | 1.175 | 6 | 5.18 | 1.163 | + 0.39 | + 0.012 |
| 41.21 | 1.09 | 6 | 1.116 | 6 | 2.24 | 1.158 | — 1.15 | — 0.042 |
| 42.35 | 357.53 | 12 | 1.128 | 6 | 358.77 | 1.150 | — 1.24 | — 0.022 |
| 43.23 | 355.99 | 10 | 1.170 | 12 | 356.04 | 1.142 | — 0.05 | + 0.028 |
| 44.32 | 352.50 | 6 | 1.179 | 6 | 352.61 | 1.132 | — 0.11 | + 0.047 |
| 45.44 | 349.93 | 5 | 1.058 | 4 | 349.01 | 1.120 | + 0.92 | — 0.062 |
| 46.24 | 346.88 | 5 | 1.090 | 5 | 346.38 | 1.110 | + 0.50 | — 0.020 |
| 47.25 | 342.93 | 7 | 1.058 | 5 | 342.97 | 1.096 | — 0.04 | — 0.038 |
| 48.27 | 339.01 | 10 | 1.050 | 10 | 339.43 | 1.079 | — 0.42 | — 0.029 |
| 49.28 | 334.99 | 8 | 1.005 | 8 | 335.80 | 1.061 | — 0.81 | — 0.056 |
| 50.30 | 331.00 | 5 | 1.042 | 5 | 331.71 | 1.040 | — 0.71 | + 0.002 |
| 51.24 | 328.25 | 12 | 1.058 | 10 | 328.39 | 1.023 | — 0.14 | + 0.035 |
| 52.24 | 324.32 | 9 | 1.002 | 8 | 324.37 | 1.003 | — 0.05 | — 0.001 |
| 53.26 | 320.83 | 7 | 1.020 | 6 | 320.10 | 0.979 | + 0.73 | + 0.046 |
| 54.20 | 316.83 | 8 | 0.991 | 8 | 316.00 | 0.958 | + 0.83 | + 0.032 |
| 55.21 | 310.80 | 16 | 0.973 | 12 | 311.37 | 0.933 | — 0.57 | + 0.040 |
| 56.19 | 307.08 | 13 | 0.982 | 9 | 306.62 | 0.908 | + 0.46 | + 0.074 |
| 57.14 | 300.30 | 10 | 0.900 | 6 | 301.76 | 0.883 | — 1.46 | + 0.017 |
| 58.15 | 297.40 | 10 | 1.002 | 6 | 296.28 | 0.856 | + 1.12 | + 0.146 |
| 59.28 | 290.69 | 4 | 0.839 | 4 | 289.75 | 0.826 | + 0.94 | + 0.013 |
| 60.28 | 283.36 | 6 | 0.826 | 4 | 283.55 | 0.796 | — 0.19 | + 0.030 |
| 61.26 | 277.87 | 6 | 0.804 | 6 | 277.01 | 0.768 | + 0.86 | + 0.036 |
| 62.31 | 270.26 | 4 | 0.734 | 4 | 269.47 | 0.735 | + 0.79 | — 0.001 |
| 63.15 | 264.68 | 6 | 0.760 | 6 | 262.98 | 0.709 | + 1.70 | + 0.051 |
| 64.20 | 254.40 | 6 | 0.587 | 6 | 254.29 | 0.678 | + 0.11 | — 0.091 |

| | | | | | R | | B—R | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | p | g | ϱ | g | p | ϱ | | |
| | ° | | ″ | | ° | ″ | ° | ″ |
| 1865.38 | 243.37 | 10 | 0.626 | 8 | 243.52 | 0.644 | — 0.15 | — 0.018 |
| 66.28 | 235.75 | 11 | 0.593 | 9 | 234.56 | 0.620 | + 1.19 | — 0.027 |
| 67.22 | 224.46 | 4 | — | — | 224.47 | — | — 0.01 | — |
| 68.23 | 212.08 | 6 | 0.563 | 4 | 212.82 | 0.580 | — 0.74 | — 0.017 |
| 69.35 | 199.53 | 6 | 0.513 | 6 | 199.07 | 0.567 | + 0.46 | — 0.054 |
| 70.27 | 185.70 | 13 | 0.507 | 8 | 187.35 | 0.562 | — 1.65 | — 0.055 |
| 71.26 | 173.40 | 14 | 0.557 | 8 | 174.59 | 0.563 | — 1.19 | — 0.006 |
| 72.25 | 163.03 | 16 | 0.627 | 8 | 162.05 | 0.571 | + 0.78 | + 0.056 |
| 73.24 | 150.88 | 8 | 0.561 | 4 | 150.00 | 0.586 | + 0.88 | — 0.025 |
| 74.18 | 140.93 | 14 | 0.626 | 10 | 139.27 | 0.606 | + 1.66 | + 0.020 |
| 75.25 | 129.38 | 17 | 0.604 | 17 | 127.95 | 0.631 | + 1.43 | — 0.027 |
| 76.24 | 117.90 | 10 | 0.679 | 10 | 118.32 | 0.659 | — 0.42 | + 0.020 |
| 77.22 | 108.82 | 12 | 0.649 | 12 | 109.67 | 0.687 | — 0.85 | — 0.038 |
| 78.25 | 101.15 | 13 | 0.696 | 13 | 101.38 | 0.718 | — 0.23 | — 0.022 |
| 79.28 | 93.94 | 10 | 0.757 | 10 | 93.76 | 0.750 | + 0.18 | + 0.007 |
| 80.27 | 87.83 | 8 | 0.755 | 8 | 87.01 | 0.780 | + 0.82 | — 0.025 |
| 81.28 | 80.65 | 7 | 0.841 | 7 | 80.69 | 0.810 | — 0.04 | + 0.031 |
| 82.25 | 75.69 | 10 | 0.945 | 10 | 75.01 | 0.836 | + 0.68 | + 0.109 |
| 83.30 | 70.12 | 10 | 0.937 | 10 | 69.28 | 0.865 | + 0.84 | + 0.072 |
| 84.24 | 64.59 | 8 | 0.917 | 8 | 64.46 | 0.889 | + 0.13 | + 0.028 |
| 85.29 | 58.76 | 6 | 0.950 | 6 | 59.38 | 0.913 | — 0.62 | + 0.037 |
| 86.29 | 53.75 | 4 | 1.028 | 4 | 54.77 | 0.936 | — 1.02 | + 0.092 |
| 87.25 | 48.83 | 4 | 0.829 | 4 | 50.55 | 0.955 | — 1.72 | — 0.126 |
| 88.27 | 44.14 | 4 | 0.897 | 4 | 46.28 | 0.975 | — 2.14 | — 0.078 |

Die angeführten Jahresmittel wurden, wie durch die abtheilenden Zwischenräume angegeben ist, in Normalörter zusammengefasst. Diese Normalörter sind pg. 36 angeführt. Hierbei war es, um stets dasselbe Zehntel des Jahres in den Zeitangaben zu haben, nöthig eine kleine Reduction mit Hülfe von Näherungselementen auszuführen. Dazu wurden bis zum Jahre 1879 die Elemente VIII, von da ab die Elemente $IV_a$ benutzt. Beide zeigen innerhalb der Zeiten, während welcher sie angewendet worden sind, einen genügenden Anschluss an die Beobachtungen. Im Uebrigen muss daran festgehalten werden, dass bei den Positionswinkeln sowohl als auch bei den Distanzen die Rechnung einige Einheiten der letzten Decimale nicht verbürgen will. Wollte man dies erreichen, was bei dem Grade der Genauigkeit der vorliegenden Beobachtungen wohl als nutzlos bezeichnet werden darf, so hätten auch die Zeitangaben genauer gemacht werden müssen.

In der letzten Zusammenstellung sind unter *R* die Werthe, welche

aus den Elementen IX folgen, angegeben und daneben die Fehler, welche letztere in beiden Coordinaten übrig lassen. Eine Betrachtung dieser Fehlerreihe lehrt nun, dass die Darstellung eine durchaus befriedigende ist. Wir haben in Positionswinkel 29 positive und 30 negative Fehler, welche so angeordnet sind, dass sie 29 Zeichenwechsel bilden. In Distanz sind diese 3 entsprechenden Zahlen 29, 26, 23. Das ist aber ein Resultat, welches bei Berücksichtigung dessen, was oben über die persönlichen Fehler gesagt worden ist, als sehr günstig bezeichnet werden muss. Es muss hiebei noch einmal daran erinnert werden, dass die letzten Jahresmittel wenig sicher sind und demzufolge aus den hier auftretenden Fehlern, welche allerdings einen systematischen Character zeigen, vorderhand keine weiteren Schlüsse gezogen werden können.

Es erübrigt nur noch, über die beiden ersten Jahresmittel in obiger Zusammenstellung einige Bemerkungen zu machen.

In meiner früheren Arbeit habe ich bereits nachgewiesen, dass die W. Struve'schen Beobachtungen vom Jahre 1826 einen sehr grossen Fehler im Positionswinkel enthalten. Ich habe dort diese Annahme auf verschiedenen Wegen zu beweisen gesucht und dieser Nachweis war mit nicht geringer Mühe verbunden, weil stets alle Ausgleichungen auf zweierlei Weise, nämlich mit Hinzuziehung und mit Hinweglassung der fraglichen Beobachtung, ausgeführt werden mussten. Die Unvereinbarkeit derselben mit den späteren Messungen hat sich aber stets mit grosser Sicherheit herausgestellt. Einige Vorsicht war in dieser Beziehung nöthig, weil damals über einen ganzen Umlauf der beiden Sterne A und B um einander noch nicht verfügt werden konnte und weil das angeführte Jahresmittel aus den gut mit einander stimmenden Beobachtungen von 3 Abenden zusammengesetzt ist. Aus diesen Gründen war die auf den Nachweis der Fehlerhaftigkeit der Beobachtung von 1826 verwendete Mühe und die mit demselben verbundene Weitläufigkeit erforderlich. In der vorliegenden Arbeit darauf zurückzukommen, scheint um so weniger nöthig, weil dieselbe auch in diesem Punkte die früher erlangten Resultate vollkommen bestätigt. Die Rechnung wurde mit Ausschluss der genannten Beobachtung ausgeführt und der übrig bleibende Fehler von beinahe 8 Grad zeigt jetzt, nachdem beinahe ein voller Umlauf von der verwendeten Beobachtung erfüllt wird, mit absoluter Sicherheit an, dass

jene Struve'sche Beobachtung durch irgend welche unbekannte Fehler stark entstellt ist.

Die zweite Bemerkung, die ich zu machen habe, bezieht sich auf die W. Herschel'sche Angabe vom Jahre 1781. Ich habe früher (I pg. 47) diese Beobachtung ganz unberücksichtigt gelassen und dies auch bei den vorliegenden Untersuchungen gethan, indem ich die a. a. O. für dieses Verfahren namhaft gemachten Gründe auch jetzt noch für durchaus stichhaltig ansehe. Indessen ist nicht zu leugnen, dass es nicht ohne Interesse ist nachzusehen, wie jene frühe und dadurch immerhin werthvolle Angabe mit den Resultaten der vorliegenden Untersuchung stimmt. Nach meiner Meinung liegt die Sache so. Giebt die Theorie einen erträglichen Fehler d. i. einen solchen von wenigen Graden, so ist diese Uebereinstimmung immerhin als sehr werthvoller Massstab für die Zuverlässigkeit der ausgeführten Rechnungen anzusehen. Im andern Falle hätte man zu untersuchen bezw. zu erklären, wie sich die Abweichung beheben lässt. Hierbei wird man wohl im Auge behalten müssen, dass die Herschel'sche Angabe nur auf einem Abend beruht und also allerdings von nicht unbedeutenden zufälligen Fehlern beeinflusst sein kann. Glücklicherweise ist aber auf diesen Punkt näher einzugehen im vorliegenden Falle unnöthig, denn die Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung ist, wie die obigen Zahlen ergeben, eine ausgezeichnete. Sie ist eine so gute, dass wohl zufällige Umstände zu einer solchen nahen Uebereinstimmung geführt haben. Es ist nicht uninteressant zu erwähnen, wie die in der früheren Abhandlung abgeleiteten rein elliptischen Elemente die Beobachtung von 1781 darstellen. Ich nehme die beiden Elementensysteme $IV_a$ und $IV_b$, welche den Beobachtungen von 1828 an beinahe vollkommen genügten. Eine einfache Rechnung ergiebt für den Positionswinkel für 1781.91 aus

Elementen $IV_a$: $355^\circ\!.6$
Elementen $IV_b$: 349.4
Beobachtung: $3^\circ\!.5$

während eine Vergleichung mit Elementen VIII, wegen des grösseren Rechenaufwandes, nicht ausgeführt worden ist. Dagegen habe ich die Mühe nicht gescheut, eine Vergleichung mit Elementen IX auszuführen,

gerade weil die eben angeführten Differenzen das Mass des Zulässigen wohl überschreiten dürften. Eine solche Vergleichung erfordert die Weiterführung der Störungsrechnungen auf pg. 34. Ich habe diese nach der oben aus einander gesetzten und angewandten Methode ausgeführt. Bei dem mässigen Grad von Genauigkeit, den ich dieser Vergleichung zu geben beabsichtigte, bin ich, um die Rechnung nicht gar zu weitläufig anzulegen, in Intervallen von 2 zu 2 Jahren vorwärts gegangen. Zu Grunde gelegt wurden auch für die Störungsrechnungen die Elemente IX, wodurch im Jahre 1826 eine kleine Unstetigkeit in dem Verlaufe der Störungswerthe eintritt, weil die früheren Rechnungen mit VIII geführt wurden. Diese Unstetigkeit ist übrigens in den Resultaten gar nicht zu merken.

Was die Methode, welche am besten anzuwenden ist, betrifft, so kann man zweifelhaft sein, ob im vorliegenden Falle nicht besser nach der Encke'schen Methode der speciellen Störungen zu rechnen wäre, weil hier die gestörten Coordinaten nicht durch die Beobachtung gegeben sind. In der That würde ich auch dieser Rechenvorschrift ohne Weiteres den Vorzug gegeben und dieselbe angewendet haben, wenn nicht die Elemente $IV_a$ die fragliche Herschel'sche Beobachtung näherungsweise darstellten und also die aus ihnen berechneten Coordinaten mit ausreichender Genauigkeit als die wahren betrachtet werden dürften. Ich habe deshalb diese Elemente zur Berechnung der Coordinaten $x$, $y$ benutzt, während im Uebrigen unter Zuhülfenahme der Elemente IX als osculirende Elemente die Rechnung ganz nach den oben gegebenen Vorschriften ausgeführt worden ist. Das Detail derselben hat in diesem Falle kein Interesse. Nur wird es für die Beurtheilung des stetigen Verlaufes der Zahlenreihe nicht unnütz sein, die aus der doppelten Integration hervorgegangenen Werthreihen der $\delta x$, $\delta y$ und $\delta z$ mitzutheilen.

| | $\delta x$ | $\delta y$ | $\delta z$ |
|---|---|---|---|
| 1780.2 | — 0.1282 | + 0.0265 | + 0.0239 |
| 82.2 | — 0.1368 | — 0.0332 | + 0.0266 |
| 84.2 | — 0.1457 | — 0.0907 | + 0.0288 |
| 86.2 | — 0.1543 | — 0.1429 | + 0.0312 |
| 88.2 | — 0.1622 | — 0,1872 | + 0.0336 |
| 90.2 | — 0.1686 | — 0.2219 | + 0.0357 |
| 92.2 | — 0.1730 | — 0.2462 | + 0.0376 |
| 94.2 | — 0.1749 | — 0.2604 | + 0.0390 |
| 96.2 | — 0.1739 | — 0.2656 | + 0.0400 |
| 98.2 | — 0.1700 | — 0.2633 | + 0.0403 |

| | $\delta x$ | $\delta y$ | $\delta z$ |
|---|---|---|---|
| 1800.2 | — 0.1635 | — 0.2550 | + 0.0401 |
| 2.2 | — 0.1548 | — 0.2436 | + 0.0394 |
| 4.2 | — 0.1446 | — 0.2292 | + 0.0384 |
| 6.2 | — 0.1338 | — 0.2136 | + 0.0372 |
| 8.2 | — 0.1229 | — 0.1969 | + 0.0358 |
| 10.2 | — 0.1122 | — 0.1793 | + 0.0343 |
| 12.2 | — 0.1016 | — 0.1608 | + 0.0327 |
| 14.2 | — 0.0912 | — 0.1514 | + 0.0309 |
| 16.2 | — 0.0805 | — 0.1210 | + 0.0288 |
| 18.2 | — 0.0690 | — 0.1004 | + 0.0264 |
| 20.2 | — 0.0569 | — 0.0802 | + 0.0236 |
| 22.2 | — 0.0446 | — 0.0613 | + 0.0202 |
| 24.2 | — 0.0327 | — 0,0450 | + 0.0166 |
| 26.2 | — 0.0224 | — 0.0320 | + 0.0128 |

Addirt man diese Correctionen zu den aus Elementen IX folgenden ungestörten Coordinatenwerthen $x_0$, $y_0$, setzt also, wie früher

$$\varrho \cos p = x_0 + \delta x \quad ; \quad \varrho \sin p = y_0 + \delta y$$

so ergeben sich die gestörten Positionswinkel und Distanzen $p$ und $\varrho$. Man findet nun leicht

| | $p$ |
|---|---|
| 1780.2 | 10°4 |
| 82.2 | 0.4 |
| 84.2 | 350.2 |
| 86.2 | 339.9 |

und hieraus mit Berücksichtigung der Correction wegen Praecession (— 0°34) für den scheinbaren Positionswinkel

$$1781.91 \qquad p = 1^\circ 5$$

welcher Werth in die Uebersicht (S. 50) aufgenommen worden ist.

Wie schon erwähnt, stimmt dieser Werth in ausgezeichneter Weise mit dem Beobachtungsresultat Herschel's überein. Man wird sich aber hüten müssen, aus dieser Uebereinstimmung mehr zu schliessen, als man berechtigt ist. Dieselbe giebt nur eine werthvolle Bestätigung der Richtigkeit dei Rechnung und der Angemessenheit und Zulässigkeit der gemachten Hypothesen. Dass das Verhältniss der Masse des dritten Sternes $C$ und der Summe der beiden ersten $A$ und $B$ sehr nahe richtig bestimmt erscheint oder dass die Annahme, die Bahn von $C$ um den Schwerpunkt von $A$, $B$ liege in der Projectionsebene, genau der Wahrheit entspräche, lässt sich natürlich nicht feststellen. Man wird nur sagen dürfen, dass diese Annahmen zu verlassen kein Grund vorliegt und dass die Unmöglichkeit

diese betreffenden Unbekannten aus den Beobachtungen sicher zu bestimmen gegenwärtig noch fortbesteht. Uebrigens war dies schon nach den Ergebnissen meiner früheren Arbeit vorauszusehen. Es wird noch eine einige Zeit vergehen, bis in dieser Beziehung eine gründliche Aenderung der Sachlage eintreten wird.

§ 4.

Zufolge der Resultate meiner früheren Untersuchungen und zufolge der oben (§ 2) gemachten Bemerkungen gehe ich ohne Weiteres dazu über, die Annahme zu verfolgen, der Stern $C$ bewege sich um einen als Schwerpunkt eines dynamischen Systemes aufzufassenden Punkt $S_2$, welcher wiederum in Folge der anziehenden Wirkungen sich um den Schwerpunkt von $A$ und $B$ bewegt. Wir haben oben (§ 2) gesehen, dass es bei dem Genauigkeitsgrad, der den Messungen zugeschrieben werden kann, voraussichtlich ausreichend sein wird, sowohl die Bewegung von $C$ um $S_2$, als auch die des Punktes $S_2$ um den Schwerpunkt von $A$ und $B$ als nach den Keplerschen Gesetzen vor sich gehend anzunehmen.

Zunächst soll die einfache Annahme, die ich in I allein verfolgt habe, gemacht werden, nämlich, dass sich die Projection von $C$ um diejenige von $S_2$ in einem Kreise mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt. Bezeichnet $a$ den Radius dieses Kreises, $p$ und $\varrho$ den (beobachteten) Positionswinkel und Distanz des Sternes in Bezug auf den Schwerpunkt von $A$ und $B$, $p_0$ und $\varrho_0$ dieselben Grössen von $S_2$ und $c$ den Winkel, welchen $a$ mit der Richtung bildet, von welcher die Positionswinkel gezählt werden, so hat man

$$\varrho \cos(p - p_0) = \varrho_0 + a \cos(c - p_0)$$
$$\varrho \sin(p - p_0) = \qquad a \sin(c - p_0)$$

Hieraus ergiebt sich

$$\operatorname{tg}(p - p_0) = \frac{a \sin(c - p_0)}{\varrho_0 + a \cos(c - p_0)} \text{ und hieraus:}$$

$$p - p_0 = \frac{a}{\varrho_0} \sin(c - p_0) - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\varrho_0}\right)^2 \sin 2(c - p_0)$$

Da im vorliegenden Falle $\frac{a}{\varrho_0}$ ungefähr $= \frac{1}{23}$ ist, so folgt, dass be-

reits das zweite Glied ($<0^\circ\!.05$) zu vernachlässigen sein wird. Der Voraussetzung gemäss ändert sich $c$ der Zeit proportional. $p_0$ zeigt dasselbe Verhalten bis auf völlig belanglose Grössen. Man darf also setzen

$$c - p_0 = -nt + \varepsilon$$

Setzt man noch

$$a \cos \varepsilon = x \; ; \quad a \sin \varepsilon = y$$

so wird:

$$p = p_0 - \frac{x}{\varrho_0} \sin nt + \frac{y}{\varrho_0} \cos nt \tag{1}$$

Ferner hat man

$$\varrho^2 = \varrho_0^2 + a^2 + 2\, a\, \varrho_0 \cos (c - p_0)$$

und entwickelt

$$\varrho = \varrho_0 \left\{ 1 + \frac{a}{\varrho_0} \cos (nt - \varepsilon) + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\varrho_0}\right)^2 \sin^2 (nt - \varepsilon) + \cdots \right\}$$

Auch hier soll das quadratische Glied, welches im Maximum $0''\!.005$ werden kann, vernachlässigt werden. Dann hat man

$$\varrho = \varrho_0 + x \cos nt + y \sin nt \tag{2}$$

Es hat sich in I mit sehr grosser Sicherheit ergeben, dass $n$ einen positiven Werth ($= + 20^0$) hat. Dies bedeutet, dass die Bewegung von $C$ um $S_2$, dem gewöhnlichen Sprachgebrauche gemäss, gleichgerichtet ist, mit der Bewegung von $S_2$ um $A$.

Sowohl $p_0$ und $\varrho_0$ ändern sich nach den Kepler'schen Gesetzen mit der Zeit. Man kann vorderhand nicht daran denken, aus dem kurzen Bogen, über welchen sich die Beobachtungen erstrecken, etwa die elliptischen Bahnelemente abzuleiten. Wäre das möglich, so wäre das ganze Problem, die Bewegungen in dem Sternsystem $\zeta$ Cancri zu bestimmen, ausserordentlich vereinfacht, weil man dann sofort eine gute Bestimmung des Verhältnisses der Massenwerthe $m_3 : m_1 + m_2$ ausführen könnte. Man muss sich also vorderhand mit einer interpolatorischen Darstellung begnügen. Zuerst soll angesetzt werden

$$p_0 = \beta + \beta_1 t + \beta_2 t^2 \tag{3}$$

und hierbei zufolge der früheren Ermittelungen gleich angenommen

werden, dass der Quotient $\frac{\beta_2}{\beta_1}$ sehr klein sei. Der Ausdruck für die Distanz ist nun nicht mehr ganz willkürlich. Da nämlich die Gleichung

$$\varrho_0^2 \frac{d p_0}{d t} = \text{const.}$$

stattfinden muss, so ergiebt sich sofort, bei Vernachlässigung von $\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^2$

$$\varrho_0 = \alpha - \alpha \frac{\beta_2}{\beta_1} t \tag{4}$$

In I sind die Gleichungen (1) bis (3) benutzt worden. Dagegen habe ich für (4) ebenfalls einen in $t$ quadratischen Ausdruck angesetzt und seine Coëfficienten willkürlich gelassen. Es geschah dies, weil ich dort die Bewegung von $C$ um $S_2$ in Positionswinkel und Distanz unabhängig von einander beweisen wollte. Ich habe deshalb die aus dynamischen Verhältnissen hervorgehende Relation bei Seite gelassen, habe indessen versäumt, dieselbe nachträglich durch die gefundenen empirischen Formeln zu prüfen. Diese Prüfung fällt zwar nicht ganz befriedigend aus, die übrig bleibenden Fehler sind aber durchaus nicht bedeutend.

Bei der Anwendung der vorstehenden Gleichungen bin ich von der Ansicht ausgegangen, dass bei diesen vorläufigen Rechnungen eine Neubestimmung von $n$ nicht nöthig sei. Es wurde also wie früher $n = + 20^0$ angenommen. Alle übrigen Constanten sollten aber neu bestimmt werden. Verfügt man über Näherungswerthe und bezeichnet man durch ein vorgesetztes $\Delta$ die erforderliche Verbesserung, so giebt jeder Fehler in Positionswinkel und Distanz folgende Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \Delta p &= \Delta\beta + \Delta\beta_1 t + \Delta\beta_2 t^2 - \frac{\Delta x}{\varrho_0} \sin nt + \frac{\Delta y}{\varrho_0} \cos nt + \gamma \cdot f \\ \Delta\varrho &= \Delta\alpha\left(1 - \frac{\beta_2}{\beta_1} t\right) + \Delta\beta_1 \frac{\alpha\beta_2 t}{\beta_1^2} - \Delta\beta_2 \frac{\alpha}{\beta_1} t + \Delta x \cos nt + \Delta y \sin nt + \gamma \cdot f_1 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

indem $\gamma \cdot f$ bezw. $\gamma \cdot f_1$ die Aenderung bezeichnet, welche die beiden Coordinaten dadurch erfahren, dass man dieselben nicht (wie die Beobachtungen) auf die Mitte $\frac{A+B}{2}$, sondern einen anderen die Entfernung $AB$ in einem constanten Verhältnisse theilenden Punkt bezieht. Dieser Punkt wird

dann als mit dem Schwerpunkte von $A$ und $B$ zusammenfallend angesehen werden können. Die Zahlencoëfficienten sind so angesetzt worden, dass $f$ bezw. $f_1$ den Betrag bedeutet, welchen man zu den auf $\frac{A+B}{2}$ bezogenen $p$ und $\varrho$ addiren muss, um die auf $B$ bezogenen Coordinaten zu erhalten. Im Uebrigen verweise ich in Bezug auf diesen Punkt auf die Abhandlung I.

Liegen eine Reihe von $\Delta p$ und $\Delta \varrho$ vor, so wird man aus ihnen die 7 Unbekannten

$$\Delta\alpha\,,\ \Delta\beta\,,\ \Delta\beta_1\,,\ \Delta\beta_2\,,\ \Delta x\,,\ \Delta y\,,\ \gamma$$

nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmen, indem man

$$(\varrho \Delta p)^2 + (\Delta \varrho)^2$$

zu einem Minimum macht.

Der ersten Ausgleichung lege ich folgende Positionswinkel ($p$ in der Tabelle) und Distanzen ($\varrho$) zu Grunde. Da ich auf die einzelnen Beobachter später eingehend zu sprechen komme und neue Normalörter bilden werde, ist es unnöthig auseinander zu setzen, wie ich dieselben gebildet habe. Dieselben sind aus den Daten in I hervorgegangen mit Hinzuziehung neuer Beobachtungen.

| | $p$ | $\varrho$ | $p_R$ | $\Delta p$ | $\Delta\varrho$ | IV | | $B$—IV | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ° | ″ | ° | ° | ″ | ° | ″ | ° | ″ |
| 1824.0 | 160.45 | 5.566 | 160.04 | + 0.41 | — 0.043 | 158.51 | 5.584 | + 1.94 | — 0.018 |
| 31.0 | 155.18 | 5.878 | 156.26 | — 1.08 | + 0.278 | 155.70 | 851 | — 0.52 | + 0.027 |
| 35.0 | 151.08 | 5.916 | 154.10 | — 3.02 | + 0.316 | 151.57 | 795 | — 0.49 | + 0.121 |
| 41.0 | 148.99 | 5.444 | 150.86 | — 1.87 | — 0.156 | 149.55 | 485 | — 0.56 | — 0.041 |
| 45.0 | 150.69 | 5.513 | 148.70 | + 1.99 | — 0.087 | 149.54 | 563 | + 1.15 | — 0.050 |
| 48.0 | 148.33 | 5.632 | 147.08 | + 1.25 | + 0.032 | 147.78 | 713 | + 0.55 | — 0.081 |
| 52.0 | 142.48 | 5.714 | 144.92 | — 2.44 | + 0.114 | 143.66 | 739 | — 1.18 | — 0.025 |
| 55.0 | 140.87 | 5.577 | 143.30 | — 2.43 | — 0.023 | 141.27 | 584 | — 0.40 | — 0.007 |
| 58.0 | 139.92 | 5.488 | 141.68 | — 1.76 | — 0.112 | 140.58 | 429 | — 0.66 | + 0.059 |
| 61.0 | 140.59 | 5.440 | 140.06 | + 0.53 | — 0.160 | 140.78 | 417 | — 0.20 | + 0.023 |
| 64.0 | 139.93 | 5.567 | 138.44 | + 1.49 | — 0.033 | 140.13 | 554 | — 0.20 | + 0.013 |
| 68.0 | 135.91 | 5.738 | 136.28 | — 0.37 | + 0.138 | 136.62 | 717 | — 0.71 | + 0.021 |
| 71.0 | 133.48 | 5.726 | 134.66 | — 1.18 | + 0.126 | 133.33 | 660 | + 0.15 | + 0.066 |
| 74.0 | 132.22 | 5.578 | 133.04 | — 0.82 | — 0.022 | 131.27 | 488 | + 0.95 | + 0.090 |
| 78.0 | 131.53 | 5.442 | 130.88 | + 0.65 | — 0.158 | 130.81 | 357 | + 0.72 | + 0.085 |
| 81.0 | 130.99 | 5.472 | 129.26 | + 1.73 | — 0.128 | 130.44 | 446 | + 0.55 | + 0.006 |
| 83.0 | 129.23 | 5.465 | 128.18 | + 1.05 | — 0.135 | 129.31 | 545 | — 0.08 | — 0.080 |
| 86.0 | 126.60 | 5.417 | 126.56 | + 0.04 | — 0.183 | 126.45 | 637 | + 0.15 | — 0.220 |

Als Näherungswerthe wurden angenommen:

$$n = 20^0$$
$$p_R = 146^0\!.00 - 0^0\!.540\,(t - 1850.0)$$
$$\varrho = \varrho_0 = 5''\!.600\,; \text{ also } \beta_2 = 0$$

Die Differenzen, welche diese Formeln zurücklassen, sind unter $\varDelta p$ und $\varDelta \varrho$ angeführt. Um die Bedingungsgleichungen in passender Form aufzustellen, sollen diejenigen Grössen, welche in Graden ausgedrückt werden, mit dem Index 0 und die, welche in Bogensecunden angegeben sind, mit $''$ versehen werden. Ist dann noch $\varepsilon^0 = 57.296$, so hat man zu setzen als neue Unbekannte:

$$\frac{\varepsilon \varDelta \alpha''}{10} = (1) \qquad \frac{x''\varepsilon^0}{10} = (5)$$
$$\varDelta\beta^0 = (2) \qquad \frac{y''\varepsilon^0}{10} = (6)$$
$$10\,\varDelta\beta_1^0 = (3) \qquad 10\gamma = (7)$$
$$400\,\varDelta\beta_2^0 = (4)$$

und die Gleichungen (5) werden:

$$\varrho \varDelta p = \varrho(2) + \left(\frac{t}{10}\right)\varrho(3) + \left(\frac{t}{20}\right)^2 \varrho\,(4) - 10\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)\sin nt(5)$$
$$+ 10\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)\cos nt(6) + \frac{f^0\varrho}{10}(7)$$

$$\varepsilon^0 \varDelta \varrho = 10\,(1) - \varepsilon^0\frac{\alpha}{\beta_1}\cdot\frac{t}{400}(4) + 10\cos nt(5) + 10\sin nt(6) + \frac{f_1''\varepsilon^0}{10}(7)$$

Dem obigen zufolge ist hier zu setzen:

$$\beta = 146.00\,,\quad \beta_1 = -0.540\,,\quad \alpha = 5.600$$

Ferner wurden die Factoren $f^0$ und $f_1''$ aus den betreffenden Angaben in I (pg. 56, 57) entnommen und die Zeit wurde von 1850.0 in Jahren gerechnet.

Die Bedingungsgleichungen sind, wenn die Logarithmen der Coëfficienten angegeben werden:

a) in Positionswinkel.

| (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.7455 | 1.1605 *n* | 0.9734 | 0.5314 | 0.9703 *n* | 0.4268 | = | 0.3583 |
| 0.7693 | 1.0480 *n* | 0.7247 | 0 5551 | 0.9940 | 0.4166 | | 0.8027 *n* |
| 0.7720 | 0.9481 *n* | 0.5222 | 0.9614 *n* | 0.7228 | 0.3890 | | 1.2520 *n* |
| 0.7359 | 0.6902 *n* | 0.0423 | — ∞ | 0.9877 *n* | 0.2370 | | 1.0078 *n* |
| 0.7414 | 0.4404 *n* | 9.5373 | 0.9866 | 0.2329 | 0.0424 | | 1.0402 |
| 0.7507 | 0.0517 *n* | 8.7507 | 0.8105 | 0.8867 | 9.8237 | | 0.8476 |
| 0.7569 | 0.0580 | 8.7569 | 0.8168 *n* | 0.8930 | 9.9874 *n* | | 1.1443 *n* |
| 0.7464 | 0.4454 | 9.5423 | 0.9916 *n* | 0.2379 *n* | 9.6156 *n* | | 1.1320 *n* |
| 0.7394 | 0.6425 | 9.9435 | 0.5253 *n* | 0.8642 *n* | 9.9923 *n* | | 0.9849 *n* |
| 0.7356 | 0.7770 | 0.2163 | 0.7955 | 0.8717 *n* | 0.1637 *n* | | 0.3599 |
| 0.7456 | 0.8918 | 0.4358 | 0.9908 | 0.2371 | 0.2370 *n* | | 0.9188 |
| 0.7588 | 1.0140 | 0.6672 | — ∞ | 1.0106 | 0.2136 *n* | | 0.3270 *n* |
| 0.7579 | 1.0801 | 0.8002 | 0.9472 *n* | 0.7086 | 9.7535 *n* | | 0.8297 *n* |
| 0.7465 | 1.1267 | 0.9048 | 0.9358 *n* | 0.6973 *n* | 9.4708 *n* | | 0.6603 *n* |
| 0.7358 | 1.1829 | 1.0280 | 0.5216 | 0.9606 *n* | 8.9788 | | 0.5487 |
| 0.7382 | 1.2295 | 1.1188 | 0.9833 | 0.2296 *n* | 0.2337 | | 0.9762 |
| 0.7376 | 1.2561 | 1.1726 | 0.9269 | 0.6884 | 0.3081 | | 0.7588 |
| 0.7338 | 1.2901 | 1.2443 | — ∞ | 0.9856 | 0.1067 | | 9.3358 |

b) in Distanz.

| (1) | (4) | (5) | (6) | (7) | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.0000 | 1.5868 *n* | 0.9730 *n* | 0.5341 *n* | 9.6875 | = | 0.2896 *n* |
| 1.0000 | 1.4506 *n* | 0.9730 *n* | 0.5341 *n* | 0.2084 | | 1.2022 |
| 1.0000 | 1.3478 *n* | 0.6990 | 0.9375 | 0.3168 | | 1.2578 |
| 1.0000 | 1.1261 *n* | 1.0000 *n* | — ∞ | 0.4357 | | 0.9512 *n* |
| 1.0000 | 0.8708 *n* | 0.2397 *n* | 0.9934 *n* | 0.4733 | | 0.6976 *n* |
| 1 0000 | 0.4729 *n* | 0.8843 | 0.8081 *n* | 0.4766 | | 0.2633 |
| 1.0000 | 0.4729 | 0.8843 | 0.8081 | 0.4571 | | 1.0885 |
| 1.0000 | 0.8708 | 0.2397 *n* | 0.9934 | 0.4238 | | 0.1199 *n* |
| 1.0000 | 1.0749 | 0.9730 *n* | 0.5341 | 0.3547 | | 0.8073 *n* |
| 1.0000 | 1.2132 | 0.8843 *n* | 0.8081 *n* | 0.2205 | | 0.9622 *n* |
| 1.0000 | 1.3180 | 1.2397 | 0.9934 *n* | 0.9195 | | 0.2766 *n* |
| 1.0000 | 1.4271 | 1.0000 | — ∞ | 0.4483 *n* | | 0.8980 |
| 1.0000 | 1.4941 | 0.6990 | 0.9375 | 0.0437 *n* | | 0.8585 |
| 1.0000 | 1.5521 | 0.6990 *n* | 0.9375 | 0.2220 *n* | | 0.1005 *n* |
| 1.0000 | 1.6190 | 0.9730 *n* | 0.5341 *n* | 0.2551 *n* | | 0.9568 *n* |
| 1.0000 | 1.6632 | 0.2397 | 0.9934 *n* | 0.1797 *n* | | 0.8653 *n* |
| 1.0000 | 1.6904 | 0.6990 | 0.9375 *n* | 0.1045 *n* | | 0.8885 *n* |
| 1.0000 | 1.7281 | 1.0000 | — ∞ | 9.9568 *n* | | 1.0206 *n* |

Die Normalgleichungen nach der Bedingung

$$(\varrho \Delta p)^2 + (\varepsilon^0 \Delta \varrho)^2 = \text{Min.}$$

aufgestellt, werden in logarithmischer Gestalt:

| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3.25527 | — | — | 3.36218 | 1.73191 | 2.19435 *n* | 2.16453 | = | 1.86183 *n* |
| — | 2.74999 | 2.66081 | 2.74559 | 1.85594 | 1.79699 | 1.71425 | | 2.31810 |
| — | 2.66081 | 3.34765 | 5.01379 | 2.22102 | 2.23561 | 1.81365 *n* | | 2.54176 |
| 3.36218 | 2.74559 | 3.01379 | 4.23260 *n* | 2.83913 | 2.56908 | 2.52012 *n* | | 3.30789 *n* |
| 1.73191 | 1.85594 | 2.22102 | 2.83913 | 3.25489 | 0.96848 *n* | 1.54370 | | 3.19673 |
| 2.19435 *n* | 1.79699 | 2.23561 | 2.56908 | 0.96848 *n* | 3.24636 | 1.28398 | | 2.57548 |
| 2.16453 | 1.71425 | 1.81365 *n* | 2.52012 *n* | 1.54370 | 1.28398 | 2.04493 | | 1.68547 |

und ihre Auflösung

(1) = + 0.2195 (3) = + 0.2489 (5) = + 0.9454 (7) = — 0.3703
(2) = — 0.4943 (4) = — 0.1886 (6) = + 0.1955

Nach den obigen Festsetzungen folgt hieraus:

$$\alpha'' = +\,0''.038 \qquad \Delta\beta_2^0 = -\,0^\circ.1886\left(\frac{1}{20}\right)^2 \qquad \gamma = -\,0.037$$

$$\Delta\beta^0 = -\,0^\circ.494 \qquad x'' = +\,0''.1650$$

$$\Delta\beta_1^0 = +\,0^\circ.0249 \qquad y'' = +\,0''.0341$$

Wir haben also jetzt folgende Formeln:

$$\left.\begin{aligned} p &= 145^\circ.506 - 0^\circ.5151\,t - 0^\circ.1886\left(\frac{t}{20}\right)^2 - 1^\circ.688\sin 20^0 t \\ &\qquad + 0^\circ.349\cos 20^0 t - 0.037\,f \\ \varrho &= 5''.638 - 0''.0489\left(\frac{t}{10}\right) + 0''.165\cos 20^0 t + 0''.0341\cos 20^0 t - 0.037\,f_1 \end{aligned}\right\}\text{(IV)}$$

In dieser Form erfüllt in der That der nicht periodische Theil der beiden Formeln sehr nahe die Gleichung $\frac{\varrho^2\,dp}{dt} = \text{Const.}$, nämlich so lange als

$$(1 + 0.00183\,t)\;(1 - 0.00087\,t)^2 = 1$$

und dies ist für die in Frage kommenden $t$ beinahe vollkommen der Fall.

Die Darstellung, welche die Beobachtungen durch IV erfahren, ist in der obigen Zusammenstellung (pg. 59) gegeben. Dort sind unter IV die aus der Formel folgenden Positionswinkel und Distanzen nebst den Differenzen $B$—IV angeführt. In der Hauptsache sind jetzt schon die auffallenden Abweichungen fortgeschafft. Indessen ist es doch wünschenswerth, einen besseren Anschluss zu erlangen. Jedenfalls müssen die Normalörter, welche bis jetzt in ziemlich provisorischer Gestalt vorlagen, mit grösserer Sorgfalt gebildet werden. Denn nur dann haben wir ein Recht, uns über die nicht wegzuschaffenden Differenzen zwischen Beobachtung und Theorie eine bestimmte Ansicht zu bilden.

Ich habe nun zunächst die persönlichen Fehler, mit denen die Beobachtungen des Sternes $C$, wie wir sehen werden, in hohem Grade behaftet sind, auf einem von dem der früheren Abhandlung verschiedenen Wege zu ermitteln gesucht. Ich habe nämlich nur nahezu gleichzeitige Messungen verschiedener Astronomen mit Hülfe der Formeln IV auf gleiche Zeit reducirt und dann verglichen. Bildet man dann ein gewisses Normalsystem dadurch, dass man die absoluten Correctionen so bestimmt,

dass sie im Mittel von sehr vielen Beobachtern nahe Null werden, so kann man allerdings völlig unabhängig von den theoretischen Resultaten die persönlichen Fehler bestimmen. Dieser Weg ist aber im vorliegenden Falle äusserst unsicher, weil, wie schon früher erwähnt, nahezu gleiche Beobachtungszeiten sehr sparsam vorkommen, die Verbindung der einzelnen Beobachter unter einander also nur lose ist. Ich führe deshalb die auf mühsamen und weitläufigen Rechnungen beruhenden Resultate nicht an, sondern lasse gleich die Normalörter, welche auf diese Weise gewonnen sind, folgen. Es wird dies um so mehr genügen, als ich weiter unten die Zusammenziehung des ganzen Beobachtungsmateriales ausführlich vornehmen werde und dabei auf die Besprechung der constanten Fehler zurückkommen muss.

Die weitere Rechnung wurde also auf folgende Normalörter gegründet, bei welchen Messungen aus den letzten Jahren berücksichtigt werden konnten, die mir erst nach Ableitung der Formel IV bekannt geworden sind.

| | $p$ | $\varrho$ | $\sqrt{g}$ | $M_E$ | $M_F$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1824.20 | 127°.00 + 32°.99 | 5″.317 | 3 | 352°.8 | 15°.1 |
| 31.20 | 28.38 | 5.731 | 4 | 216.5 | 231.9 |
| 35.20 | 24.39 | 5.658 | 4 | 160.4 | 150.1 |
| 41.20 | 22.66 | 5.290 | 4 | 25.6 | 27.3 |
| 45.20 | 23.53 | 5.406 | 5 | 324.1 | 305.5 |
| 48.20 | 20.82 | 5.467 | 5 | 296.1 | 244.1 |
| 52.20 | 15.82 | 5.596 | 4 | 141.8 | 162.3 |
| 55.20 | 13.26 | 5.437 | 5 | 87.4 | 100.9 |
| 58.20 | 12.88 | 5.310 | 5 | 44.5 | 39.4 |
| 61.20 | 13.81 | 5.388 | 5 | 327.1 | 338.0 |
| 64.20 | 12.82 | 5.416 | 4 | 306.8 | 276.6 |
| 68.20 | 8.90 | 5.537 | 4 | 166.1 | 194.8 |
| 71.20 | 6.58 | 5.549 | 6 | 130.6 | 133.4 |
| 74.20 | 4.94 | 5.434 | 6 | 71.7 | 72.0 |
| 78.20 | 4.33 | 5.307 | 7 | 6.5 | 350.2 |
| 81.20 | 4.20 | 5.520 | 5 | 261.7 | 288.8 |
| 84.20 | 1.81 | 5.647 | 5 | 206.3 | 227.4 |
| 87.20 | — 0.26 | 5.593 | 4 | 192.2 | 166.1 |

Die beigefügten abgerundeten Wurzeln aus den Gewichten geben zu erkennen, dass es keinen wesentlichen Einfluss auf die folgenden Resultate ausüben kann, wenn man sich der etwas vereinfachten Rechnung wegen erlaubt, von den Gewichten ganz abzusehen. Dies ist in der That im Folgenden geschehen.

Ich will nun zur Darstellung der obigen Normalörter einen viel allgemeineren Ansatz machen als es bisher geschehen ist. Offenbar liegt

hier ein ganz ähnliches Problem vor, wie bei der Bearbeitung der sogenannten veränderlichen Eigenbewegung des Sirius zu lösen war und wobei es sich darum handelte, aus der scheinbaren Bahn des Sirius am Himmel die Elemente seiner Revolutionsbewegung um den lichtschwachen Begleiter oder eigentlich um den Schwerpunkt zwischen beiden Körpern zu bestimmen. Ich werde hier eine Methode anwenden, welche auch bei jenen Untersuchungen mit Vortheil eintreten könnte und welche an die Vorschriften anknüpft, die man wohl als die einfachsten bei der Berechnung einer Doppelsternbahn aufstellen kann.

Die scheinbare Bahn des Sternes $C$ um den Schwerpunkt $S_2$ des dunklen Begleiters und $C$ ist eine Ellipse, welche die Projection von $S_2$ umschliesst. Nennt man $x$ und $y$ die Coordinaten der Projection von $C$ in Bezug auf ein beliebiges Coordinatensystem, dessen Anfang nur in grosser Nähe von $C$ liegen muss, damit $x$ und $y$ genügend klein seien und $\xi$, $\eta$ die Coordinaten des Punktes $S_2$, so lautet die Gleichung der genannten Ellipse:

$$\beta(x-\xi)^2+\gamma(y-\eta)^2+2\,\delta(x-\xi)(y-\eta)+2\,\varepsilon(x-\xi)+2\,\zeta(y-\eta)-1=0 \quad (6)$$

Die Grössen $x$ und $y$ sind durch die Beobachtungen direct gegeben, dagegen sind $\xi$ und $\eta$ nur näherungsweise bekannt. Hat man aber die Kenntniss solcher Näherungswerthe erlangt, so giebt jede Beobachtung von $C$ eine Gleichung von der Form (6) zur Bestimmung der Constanten $\beta$, $\gamma$ etc. Die so bestimmten Constanten werden nun wieder nur als Näherungswerthe zu betrachten sein. Jetzt kann aber aus dem ganzen verfügbaren Beobachtungsmateriale eine Verbesserung aller vorkommenden unbekannten Grössen leicht und unter Umständen auch sicher abgeleitet werden. Bezeichnet man die gesuchten Correctionen dadurch, dass man vor die zugehörige Grösse ein $\Delta$ setzt, so wird die zu erfüllende Bedingungsgleichung so geschrieben werden können.

Man setze

$$-2\,(\beta x' + \delta y' + \varepsilon) = A;\ \ x' = x - \xi$$
$$-2\,(\gamma y' + \delta x' + \zeta) = B;\ \ y' = y - \eta$$

dann wird

$$\Delta\beta\cdot x'^2+\Delta\gamma\cdot y'^2+\Delta\delta\cdot 2x'y'+\Delta\varepsilon\cdot 2x'+\Delta\zeta\cdot 2y'+\Delta\xi\cdot A+\Delta\eta\cdot B+n=0$$

worin $n$ die linke Seite von (6) ist, wenn hierin die Näherungswerthe

eingesetzt werden. Die Verbesserungen $\Delta\xi$ und $\Delta\eta$ hängen natürlich von so vielen Constanten ab, als in den Formeln enthalten sind, welche diese Grössen bestimmen. So wird z. B. im vorliegenden Falle, die Bewegung des Schwerpunktes $S_2$ durch

$$\xi = \varrho_0 \cos(\mu t + \nu)$$
$$\eta = \varrho_0 \sin(\mu t + \nu)$$

genügend genau bestimmt. Hier ist

$$\Delta\xi = \frac{\Delta\varrho_0}{\varrho_0}\xi - (\Delta\nu + t\Delta\mu)\eta$$

$$\Delta\eta = \frac{\Delta\varrho_0}{\varrho_0}\eta + (\Delta\nu + t\Delta\mu)\xi$$

also

$$\Delta\xi \cdot A + \Delta\eta \cdot B = \frac{\Delta\varrho_0}{\varrho_0}(A\xi + B\eta) + (\Delta\nu + t\Delta\mu)(B\xi - A\eta)$$

und das ganze Problem hängt von den 8 Constanten

$$\beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \zeta,\ \varrho_0,\ \mu,\ \nu$$

ab. In ferner Zukunft, wo es gelingen wird, für die Bewegung von $S_2$ eine Ellipse zu bestimmen, müssen natürlich die 7 Bestimmungsstücke dieser elliptischen Bewegung aufgenommen werden und man hat dann ein System von linearen Gleichungen mit 12 Unbekannten aufzulösen. Hierzu kommt noch eine Grösse, welche dem früheren $\gamma$ entspricht und angiebt um wieviel man sich von der Mitte $\frac{A+B}{2}$ nach $B$ (in Einheiten dieser Entfernung) entfernen muss, um den Punkt zu erhalten, um welchen die Kepler'sche Bewegung stattfindet, der also als der Schwerpunkt von $A$ und $B$ angesehen werden darf. Im Folgenden ist auf dieselbe keine Rücksicht genommen worden, weil sich oben bei Formel IV und auch früher schon in I herausgestellt hat, dass $\gamma$ sehr klein ist. Es kommt dies darauf hinaus, dass es bei der Betrachtung der Bewegung des Sternes $C$ erlaubt ist, die Massen der beiden Sterne $A$ und $B$ einander gleich zu setzen. Es wird nicht unwichtig sein zu bemerken, dass auch die Helligkeit der beiden Sterne nicht gerade gegen dieses Resultat spricht. Dass freilich, entsprechend einem negativen $\gamma$, der Stern $A$ heller als $B$ ist, muss als ein zufälliges Zusammentreffen bezeichnet werden.

Hat man auf solche Weise einmal genügend zuverlässige Werthe für die Constanten $\beta$, $\gamma$ etc. erhalten, so ist die Bestimmung der wirklichen Bahn von $C$ um $S_2$ durch folgende höchst einfache Formeln[1]) ausführbar. In der üblichen und auch bei allen Angaben dieser und der früheren Abhandlung gebrauchten Bezeichnungsweise erhält man folgende Rechenvorschrift. Man setze:

$$\mu = \gamma + \zeta^2$$
$$\nu = \beta + \varepsilon^2$$
$$\sigma = \delta + \zeta\varepsilon$$

dann ist

$$\operatorname{tg} 2\,\Omega = \frac{-2\sigma}{\mu - \nu}; \quad \cos 2\,\Omega \text{ hat das Zeichen von } \mu - \nu$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{p^2} &= \frac{\mu+\nu}{2} - \frac{\mu-\nu}{2}\cos 2\,\Omega + \sigma \sin 2\,\Omega \\
\operatorname{tg}^2 i &= (\mu + \nu)\,p^2 - 2 \\
\frac{e}{p}\sin\lambda &= (-\varepsilon \sin\Omega + \zeta\cos\Omega)\cos i \\
\frac{e}{p}\cos\lambda &= (\varepsilon\cos\Omega + \zeta\sin\Omega)
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Hiermit sind alle Elemente, welche sich auf Form und Lage der Ellipse beziehen, gegeben. Die Elemente, welche die Bewegung in der Ellipse bestimmen, berechnet man hierauf gesondert aus den vorhandenen Zeitangaben. Durch die rechtwinkeligen Coordinaten sind die Positionswinkel $p$ und Distanzen $\varrho$ gegeben, indem

$$x - \xi = \varrho \cos p$$
$$y - \eta = \varrho \sin p$$

Dann ist bekanntlich die mittlere Anomalie $M$ bestimmt durch die Gleichungen:

$$\operatorname{tg}(\lambda + v) = \sec i \cdot \operatorname{tg}(p - \Omega)$$
$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} E = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$
$$M = E - e \sin E$$

Jede vorliegende Zeitangabe $t$, für welche $p$ und $\varrho$ also auch $M$ gilt, giebt dann eine lineare Gleichung

$$M = nt - \varepsilon \quad (8)$$

1) Ueber die Ableitung derselben soll an einem andern Orte berichtet werden.

zur Bestimmung der mittleren Bewegung $n$ und der Perihelzeit $T$, indem $\varepsilon = nT$ gesetzt worden ist.

Zur Anwendung der vorstehenden Vorschriften[1]) auf die Bahn, welche $C$ um $S_2$ beschreibt, war es zunächst nöthig, zuverlässige Näherungswerthe für $\xi$ und $\eta$ zu beschaffen. Diese habe ich im Anschlusse an die mit den ersten Normalörtern geführten Rechnungen nach einigen Versuchen gefunden. Zunächst ist der leichteren Uebersicht wegen von allen Positionswinkeln 127°.00 abgezogen worden. Mit anderen Worten, die X-Axe unseres Coordinatensystems liegt in der Richtung des Positionswinkels 127°.0. Unter dieser Voraussetzung lauten die gefundenen Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= 5''.454 \cos\,[18^\circ.41 - 0^\circ.513\,(t - 1850.2)] \\ \eta &= 5''.454 \sin\,[18^\circ.41 - 0^\circ.513\,(t - 1850.2)] \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Es hat sich nämlich nach mannigfachen Versuchen herausgestellt, dass diese Ausdrücke, die selbstverständlich dem Flächensatze genügen, völlig ausreichen und dass es nicht nöthig ist, wie früher, in Positionswinkel ein mit $t^2$ und in Distanz ein dem entsprechendes mit $t$ proportionales Glied anzunehmen. Mit diesen Werthen für $\xi$ und $\eta$ werden nun die den 18 Normalörtern entsprechenden Bedingungsgleichungen, in denen die Coëfficienten logarithmisch angesetzt sind und bei denen alle Distanzen mit 10 multiplicirt wurden:

| $\beta$ | $\gamma$ | $\delta$ | $\varepsilon$ | $\zeta$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.5016 | 8.7861 | 9.9449 n | 0.5518 n | 9.6941 | = | 1 |
| 0.7372 | 0.3524 | 0.8458 | 0.6696 | 0.4772 | | 1 |
| 0.8149 | 9.6112 | 0.5141 n | 0.7085 | 0.1066 n | | 1 |
| 0.2781 | 9.9611 | 0.4206 | 0.4401 n | 0.2815 n | | 1 |
| 0.2665 | 0.6255 | 0.7470 n | 0.4343 n | 0.6137 | | 1 |
| 9.0425 | 0.2142 | 9.9293 n | 9.8222 n | 0.4081 | | 1 |
| 0.5056 | 0.0308 | 0.5692 n | 0.5538 | 0.3164 n | | 1 |
| 9.3072 | 0.7663 | 0.3378 n | 9.9546 | 0.6841 n | | 1 |
| 0.0711 | 0.4319 | 0.5525 | 0.3365 n | 0.5169 n | | 1 |
| 9.8777 | 9.8126 | 0.1461 n | 0.2398 n | 0.2073 | | 1 |
| 9.6716 | 0.2896 | 0.2817 n | 0.1368 n | 0.4458 | | 1 |
| 9.8700 | 8.2612 | 9.3666 n | 0.2360 | 9.4316 n | | 1 |
| 0.0567 | 9.9012 | 0.2799 n | 0.3293 | 0.2516 n | | 1 |
| 7.9365 | 0.0956 | 9.3171 | 9.2692 n | 0.3488 n | | 1 |
| 0.3433 | 8.3796 | 9.6625 n | 0.4727 n | 9.4908 | | 1 |
| 9.5015 | 0.4372 | 0.2704 | 0.0518 | 0.5196 | | 1 |
| 0.5632 | 9.8713 | 0.5183 | 0.5826 | 0.2367 | | 1 |
| 0.2866 | 8.9493 | 9.9190 | 0.4443 | 9.7757 | | 1 |

1) Will man ganz strenge im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate verfahren, so müssen, nachdem Näherungswerthe bekannt sind, die bekannten Differentialformeln in passender

Hieraus gehen als Normalgleichungen hervor:

$$
\begin{array}{rrrrrl}
+125.96\,\beta & +38.32\,\gamma & +\;9.58\,\delta & +\;61.29\,\varepsilon & +\;11.83\,\zeta & =+34.83 \\
+\;38.82 & +83.57 & -\;13.49 & +\;4.35 & -\;0.60 & =+27.36 \\
+\;9.58 & -13.49 & +155.27 & +\;23.65 & +\;8.70 & =-\;2.96 \\
+\;61.29 & +\;4.35 & +\;23.65 & +139.32 & -\;5.92 & =+\;7.72 \\
+\;11.83 & -\;0.60 & +\;8.70 & -\;5.92 & +109.41 & =+\;2.84
\end{array}
$$

Die Auflösung dieses Systemes ergiebt

$$
\begin{aligned}
\log\beta &= 9.3704 \\
\log\gamma &= 9.3431 \\
\log\delta &= 7.7994n \\
\log\varepsilon &= 8.7312n \\
\log\zeta &= 6.8777n
\end{aligned}
$$

Aus den Gleichungen (7) findet man nun leicht, wenn die Werthe für die linearen Strecken wieder durch 10 dividirt werden, um dieselben in Bogensecunden zu haben, die Elemente

$$
\left.
\begin{aligned}
\Omega &= 71.958 \\
\lambda &= 109.677 \\
i &= 17^\circ\!.352 \\
e &= 0.1106 \\
a &= 0''\!.217
\end{aligned}
\right\} \qquad (\mathrm{V_a})
$$

Wollte man $\Omega$ wieder von der gewöhnlichen Nullrichtung (Stundenkreis) an zählen, so müsste man $127^\circ\!.00$ hinzufügen. Die Bahn von $C$ um $S_2$ ist also wenig excentrisch und wenig gegen die Projectionsebene geneigt. Gleiches gilt für die Bahn von $B$ um $A$ und gleiches ist (wenn dieser Schluss gestattet ist) für die Bewegung des Schwerpunktes $S_2$ um den Schwerpunkt von $A$ und $B$ nicht unwahrscheinlich. Es scheinen sich also in dieser Beziehung die Verhältnisse bei $\zeta$ Cancri denjenigen zu nähern, welche in unserem Sonnensystem herrschen.

Jetzt hätte nun die oben auseinandergesetzte Methode der Verbesserung der Constanten eintreten sollen. Ich habe aber diese neue und etwas mühsamere Ausgleichung nicht ausgeführt, weil sich mir die Ueber-

Anordnung in Anwendung treten. Ich bezweifele aber, dass es nothwendig sein wird, diesen strengen Weg einzuschlagen und die oben gegebene einfachere Auflösung der vorliegenden Aufgabe zu verlassen.

zeugung aufdrängte, dass hierdurch ein engerer Anschluss an die Beobachtungen nicht zu erzielen sei. Ausserdem kommen wir durch die folgenden Rechnungen wieder auf dieselben Werthe der die Bewegung von $S_2$ bestimmenden Constanten zurück und diese sind es doch hauptsächlich, über deren Richtigkeit die neue Ausgleichung hätte Aufschluss geben können.

Bestimmt man nun aus den 18 Gleichungen (8) nach der Methode der kleinsten Quadrate, die hier nur als gutes Hülfsmittel ohne tiefere Bedeutung im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung auftritt, die Constanten $n$ und $\varepsilon$, so ergiebt sich folgende Formel:

$$M = 203^\circ\!.1 - 20^\circ\!.460\,(t - 1850.2) \qquad (\mathrm{V_b})$$

Man wird nicht erwarten können, dass diese Formel mit den aus den Elementen ($\mathrm{V_a}$) berechneten $M$ so gut übereinstimmt, wie bei gewöhnlichen Doppelsternbahnen. Man bedenke nur, aus welchen äusserst kleinen Aenderungen gemessener Grössen die Elemente ($\mathrm{V_a}$) abgeleitet werden mussten und wie die kleinen Beobachtungsfehler in so sehr vergrössertem Massstabe auf die Grösse $M$ übergehen. Es ist aber doch interessant, beide Werthreihen zu vergleichen. Ich habe deshalb in der obigen Zusammenstellung die aus den Elementen direct berechneten Werthe $M_E$ und die aus Formel ($\mathrm{V_b}$) folgenden $M_F$ neben einander gestellt. Mit Hülfe der durch ($\mathrm{V_a}$) und ($\mathrm{V_b}$) dargestellten Elemente ergiebt sich nun leicht die Distanz $\varrho$ und der Positionswinkel $p$ des Sternes $C$ von $\frac{A+B}{2}$ aus, aus den entsprechenden Grössen $\varrho_0$ und $p_0$ des Punktes $S_2$. Es ist nämlich, wenn man mit $r$ und $\pi$ Distanz und Positionswinkel von $C$ für ein in den Punkt $S_2$ gelegtes Coordinatensystem bezeichnet

$$\varrho_0 \sin(p_0 - p) = r \sin(p - \pi)$$
$$\varrho_0 \cos(p_0 - p) = \varrho - r\cos(p - \pi)$$

oder genügend genau:

$$p_0 - p = \Delta p = \frac{r}{\varrho_0}\sin(p - \pi)$$
$$\varrho_0 - \varrho = \Delta\varrho = -r\cos(p - \pi)$$

wobei noch bemerkt werden kann, dass nach (9)

$$\varrho_0 = 5''\!.454\,;\; p_0 = 18^\circ\!.41 - 0^\circ\!.513\,(t - 1850.2) \qquad (10)$$

Ich führe nun das Resultat dieser Rechnung an. Die berechneten Werthe sollen durch ein angehängtes $R$ bezeichnet werden.

| | $p_R$ | $\varrho_R$ | $B-R$ | |
|---|---|---|---|---|
| | ° | ″ | ° | ″ |
| 1824.20 | 32.10 | 5.268 | + 0.89 | + 0.049 |
| 31.20 | 28.86 | 676 | — 0.50 | + 0.055 |
| 35.20 | 24.31 | 604 | + 0.08 | + 0.054 |
| 41.20 | 22.55 | 266 | + 0.11 | + 0.024 |
| 45.20 | 23.08 | 442 | + 0.45 | — 0.036 |
| 48,20 | 20.83 | 639 | — 0.01 | — 0.172 |
| 52.20 | 16.19 | 653 | — 0.37 | — 0.057 |
| 55.20 | 13.55 | 482 | — 0.29 | — 0.045 |
| 58.20 | 13.07 | 295 | — 0.19 | + 0.015 |
| 61.20 | 14.00 | 309 | — 0.19 | + 0.079 |
| 64.20 | 13.41 | 515 | — 0.59 | — 0.099 |
| 68.20 | 9.40 | 685 | — 0.50 | — 0.148 |
| 71.20 | 5.98 | 614 | + 0.60 | — 0.065 |
| 74.20 | 3.92 | 411 | + 1.02 | + 0.023 |
| 78.20 | 4.52 | 275 | — 0.19 | + 0.032 |
| 81.20 | 4.71 | 438 | — 0 51 | + 0.084 |
| 84.20 | 2.54 | 631 | — 0.73 | + 0.016 |
| 87.20 | — 0.92 | 671 | + 0.66 | — 0.078 |

Die Differenz der beobachteten Normalörter ($B$) und der nach Formel (10) berechneten sind hier unter $B - R$ gegeben. Aus diesen Zahlenreihen sieht man, dass eine mit der Zeit proportionale Correction im Positionswinkel keinen besseren Anschluss hervorbringen wird. Auch die Constante in der Formel (10) für $p_0$ ergiebt sich im Mittel wenig verschieden. Man findet nämlich als nothwendige Correction $+ 0\overset{\circ}{.}01$. Den Distanzen dagegen genügt am besten der Werth $\varrho_0 = 5\overset{''}{.}439$. Man kommt also sehr nahe auf die am Anfange der ganzen Rechnung gemachten Annahmen zurück, indem man die Formeln erhält

$$\left.\begin{aligned} \varrho_0 &= 5\overset{''}{.}439 \\ p_0 &= 18\overset{\circ}{.}42 - 0\overset{\circ}{.}513\,(t - 1850.2) \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Ueberblickt man nun diese Fehlerreihe, so wird es auffallen, dass die Darstellung in Positionswinkel entschieden besser ist, wie in Distanz. Beide Fehlerreihen sind aber nicht ganz befriedigend. Man könnte nun zunächst den Grund der wenig guten Uebereinstimmung in der mangelhaft geführten Ausgleichungsrechnung suchen. Abgesehen aber davon, dass ich nicht glaube, dass durch eine strenge geführte Rechnung eine wesentliche Verbesserung gewonnen werden könne, wäre diese immerhin nicht ganz kurze Rechnung meiner Meinung nach unter den obwaltenden Umständen ziemlich nutzlos. Jedenfalls haben wir, wie im nächsten Para-

graphen näher aus einander gesetzt werden soll, allen Grund zu der Annahme, dass auch die verbesserten Normalörter (pg. 63) noch wesentlich durch die den Beobachtungen anhaftenden persönlichen Fehler entstellt sind. Es muss also zunächst eine Untersuchung in dieser Richtung vorgenommen werden.

In Rücksicht auf diesen Umstand ist es offenbar gleichgültig, ob wir alle Distanzen und Positionswinkel um eine kleine Constante ändern. Es ist also auch vollkommen gestattet, statt mit den obigen Werthen für $\varrho_0$ und $p_0$ mit den folgenden, äusserst wenig von diesen verschiedenen, (bei $p_0$ werden nun wieder $127^\circ\!.00$ addirt)

$$\left.\begin{aligned} \varrho_0 &= 5''\!.438 \\ p_0 &= 145^\circ\!.46 - 0^\circ\!.513\,(t - 1850.2) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(V)}$$

zu rechnen. Ursprünglich wurden die, durch einen unbedeutenden Rechenfehler veränderten Formeln (V) an Stelle von (11) gewonnen. Nach der gemachten Bemerkung sind diese aber ebenso berechtigt wie jene, weshalb ich eine Correctur der nachfolgenden Zahlen nicht vorgenommen habe. Zunächst lasse ich, des Folgenden wegen, eine Ephemeride für den Stern *C* berechnet nach Elementen V, $V_a$ und $V_b$ folgen. Dieselbe dürfte stets die betreffenden Coordinaten bis auf wenige Einheiten der letzten Stelle richtig ergeben.

| | $p$ | $\varrho$ | | $p$ | $\varrho$ | | $p$ | $\varrho$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ° | ″ | | ° | ″ | | ° | ″ |
| 1820.2 | 158.62 | 5.385 | 1843.2 | 150.23 | 5.291 | 1866.2 | 138.74 | 5.620 |
| 21.2 | 158.47 | 321 | 44.2 | 150.33 | 351 | 67.2 | 137.63 | 654 |
| 22.2 | 158.54 | 272 | 45.2 | 150.13 | 426 | 68.2 | 136.45 | 669 |
| 23.2 | 158.81 | 248 | 46.2 | 149.64 | 501 | 69.2 | 135.26 | 664 |
| 24.2 | 159.15 | 252 | 47.2 | 148.88 | 569 | 70.2 | 134.10 | 640 |
| 25.2 | 159.42 | 288 | 48.2 | 147.88 | 623 | 71.2 | 133.03 | 598 |
| 26.2 | 159.51 | 349 | 49.2 | 146.77 | 657 | 72.2 | 132.09 | 541 |
| 27.2 | 159.32 | 425 | 50.2 | 145.58 | 670 | 73.2 | 131.40 | 471 |
| 28.2 | 158.81 | 502 | 51.2 | 144.39 | 663 | 74.2 | 130.97 | 395 |
| 29.2 | 158.04 | 571 | 52.2 | 143.24 | 637 | 75.2 | 130.80 | 322 |
| 30.2 | 157.06 | 625 | 53.2 | 142.26 | 602 | 76.2 | 130.91 | 281 |
| 31.2 | 155.91 | 659 | 54.2 | 141.30 | 535 | 77.2 | 131.21 | 255 |
| 32.2 | 154.70 | 670 | 55.2 | 140.60 | 467 | 78.2 | 131.57 | 259 |
| 33.2 | 153.51 | 661 | 56.2 | 140.17 | 395 | 79.2 | 131.86 | 294 |
| 34.2 | 152.29 | 637 | 57.2 | 140.02 | 329 | 80.2 | 131.95 | 351 |
| 35.2 | 151.36 | 588 | 58.2 | 140.12 | 279 | 81.2 | 131.76 | 422 |
| 36.2 | 150.49 | 530 | 59.2 | 140.40 | 253 | 82.2 | 131.28 | 494 |
| 37.2 | 149.84 | 462 | 60.2 | 140.76 | 258 | 83.2 | 130.54 | 561 |
| 38.2 | 149.42 | 390 | 61.2 | 141.05 | 293 | 84.2 | 129.59 | 615 |
| 39.2 | 149.24 | 324 | 62.2 | 141.13 | 352 | 85.2 | 128.49 | 651 |
| 40.2 | 149.33 | 276 | 63.2 | 140.94 | 424 | 86.2 | 127.32 | 667 |
| 41.2 | 149.60 | 250 | 64.2 | 140.46 | 499 | 87.2 | 126.13 | 665 |
| 42.2 | 149.95 | 255 | 65.2 | 139.71 | 566 | 88.2 | 124.96 | 645 |
| 43.2 | 150.23 | 291 | 66.2 | 138.74 | 620 | | | |

§ 5.

Die Ermittelung der persönlichen Fehler bei den auf den Stern *C* sich beziehenden Beobachtungen ist mit noch grösseren Schwierigkeiten verknüpft als bei dem Sterne *B*. Schon bei diesem treten (vergl. § 3) hauptsächlich dadurch Unsicherheiten in der Vergleichung auf, dass die Thätigkeiten der hauptsächlichsten Beobachter zeitlich auf einander folgen, ohne eine genügende Reihe nahe gleichzeitiger Messungen aufzuweisen und wo letzterer Umstand eintritt, ein Zweifel an der Constanz der persönlichen Fehler begründet ist. Dasselbe findet natürlich auch bei dem Sterne *C* statt, der mit wenigen Ausnahmen dieselben Beobachter und dieselben Beobachtungszeiten aufweist wie der Stern *B*. Hierzu kommt nun aber noch ein Umstand, der ganz besonders ins Auge gefasst werden muss. Es unterliegt wohl schon a priori keinem Zweifel, dass die persönlichen Fehler bei einer gewöhnlichen Doppelsternmessung ganz andere sein müssen, als wenn ein Stern (*C*) mit einem Doppelstern (*A* und *B*) verglichen wird. Namentlich dürften sich, was bei der Mehrzahl der Beobachter der Fall war, dann diese Verschiedenheiten bemerkbar machen, wenn *C* direct mit der Mitte von *A* und *B* verglichen wird. Systematische Fehler, die von der Stellung des Sternes *C* gegen die Verbindungslinie *AB* abhängen, sind dann in hohem Grade wahrscheinlich und bei Beobachtern, welche zu einer zeitlichen Veränderung in der Art der Auffassung hinneigen, ist in diesem Falle eine vermehrte Veränderlichkeit zu erwarten. Aber auch, wenn direct einer der Sterne *A* und *B* mit *C* verglichen wird, ist eine Beeinflussung durch den dritten Stern nicht unwahrscheinlich. Ich glaube wenigstens, dass, wenn solche Einwirkungen sich herausstellen, man sich darüber nicht wundern kann. Bei der Complicirtheit des ganzen Vorganges, und bei der völligen Unkenntniss der Art, wie die genannten Einwirkungen bei dem einzelnen Beobachter auftreten, ist es schwer ein zureichendes Verfahren anzugeben, um die Messungen von diesen persönlichen Fehlern zu befreien. Man könnte vielleicht, wenigstens unter gewissen Voraussetzungen, der Wahrheit sich nähern, wenn man die analogen Verhältnisse bei anderen dreifachen Sternen studirt. Das ist aber ein Weg, den ich, wegen zu grosser Weitläufigkeit, hier selbstverständlich um so weniger betreten konnte, als

ein Erfolg am Ende auch ungewiss war. So bleibt nichts anderes übrig, als dieselbe Methode anzuwenden, die ich in meiner früheren Abhandlung angewandt habe. Man hat also die einzelnen Jahresmittel mit den als besten erkannten Elementen d. h. mit der letzten Ephemeride, zu vergleichen und aus den Differenzen die in passender Weise gezogenen Mittel als persönliche Fehler zu betrachten. Dass eine Vergleichung der so gefundenen Correctionen mit den aus gewöhnlichen Doppelsternbeobachtungen gefundenen oder gar die einfache Benutzung der letzteren völlig unzulässig ist, bedarf keiner Begründung. Zunächst will ich also die genannte Vergleichung ausführen. Die Beobachtungen wurden, abgesehen von eventuellen Schreib- und Druckfehlern, aus meiner früheren Abhandlung einfach herausgenommen und nur die seit jener Zeit publicirten hinzugefügt. Ein Nachweis der Quellen dürfte bei der allgemeinen Zugänglichkeit derselben nicht nothwendig sein. In den folgenden Zusammenstellungen bedeuten: $g$ die Anzahl der Abende, $p$ und $\varrho$ beobachtete Positionswinkel und Distanz, Corr. die Differenz: Ephemeride — Beobachtung und zuletzt sind die corrigirten Werthe angeführt.

1. W. Struve ($\Sigma$).

| | $g$ | $p$ | $\varrho$ | Correct. | | Corr. Werthe | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ° | ″ | ° | ″ | ° | ″ |
| 1821.98 | 3 | 160.03 | — | (— 1.48) | — | 160.03 | — |
| 26.22 | 3 | 159.59 | 5.431 | (— 0.08) | (— 0.080) | 159.59 | 5.431 |
| 28.99 | 3 | 156.15 | 5.530 | + 2.05 | + 0.027 | 157.97 | 5.460 |
| 31.27 | 6 | 153.21 | 5.672 | + 2.62 | — 0.012 | 155.03 | 5.602 |
| 32.28 | 4 | 153.18 | 5.810 | + 1.43 | — 0.141 | 155.00 | 5.740 |
| 33.27 | 3 | 152.12 | 5.779 | + 1.31 | — 0.120 | 153.94 | 5.709 |
| 35.31 | 5 | 149.80 | 5.670 | + 1.46 | — 0.088 | 151.62 | 5.600 |
| 36.27 | 3 | 148.40 | 5.604 | + 2.05 | — 0.079 | 150.22 | 5.534 |
| | | | Mittel | + 1.82 | — 0.070 | | |

Nach den Mittheilungen, welche ich in meiner ersten Abhandlung machte, sind die Beobachtungen vor 1828 als mit den späteren nicht direct vergleichbar anzusehen. Ich lasse diese uncorrigirt und gebe ihnen das halbe Gewicht der späteren.

2. Otto Struve (O. $\Sigma$).

Ich habe diesmal (vergl. darüber I pg. 73) die Beobachtungen, jenachdem sie sich auf $\frac{A+B}{2}$ oder $A$ oder $B$ beziehen, einzeln behandelt. Die Jahresmittel entnehme ich direct den „Mesures corrigées etc.“ Die

Reduction auf $\frac{A+B}{2}$ wurde überall nach den Zahlen in I (pg. 56, 57) und einer neu hinzugefügten Fortsetzung, die mitzutheilen wohl unnöthig ist, ausgeführt.

a) Beobachtungen *AC*.

| | $g$ | $p$ | $\varrho$ | Correct. | | Corr. Werthe | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ° | ″ | ° | ″ | ° | ″ |
| 1840.30 | 7 | 149.67 | 5.369 | — 0.31 | — 0.096 | 149.18 | 5.271 |
| 42.29 | 4 | 149.12 | 5.395 | + 0.86 | — 0.137 | 148.63 | 5.297 |
| 43.30 | 3 | 151.68 | 5.424 | — 1.44 | — 0.127 | 151.19 | 5.326 |
| 44.28 | 4 | 150.98 | 5.531 | — 0.67 | — 0.175 | 150.49 | 5.433 |
| 45.31 | 3 | 151.90 | 5.481 | — 1.82 | — 0.047 | 151.41 | 5.383 |
| 46.29 | 3 | 150.55 | 5.588 | — 0.98 | — 0.081 | 150.06 | 5.490 |
| 47.35 | 5 | 149.59 | 5.618 | — 0.86 | — 0.041 | 149.10 | 5.520 |
| 48.30 | 5 | 147.90 | 5.642 | — 0.13 | — 0.016 | 147.41 | 5.544 |
| 49.32 | 4 | 146.46 | 5.596 | + 0.17 | + 0.063 | 145.97 | 5.498 |
| 50.29 | 3 | 146.85 | 5.569 | — 1.38 | (+ 0.101) | 146.36 | (5.471) |
| 51.28 | 3 | 143.72 | 5.725 | + 0.58 | — 0.064 | 143.23 | 5.627 |
| 52.32 | 2 | 143.04 | 5.582 | + 0.09 | + 0.051 | 142.55 | 5.484 |
| 53.30 | 2 | 140.44 | 5.552 | + 1.72 | + 0.043 | 140.81 | 5.454 |
| 55.31 | 3 | 140.19 | 5.527 | + 0.36 | — 0.069 | 140.56 | 5.429 |
| 57.27 | 3 | 139.05 | 5.513 | + 0.98 | — 0.188 | 139.42 | 5.415 |
| 58.28 | 1 | 140.07 | 5.484 | + 0.07 | — 0.207 | 140.44 | 5.386 |
| 59.30 | 2 | 141.73 | 5.481 | — 1.29 | — 0.228 | 142.10 | 5.383 |
| 60.27 | 2 | 140.73 | 5.448 | + 0.05 | — 0.188 | 141.10 | 5.350 |
| 61.27 | 3 | 141.34 | 5.489 | — 0.29 | — 0.192 | 141.71 | 5.391 |
| 62.33 | 1 | 140.44 | 5.226 | + 0.66 | (+ 0.135) | 140.81 | (5.128) |
| 64.30 | 1 | 139.81 | 5.291 | + 0.57 | (+ 0.215) | 140.18 | (5.193) |
| 66.27 | 1 | 136.81 | — | + 1.85 | — | 137.18 | — |
| 68.28 | 2 | 134.19 | — | + 2.17 | — | 134.56 | — |
| 70.28 | 4 | 133.71 | — | + 0.31 | — | 134.08 | — |
| 77.27 | 3 | 130.97 | 5.456 | + 0.27 | — 0.201 | 131.34 | 5.358 |
| 78.29 | 3 | 132.53 | 5.342 | — 0.93 | — 0.080 | 132.90 | 5.244 |
| 79.29 | 3 | 132.81 | 5.375 | — 0.96 | — 0.076 | 133.18 | 5.277 |

Die einzelnen Correctionen zeigen verschiedene Eigenthümlichkeiten. Im Positionswinkel sind nicht unbeträchtliche Schwankungen zu bemerken. Im Allgemeinen scheint es hier nöthig, in $p$ 2 Perioden zu unterscheiden. Ich habe (entsprechend I pg. 43) die Abtheilung bei 1853.0 vorgenommen. Es ergiebt sich dann als einfaches Mittel [1])

I. Periode, Correction: — 0°49

II. Periode, Correction: + 0.37

In Distanz müssen die in Klammer gesetzten Beobachtungen ausgeschlossen werden. Sie zeigen ein so abnormes Verhalten, dass die Berechtigung dieses Verfahrens näher zu begründen wohl unnöthig ist. Das aus allen übrigen gebildete Mittel ergiebt:

— 0″097.

1) Die Gewichte der einzelnen Jahre sind bei diesen und allen folgenden Mitteln, welche zur Ableitung der persönlichen Fehler gebraucht wurden, niemals in Betracht gezogen worden.

b) Beobachtungen $\frac{A+B}{2}$, $C$

| | $g$ | $p$ | $\varrho$ | Correct. | | Corr. Werthe | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ° | ″ | ° | ″ | ° | ″ |
| 1864.30 | 1 | 141.10 | 5.490 | — 0.72 | + 0.016 | 139.81 | 5.405 |
| 66.27 | 1 | — | 5.610 | — | + 0.013 | — | 5.525 |
| 68.28 | 2 | — | 5.735 | — | — 0.066 | — | 5.650 |
| 69.32 | 2 | 135.80 | 5.685 | — 0.68 | — 0.024 | 134.51 | 5.600 |
| 70.28 | 4 | — | 5.743 | — | — 0.106 | — | 5.658 |
| 71.31 | 3 | 133.67 | 5.643 | — 0.74 | · 0.051 | 132.38 | 5.558 |
| 72.31 | 3 | 132.90 | 5.683 | — 0.89 | — 0.150 | 131.61 | 5.598 |
| 73.28 | 3 | 134.37 | 5.447 | — 3.00 | + 0.019 | 133.08 | 5.362 |
| 74.28 | 3 | 132.63 | 5.500 | — 1.67 | — 0.116 | 131.34 | 5.415 |
| 75.28 | 3 | 132.27 | 5.643 | — 1.46 | — 0.324 | 130.98 | 5.558 |
| 76.29 | 2 | 132.10 | 5.420 | — 1.16 | — 0.141 | 130.81 | 5.335 |

Das einfache Mittel ist in Positionswinkel — 1°29, in Distanz — 0″085.

c) Beobachtungen $BC$.

| | $g$ | $p$ | $\varrho$ | Correct. | | Corr. Werthe | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ° | ″ | ° | ″ | ° | ″ |
| 1844.28 | 3 | 151.27 | — | — 0.96 | — | 150.99 | — |
| 45.31 | 2 | 151.07 | — | — 0.99 | — | 150.79 | — |
| 48.30 | 5.2 | 147.83 | 5.731 | — 0.06 | — 0.104 | 147.55 | 5.538 |
| 49.32 | 4 | 147.19 | 5.779 | — 0.57 | —0.120 | 146.91 | 5.586 |
| 50.29 | 3 | 146.49 | 5.757 | — 1.02 | —0.087 | 146.21 | 5.564 |
| 51.28 | 3 | 143.78 | 5.991 | + 0.52 | —0.330 | 143.50 | 5.798 |
| 52.32 | 4 | 142.03 | 5.777 | + 1.10 | —0.144 | 141.75 | 5.584 |
| 55.31 | 3 | 140.10 | 5.679 | + 0.45 | —0.221 | 140.26 | 5.486 |
| 57.27 | 3 | 139.18 | 5.604 | + 0.85 | —0.279 | 139.34 | 5.411 |
| 58.28 | 1 | 139.86 | 5.640 | + 0.28 | —0.363 | 140.02 | 5.447 |
| 59.30 | 2 | 141.43 | 5.503 | — 0.99 | —0.250 | 141.59 | 5.310 |
| 60.27 | 2 | 141.72 | 5.507 | — 0.94 | —0.247 | 141.88 | 5.314 |
| 61.27 | 3 | 141.63 | 5.502 | — 0.58 | —0.205 | 141.79 | 5.309 |
| 62.33 | 1 | 140.21 | 5.460 | + 0.89 | —0.099 | 140.37 | 5.267 |
| 64.30 | 1 | 140.33 | 5.202 | + 0.05 | (+0.304) | 140.49 | (5.009) |
| 66.27 | 1 | 137.14 | — | + 1.52 | — | 137.36 | — |
| 68.28 | 2 | 135.67 | — | + 0.69 | — | 135.83 | — |
| 70.28 | 4 | 133.76 | — | + 0.26 | — | 133.92 | — |
| 77.27 | 3 | 130.96 | 5.443 | + 0.28 | — 0.188 | 131.12 | 5.250 |
| 78 29 | 3 | 131.81 | 5.361 | — 0.21 | — 0.098 | 131.97 | 5.168 |
| 79.29 | 3 | 132.14 | 5.454 | — 0.28 | — 0.155 | 132.30 | 5.261 |

In diesem Falle musste ebenso wie bei $AC$ verfahren werden. Im Positionswinkel ergiebt sich im Mittel als Correction:

I. Periode — 0°28

II. Periode + 0.16

in Distanz nach Ausschluss der offenbar ganz abweichenden Beobachtung von 1864

Correction — 0″193

Nach den mitgetheilten Zahlen sind die 3 verschiedenen Methoden der Beobachtung mit zum Theil sehr verschiedenen persönlichen Fehlern

behaftet. Diese letzteren aber sind der Natur der Sache gemäss nicht sicher bestimmbar, wenngleich jedenfalls zu hoffen steht, dass die gefundenen Werthe wenigstens den Hauptbestandtheil der Reduction auf das vorliegende System ergeben. Um nun die dreierlei Beobachtungsdaten in Jahresmittel zu vereinigen, habe ich hier, ebenso wie auch später, dieselbe Gewichtsbestimmung wie bei Stern $B$ vorgenommen. Es hat also ein aus 1 oder 2 Abenden zusammengesetztes Mittel das Gewicht 2, ein aus mehr als 2 Abenden bestehendes das Gewicht 4 erhalten. Ein aus mehreren der 3 verschiedenen Beobachtungsmethoden $a$, $b$ und $c$ bestehendes hat die Summe der Gewichte als Gewicht. Ist dieses aber grösser als 4, so wurde dieselbe Zahl, also 4, als Gewichtszahl beibehalten. Dieses Verfahren ist, wie alle ähnlichen, von grosser Willkür nicht frei. Es dürfte aber doch den thatsächlichen Verhältnissen einigermassen Rechnung tragen, indem u. A. verhütet werden sollte, dass die Beobachtungen von O. Σ nicht gar zu sehr die von andern Beobachtern herrührenden Messungen in den endgültigen Jahresmitteln verdecken.

Die auf die genannte Weise gebildeten Mittelwerthe sind nun:

| | Gewicht | $p$ | $\varrho$ | | Gewicht | $p$ | $\varrho$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ° | ″ | | | ° | ″ |
| 1840.30 | 4 | 149.18 | 5.271 | 1860.27 | 4 | 141.49 | 5.332 |
| 42.29 | 4 | 148.63 | 5.297 | 61.27 | 4 | 141.75 | 5.350 |
| 43.30 | 4 | 151.19 | 5.326 | 62.33 | 4,2 | 140.59 | 5.267 |
| 44.28 | 4 | 150.74 | 5.433 | 64.30 | 4,2 | 140.16 | 5.405 |
| 45.31 | 4 | 151.20 | 5.383 | 66.27 | 4,2 | 137.24 | 5.525 |
| 46.29 | 4 | 150.06 | 5.490 | 68.28 | 4,2 | 135.20 | 5.650 |
| 47.35 | 4 | 149.10 | 5.520 | 69.32 | 4 | 134.51 | 5.600 |
| 48.30 | 4 | 147.48 | 5.542 | 70.28 | 4 | 134.00 | 5.658 |
| 49.32 | 4 | 146.44 | 5.542 | 71.31 | 4 | 132.38 | 5.558 |
| 50.29 | 4 | 146.29 | 5.564 | 72.31 | 4 | 131.61 | 5.598 |
| 51.28 | 4 | 143.37 | 5.713 | 73.28 | 4 | 133.08 | 5.362 |
| 52.32 | 4 | 142.02 | 5.534 | 74.28 | 4 | 131.34 | 5.415 |
| 53.30 | 2 | 140.81 | 5.454 | 75.28 | 4 | 130.98 | 5.558 |
| 55.31 | 4 | 140.41 | 5.458 | 76.29 | 2 | 130.81 | 5.335 |
| 57.27 | 4 | 139.38 | 5.413 | 77.27 | 4 | 131.23 | 5.304 |
| 58.28 | 4 | 140.23 | 5.417 | 78.29 | 4 | 132.44 | 5.206 |
| 59.30 | 4 | 141.85 | 5.347 | 79.29 | 4 | 132.74 | 5.269 |

### 3. Dawes (D).

| | $g$ | $p$ | $\varrho$ | Correct. | | Corr. Werthe | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ° | ″ | ° | ″ | ° | ″ |
| 1831.30 | 1 | 154.91 | 5.862 | +0.88 | −0.202 | 155.75 | 5.679 |
| 32.18 | 5 | 153.43 | 5.876 | +1.29 | −0.206 | 154.27 | 5.693 |
| 41.07 | 6 | 149.00 | 5.437 | +0.56 | −0.184 | 149.84 | 5.254 |
| 43.22 | 2 | 149.75 | 5.433 | +0.48 | −0.140 | 150.59 | 5.250 |
| 48.14 | 6 | 147.51 | 5.402 | +0.43 | +0.218 | 148.35 | 5.520 |
| 54.07 | 1 | 140.00 | 5.526 | +1.42 | +0.018 | 140.84 | 5.644 |

O. $\Sigma$ hatte bei seiner Discussion der Dawes'schen Beobachtungen die Nothwendigkeit erkannt, 3 verschiedene Perioden zu unterscheiden. Diese sind im Vorigen durch die abtheilenden Striche angedeutet. Der Verlauf der Correctionen zeigt indess, dass hier diese Unterscheidung im Positionswinkel gar nicht und in Distanz nur theilweise nöthig ist, indem bei letzterer nur die 3. Periode ein anderes Verhalten zeigt. Im Mittel ergiebt sich:

Correction im Positionswinkel $+ 0\overset{\circ}{.}84$

Correction in Distanz $\begin{cases} - 0''.183 \\ + 0.118 \end{cases}$

der letzte Werth ist selbstredend ganz unsicher, vielleicht sogar illusorisch.

### 4. Secchi (S).

| | $g$ | $p$ | $\varrho$ | Correct. | | Corr. Werthe | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ° | " | ° | " | ° | " |
| 1855.19 | 3 | 140.33 | 5.388 | + 0.27 | + 0.080 | 140.35 | 5.385 |
| 57.29 | 4 | 141.20 | 5.403 | − 1.18 | − 0.078 | 141.22 | 5.400 |
| 65.23 | 2 | 139.71 | 5.555 | − 0.03 | + 0.013 | 139.73 | 5.552 |
| 66.29 | 2 | 137.61 | 5.650 | + 1.03 | − 0.027 | 137.63 | 5.617 |

Im Mittel aus schlecht stimmenden Einzelwerthen wird

Correction in $p + 0\overset{\circ}{.}02$

Correction in $\varrho - 0''.003$

S erhält das Gewicht $\frac{1}{2}$.

### 5. Dembowski ($\Delta$).

Die Messungen habe ich dem erwähnten Werke entnommen.

| | $g$ | $p$ | $\varrho$ | Correct. | | Corr. Werthe | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ° | " | ° | " | ° | " |
| 1855.07 | 6 | 140.97 | 5.355 | − 0.28 | + 0.121 | 141.04 | 5.424 |
| 56.05 | 3 | 140.33 | 5.290 | − 0.10 | + 0.116 | 140.40 | 5.359 |
| 56.93 | 2 | 139.90 | 5.445 | + 0.16 | − 0.098 | 139.97 | 5.514 |
| 58.15 | 5 | 139.62 | 5.146 | + 0.49 | + 0.136 | 139.69 | 5.215 |
| 63.05 | 9 | 140.57 | 5.473 | + 0.40 | − 0.060 | 140.49 | 5.523 |
| 65.17 | 5 | 139.72 | 5.462 | + 0.02 | + 0.102 | 139.64 | 5.512 |
| 66.27 | 3 | 138.97 | 5.600 | − 0.30 | + 0.022 | 138.89 | 5.650 |
| 67.26 | 4 | 137.85 | 5.577 | − 0.28 | + 0.078 | 137.78 | 5.627 |
| 68.22 | 4 | 136.67 | 5.537 | − 0.24 | + 0.132 | 136.59 | 5.587 |
| 70.21 | 3 | 134.23 | 5.610 | − 0.14 | + 0.030 | 134.15 | 5.660 |
| 71.18 | 3 | 134.13 | 5.603 | − 1.08 | − 0.004 | 133.35 | 5.653 |
| 72.23 | 3 | 133.17 | 5.460 | − 1.10 | + 0.079 | 132.39 | 5.513 |
| 73.23 | 3 | 132.80 | 5.400 | − 1.42 | + 0.069 | 132.02 | 5.450 |
| 74.09 | 3 | 132.67 | 5.573 | − 1.65 | − 0.170 | 131.89 | 5.461 |
| 75.17 | 4 | 131.45 | 5.397 | − 0.64 | − 0.073 | 130.67 | 5.285 |
| 76.07 | 1 | 131.40 | 5.380 | − 0.50 | − 0.094 | 130.62 | 5.268 |
| 77.29 | 3 | 131.70 | 5.290 | − 0.46 | − 0.035 | 130.92 | 5.178 |
| 78.12 | 4 | 130.92 | 5.445 | + 0.62 | − 0.186 | 130.14 | 5.333 |

Bekanntlich sind die Messungen bis 1863 als völlig verschieden von den folgenden zu betrachten, weil Methode der Beobachtung und Instrument andere waren. Eine Abtheilung nach dieser Rücksicht ist also selbstverständlich. Ich habe aber noch zwei andere Perioden (durch Striche angedeutet) unterschieden. Es finden an den erwähnten Stellen sehr deutliche Sprünge statt, die bei der Güte der vorliegenden Messungen sehr auffallend sind. Ich gebe indessen zu, dass sich gegen die Berechtigung der Abtheilung besonders in $p$ berechtigte Zweifel hervorheben lassen.

Man findet nun im Mittel folgende Correctionen:

| | $p$ | $\varrho$ |
|---|---|---|
| I. Periode | + 0°07 | + 0″069 |
| II. „ | — 0.08 | — 0.050 |
| III. „ | — 0.78 | — 0.112 |

## 6. Mädler (M).

Auf Grund der Thatsachen, die ich in meiner früheren Arbeit (S. 75) erwähnt habe, wurden die Distanzen ganz ausgeschlossen und den Positionswinkeln wurde halbes Gewicht gegeben.

| | $g$ | $p$ | Correct. | Corr. Werth |
|---|---|---|---|---|
| | | ° | ° | ° |
| 1841.31 | 5 | 151.15 | — 1.51 | 151.45 |
| 42.20 | 5 | 149.34 | + 0.61 | 149.64 |
| 43.19 | 6 | 150.86 | — 0.63 | 151.16 |
| 44.39 | 6 | 150.82 | — 0.53 | 151.12 |
| 47.29 | 1 | 147.33 | + 1.46 | 147.63 |
| 51.20 | 4 | 144.09 | + 0.30 | 144.39 |
| 52.25 | 6 | 141 84 | + 1.35 | 142.14 |
| 53.25 | 7 | 140.81 | + 1.40 | 141.11 |
| 54.28 | 10 | 142.10 | — 0.86 | 142.40 |
| 55.27 | 4 | 140.25 | + 0.32 | 140.55 |
| 56.29 | 2 | 139.78 | + 0.38 | 140.08 |
| 57.27 | 2 | 139.28 | + 0.75 | 139.58 |
| 58.21 | 3 | 140.61 | — 0.49 | 140.91 |
| 59.26 | 8 | 139.30 | + 1.12 | 139.60 |
| 60.29 | 4 | 140.86 | — 0.07 | 141.16 |
| 61.25 | 2 | 141.43 | — 0.38 | 141.73 |
| 62.31 | 3 | 139.25 | + 1.86 | 139,55 |

Correction + 0°30.

### 7. Dunér (Du).

| | $g$ | $p$ | $\varrho$ | Correct. | | Corr. Werthe | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ° | " | ° | " | ° | |
| 1869.37 | 3 | 134.88 | 5.401 | + 0.18 | (+ 0.259) | 133.32 | — |
| 70.27 | 1 | 135.90 | 5.360 | — 1.87 | (+ 0.277) | 134.34 | — |
| 71.28 | 2 | 135.35 | 5.500 | — 2.40 | + 0.094 | 133.79 | 5.450 |
| 72.33 | 2 | 134.40 | 5.585 | — 2.40 | — 0.053 | 132.84 | 5.535 |
| 74.29 | 2 | 133.35 | 5.387 | — 2.40 | + 0.001 | 131.79 | 5,337 |
| 75.31 | 6 | 133.00 | 5.488 | — 2.19 | — 0.171 | 131.44 | 5.438 |
| 76.29 | 4 | 131.90 | 5.398 | — 0.97 | — 0.119 | 130.34 | 5.348 |
| 78.29 | 3 | 132.05 | 5.313 | — 0.45 | — 0.051 | 130.49 | 5.263 |

Die Distanzen zeigen grosse Differenzen, auch nachdem die beiden ersten, die offenbar mit den späteren nicht vergleichbar sind, ausgeschlossen worden sind. Ich habe deshalb den Distanzen nur halbes Gewicht gegeben. Es ergiebt sich

Correction in $p$ — 1°56
„ in $\varrho$ — 0"050

### 8. Schiaparelli (Sp).

| | $g$ | $p$ | $\varrho$ | Correct. | | Corr. Werthe | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ° | " | ° | " | ° | " |
| 1875.25 | 8 | 130.41 | 5.382 | + 0.40 | — 0.062 | 131.45 | 5.386 |
| 77 23 | 7 | 130.31 | 5.287 | + 0.91 | — 0.032 | 131.35 | 5.291 |
| 79.27 | 6 | 130.88 | 5.252 | + 0 99 | + 0.046 | 131.92 | 5.256 |
| 81.30 | 6 | 130.53 | 5.441 | + 1.18 | — 0.012 | 131.57 | 5.445 |
| 82.26 | 8 | 130.02 | 5.464 | + 1.22 | + 0.034 | 131.06 | 5.468 |
| 83.29 | 6 | 129.12 | 5.594 | + 1.33 | — 0.028 | 130.16 | 5.598 |
| 84.25 | 7 | 128.17 | 5.585 | + 1.36 | + 0.032 | 129.21 | 5.589 |
| 85.29 | 5 | 127.44 | 5.599 | + 0.95 | + 0.053 | 128.48 | 5.603 |
| 87.24 | 13 | 126.03 | 5.524 | + 0.05 | + 0.140 | 125.93 | 5.611 |
| 88.27 | 12 | 125.13 | 5.610 | — 0.25 | + 0.034 | 125.03 | 5.697 |

Die letzten zwei Jahresmittel sind aus Beobachtungen mit dem neuen 18-Zöller gewonnen. Sie sind also nicht direct vergleichbar mit den früheren. Man hat demnach 2 Perioden zu unterscheiden und findet

| | Corr. $p$ | Corr. $\varrho$ |
|---|---|---|
| I. Periode | + 1°04 | + 0"004 |
| II. „ | — 0.10 | + 0.087 |

Dass die letzte Correction, die nur aus 2 Abendmitteln gebildet ist, ganz unsicher ist, braucht nicht erst hervorgehoben zu werden.

### 9. Engelmann.

Ausser einer älteren Beobachtung vom Jahre 1865, die uncorrigirt bleiben muss, liegen nur 3 Jahresmittel vor. Es ist begreiflich, dass auch hier eine Berechnung des persönlichen Fehlers unsicher ist.

| | $g$ | $p$ | $\varrho$ | Correct. | | Corr. Werthe | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ° | ″ | ° | ″ | ° | ″ |
| 1883.13 | 8 | 128.05 | 5.436 | + 2.54 | + 0.120 | 129.43 | 5.653 |
| 85.29 | 4 | 126.80 | 5.437 | + 1.59 | + 0.215 | 128.18 | 5.654 |
| 86.30 | 5 | 127.18 | 5.352 | + 0.02 | + 0.315 | 128.56 | 5.569 |

im Mittel Correction + 1°.38 + 0″.217

## 10. J. Herschel (h) und South.

Ich habe diese beiden Beobachter zusammen behandelt.

| | | $p$ | Correct. | Corr. Werthe | Gewicht |
|---|---|---|---|---|---|
| | | ° | ° | ° | |
| h u. South | 1822.14 | 158.28 | + 0.26 | 158.28 | 1 |
| South | 24.49 | 159.75 | — 0.52 | 157.57 | 1 |
| " | 25.27 | 163.27 | — 3.84 | 161.09 | 1 |
| h | 30.29 | 159.22 | — 2.26 | 157.70 | 2 |
| h | 31.15 | 157.67 | — 1.70 | 156.15 | 2 |
| h | 32.15 | 157.07 | — 2.31 | 155.55 | 2 |
| h | 33.13 | 153.40 | + 0.19 | 151.88 | 2 |

Die erste Beobachtung erhielt keine Verbesserung. Die beiden nächsten von South die Correction: — 2°.18, während an h die Verbesserung — 1°.52 anzubringen ist. Die Gewichtszahlen wurden hier, wie auch in I, willkürlich angenommen.

## 11. Jedrzejewicz.

| | $g$ | $p$ | $\varrho$ | Correct. | | Corr. Werthe | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ° | ″ | ° | ″ | ° | ″ |
| 1878.26 | 6 | 131.30 | 5.483 | + 0.29 | — 0.222 | 132.01 | 5.380 |
| 80.22 | 6 | 131.79 | 5.296 | + 0.16 | + 0.056 | 132.50 | 5.193 |
| 81.24 | 4 | 130.58 | 5.570 | + 1.16 | — 0.145 | 131.29 | 5.467 |
| 82.27 | 4 | 130.23 | 5.600 | + 1.00 | — 0.131 | 130.94 | 5.497 |
| 86.29 | 3 | 126.27 | 5.431 | + 0.94 | (+ 0.236) | 126.98 | — |

Die letzte Distanz muss ausgeschlossen werden. Das Mittel der übrigen Correctionen ist

in $p$ + 0°.71

in $\varrho$ — 0″.103

## 12. Kaiser.

| | $g$ | $p$ | $\varrho$ | Correct. | | Corr. Werthe | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ° | ″ | ° | ″ | ° | ″ |
| 1840.15 | 7 | 146.00 | 5.533 | + 1.32 | — 0.255 | 149.79 | 5.253 |
| 42.35 | 6 | 147.22 | 5.589 | + 2.77 | — 0.329 | 149.01 | 5.309 |
| 43.33 | 6 | 148.10 | 5.691 | + 2.14 | — 0.395 | 149.89 | 5.411 |
| 65.36 | 8 | — | 5.875 | — | — 0.300 | — | 5.595 |
| 66.24 | 5 | 137.66 | 5.752 | + 1.04 | — 0.131 | 139.45 | 5 472 |
| 66.33 | 7 | 136.91 | 5.891 | + 1.69 | — 0.267 | 138.70 | 5.611 |

Correction im Mittel + 1°.79 — 0″.280

Unter $p$ und $\varrho$ sind hier die nach Angabe von I pg. 76 corrigirten Coordinaten angeführt. Dadurch ist in der That eine bessere Uebereinstimmung zwischen den nach verschiedenen Methoden angestellten Messungen entstanden.

Die Messungen aller übrigen Beobachter wurden uncorrigirt gelassen. Die Gewichtsbestimmung ist dieselbe geblieben wie beim Sterne $B$ und unterliegt natürlich denselben Bedenken und Unsicherheiten.

Ueberblickt man die Reihe der Einzelabweichungen, so fällt es auf, dass dieselben oftmals einen regelmässigen Gang zeigen von einem Betrage, der durch eine etwaige Fehlerhaftigkeit der Elemente ganz unerklärbar ist und ausserdem gleichzeitig bei verschiedenen Beobachtern verschiedenes Verhalten zeigt. Jedenfalls ergiebt sich, dass die gefundenen mittleren Correctionen nur ganz ungefähr den den Beobachtungen anhaftenden Fehlern entsprechen und dass ein Theil derselben durchaus nicht durch eine Constante dargestellt wird. Nach den oben gemachten Bemerkungen wird dieses Resultat nicht befremden.

Ich stelle nun sämmtliche Beobachtungen chronologisch zusammen.

| Jahr | Beobachter | $g$ | $p$ | $\varrho$ | $B-R$ | | Mittel $B-R$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1781.89 | W. Herschel | 1 | 181°.73 | — | +3°.4 | — | | |
| 1802.16 | id. | 1 | 171.82 | — | +4.0 | — | | |
| 1821.98 | Σ | 4 | 160.03 | — | +1.48 | — | | |
| 22.14 | h & South | 1 | 158.28 | — | −0.26 | — | | |
| 24.49 | South | 1 | 157.57 | — | −1.66 | — | | |
| 25.27 | id. | 1 | 161.09 | — | +1.66 | — | +0°.38 (17) | −0".009 (8) |
| 26.22 | Σ | 4 | 159.59 | 5".431 | +0.08 | +0".080 | | |
| 28.99 | Σ | 4 | 157.97 | 5.460 | −0.23 | −0.097 | | |
| 30.29 | h | 2 | 157.70 | — | +0.74 | — | | |
| 31.15 | h | 2 | 156.15 | — | +0.18 | — | | |
| 31.27 | Σ | 4 | 155.03 | 5.602 | −0.80 | −0.058 | −0.37 (8) | −0.032 (6) |
| 31.30 | D | 2 | 155.75 | 5.679 | −0.04 | +0.019 | | |
| 32.15 | h | 2 | 155,55 | — | +0.79 | — | | |
| 32.18 | D | 4 | 154.27 | 5.693 | −0.45 | +0.023 | −0.11 (12) | +0.079 (10) |
| 32.19 | Bessel | 2 | 153.40 | 5.878 | −1.31 | +0.208 | | |
| 32.28 | Σ | 4 | 155.00 | 5.740 | +0.39 | +0.071 | | |
| 33.13 | h | 2 | 151.88 | — | −1.71 | — | −0.23 (6) | +0.050 (4) |
| 33.27 | Σ | 4 | 153.94 | 5.709 | +0.51 | +0.050 | | |
| 35.31 | Σ | 4 | 151.62 | 5.600 | +0.36 | +0.018 | +0.36 (4) | +0.018 (4) |
| 36.27 | Σ | 4 | 150.22 | 5.534 | −0.23 | +0.009 | −0.23 (4) | +0.009 (4) |
| 40.15 | Kaiser | 4 | 149.79 | 5.253 | +0.47 | −0.025 | +0.16 (8) | −0.014 (8) |
| 40.30 | O. Σ | 4 | 149.18 | 5.271 | −0.15 | −0.002 | | |

| Jahr | Beobachter | $g$ | $p$ | $\varrho$ | $B-R$ | | Mittel $B-R$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1841.07 | D | 4 | 149°.84 | 5".254 | +0°.28 | +0".001 | +0°.79 (6) | +0".001 (4) |
| 41.31 | M | 2 | 151.45 | — | +1.81 | — | | |
| 42.20 | M | 2 | 149.64 | — | −0.31 | — | −0.99 (10) | +0.044 (8) |
| 42.29 | O. Σ | 4 | 148.63 | 5.297 | −1.35 | +0.039 | | |
| 42.35 | Kaiser | 4 | 149.01 | 5.309 | −0.98 | +0.049 | | |
| 43.19 | M | 2 | 151.16 | — | +0.93 | — | +0.42 (12) | +0.049 (10) |
| 43.22 | D | 2 | 150.59 | 5.250 | +0.36 | −0.043 | | |
| 43.30 | O. Σ | 4 | 151.19 | 5.326 | +0.95 | +0.030 | | |
| 43.33 | Kaiser | 4 | 149.89 | 5.411 | −0.35 | +0.115 | | |
| 44.28 | O. Σ | 4 | 150.74 | 5.433 | +0.43 | +0.077 | +0.56 (6) | +0.077 (4) |
| 44.39 | M | 2 | 151.12 | — | +0.83 | — | | |
| 45.31 | O. Σ | 4 | 151.20 | 5.383 | +1.12 | −0.051 | +1.45 (7) | −0.051 (4) |
| 45.31 | Döllen | 1 | 149.90 | — | −0.18 | — | | |
| 45.91 | Hind | 2 | 152.69 | — | +2.91 | — | | |
| 46.00 | Jacob | 1 | 149.31 | 5.370 | −0.43 | −0.115 | +0.31 (5) | −0.037 (5) |
| 46.2[illegible] | O. Σ | 4 | 150.06 | 5.490 | +0.49 | −0.017 | | |
| 47.29 | M | 1 | 147.63 | — | −1.16 | — | +0.06 (5) | −0.057 (4) |
| 47.35 | O. Σ | 4 | 149.10 | 5.520 | +0.37 | −0.057 | | |
| 48.14 | D | 4 | 148.35 | 5.520 | +0.41 | −0.100 | +0.06 (8) | −0.092 (8) |
| 48.30 | O. Σ | 4 | 147.48 | 5.542 | −0.29 | −0.084 | | |
| 49.32 | O. Σ | 4 | 146.44 | 5.542 | −0.19 | −0.117 | −0.19 (4) | −0.117 (4) |
| 50.29 | O. Σ | 4 | 146.29 | 5.564 | +0.84 | −0.105 | +0.84 (4) | −0.105 (4) |
| 51.20 | M | 2 | 144.39 | — | 0.00 | — | −0.62 (6) | +0.052 (4) |
| 51.28 | O. Σ | 4 | 143.37 | 5.713 | −0.93 | +0.052 | | |
| 52.08 | Miller | 1 | 146.67 | 5.704 | +3.29 | +0.064 | −0.31 (8) | −0.063 (5) |
| 52.25 | M | 2 | 142.14 | — | −1.05 | — | | |
| 52.32 | O. Σ | 4 | 142.02 | 0.534 | −1.10 | −0.095 | | |
| 52.49 | Fletcher | 1 | 143.72 | 5.337 | +0.77 | (−0.290) | | |
| 53.23 | Wrottesley | 2 | 142.85 | — | +0.62 | — | −0.61 (6) | −0.141 (2) |
| 53.25 | M | 2 | 141.11 | — | −1.10 | — | | |
| 53.30 | O. Σ | 2 | 140.81 | 5.454 | −1.35 | −0.141 | | |
| 54.07 | D | 2 | 140.84 | 5.644 | −0.58 | +0.100 | +0.29 (4) | +0.100 (2) |
| 54.28 | M | 2 | 142.40 | — | +1.16 | — | | |
| 55.07 | Δ | 4 | 141.04 | 5.424 | +0.35 | −0.052 | +0.19 (14) | −0.036 (12) |
| 55.19 | S | 2 | 140.35 | 5.385 | −0.25 | −0.083 | | |
| 55.27 | M | 2 | 140.25 | — | −0.02 | — | | |
| 55.31 | O. Σ | 4 | 140.41 | 5.458 | +0.14 | 0 | | |
| 55.33 | Winnecke | 2 | 139.91 | 5.426 | +0.63 | −0.030 | | |
| 56.05 | Δ | 4 | 140.40 | 5.359 | +0.17 | −0.047 | +0.28 (11) | +0.010 (10) |
| 56.21 | Jacob | 2 | 139.92 | 5.389 | −0.25 | −0.005 | | |
| 56.24 | Winnecke | 2 | 141.73 | 5.373 | +1.57 | −0.019 | | |
| 56.29 | M | 1 | 140.08 | — | −0.08 | — | | |
| 56.93 | Δ | 2 | 139.97 | 5.514 | 0.09 | +0.167 | | |

| Jahr | Beobachter | $g$ | $p$ | $\varrho$ | $B-R$ | | Mittel $B-R$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | ° | " | ° | " | ° | " |
| 1857.27 | O. $\Sigma$ | 4 | 139.38 | 5.413 | − 0.65 | + 0.088 | | |
| 57.27 | M | 1 | 139.58 | — | − 0.45 | — | − 0.08 (9) | + 0.073 (8) |
| 57.29 | S | 2 | 141.22 | 5.400 | + 1.20 | + 0.075 | | |
| 57.90 | Jacob | 2 | 140.04 | 5.335 | − 0.05 | + 0.041 | | |
| 58.15 | $\Delta$ | 4 | 139.69 | 5.215 | − 0.42 | − 0.066 | | |
| 58.21 | M | 2 | 140.91 | — | + 0.79 | — | + 0.03 (10) | + 0.037 (8) |
| 58.28 | O. $\Sigma$ | 4 | 140.23 | 5.417 | + 0.09 | + 0.140 | | |
| 59.26 | M | 2 | 139.60 | — | − 0.82 | — | + 0.67 (6) | + 0.093 (6) |
| 59.30 | O. $\Sigma$ | 4 | 141.85 | 5.347 | + 1.41 | + 0.093 | | |
| 60.27 | O. $\Sigma$ | 4 | 141.49 | 5.332 | + 0.75 | + 0.072 | + 0.62 (6) | + 0.072 (4) |
| 60.29 | M | 2 | 141.16 | — | + 0.37 | — | | |
| 61.25 | M | 1 | 141.73 | — | + 0.68 | — | | |
| 61.27 | O. $\Sigma$ | 4 | 141.75 | 5.350 | + 0.70 | + 0.051 | + 0.61 (7) | + 0.051 (4) |
| 61.28 | Auwers | 2 | 141.45 | 5.703 | + 0.40 | (+ 0.404) | | |
| 62.31 | M | 2 | 139.55 | — | − 1.56 | — | − 0.87 (6) | − 0.094 (2) |
| 62.33 | O. $\Sigma$ | 4.2 | 140.59 | 5.267 | − 0.52 | − 0.094 | | |
| 63.05 | $\Delta$ | 4 | 140.49 | 5.523 | − 0.48 | + 0.110 | | |
| 63.13 | Knott | 1 | 140.81 | 5.423 | + 0.15 | + 0.004 | − 0.70 (6) | + 0.089 (5) |
| 63.18 | Romberg | 1 | 138.50 | 5.811 | − 2.44 | (+ 0.388) | | |
| 64.30 | O. $\Sigma$ | 4.2 | 140.16 | 5.405 | − 0.22 | − 0.101 | − 0.22 (4) | − 0.101 (2) |
| 65.17 | $\Delta$ | 4 | 139.64 | 5.512 | − 0.10 | − 0.052 | | |
| 65.23 | S | 1 | 139.73 | 5.552 | + 0.05 | − 0.016 | − 0.10 (11) | + 0.006 (11) |
| 65.36 | Kaiser | 4 | — | 5.595 | — | + 0.020 | | |
| 65.42 | Engelmann | 2 | 139.30 | 5.682 | − 0.19 | + 0.104 | | |
| 66.24 | Kaiser | 4 | 139.45 | 5.472 | + 0.75 | − 0.149 | | |
| 66.27 | $\Delta$ | 4 | 138.89 | 5.650 | + 0.22 | + 0.028 | | |
| 66.27 | O. $\Sigma$ | 4.2 | 137.24 | 5.525 | − 1.42 | − 0.097 | − 0.14 (17) | − 0.047 (15) |
| 66.29 | S | 1 | 137.63 | 5.647 | − 1.00 | + 0.024 | | |
| 66.33 | Kaiser | 4 | 138.70 | 5.611 | + 0.10 | − 0.013 | | |
| 67.14 | $\Delta$ | 1 | 138.05 | 5.375 | + 0.35 | − 0.277 | + 0.23 (5) | − 0.078 (5) |
| 67.26 | Barclay | 4 | 137.78 | 5.627 | + 0.20 | − 0.028 | | |
| 68.22 | $\Delta$ | 4 | 136.59 | 5.587 | + 0.16 | − 0.082 | − 0.50 (8) | − 0.061 (6) |
| 68.28 | O. $\Sigma$ | 4.2 | 135.20 | 5.650 | − 1.15 | − 0.019 | | |
| 69.32 | O. $\Sigma$ | 4 | 134.51 | 5.600 | − 0.61 | − 0.061 | − 1.18 (3) | − 0.061 (8) |
| 69.37 | Du | 4 | 133.32 | — | − 1.74 | — | | |
| 70.21 | $\Delta$ | 4 | 134.15 | 5.660 | + 0.06 | + 0.020 | | |
| 70.27 | Du | 2 | 134.34 | — | + 0.31 | — | + 0.08 (10) | + 0.021 (8) |
| 70.28 | O. $\Sigma$ | 4 | 134.00 | 5.658 | − 0.01 | + 0.021 | | |
| 71.18 | $\Delta$ | 4 | 133.35 | 5.653 | + 0.30 | + 0.054 | | |
| 71.28 | Du | 2.1 | 133.79 | 5.450 | + 0.84 | − 0.144 | + 0.07 (10) | − 0.007 (9) |
| 71.31 | O. $\Sigma$ | 4 | 132.38 | 5.558 | − 0.55 | − 0.034 | | |
| 72.21 | Wilson | 2 | 131.36 | 5.542 | − 0.72 | + 0.002 | | |
| 72.23 | $\Delta$ | 4 | 132.39 | 5.513 | + 0.32 | − 0.029 | − 0.01 (12) | + 0.014 (11) |
| 72.31 | O. $\Sigma$ | 4 | 131.61 | 5.598 | − 0.41 | + 0.065 | | |
| 72.33 | Du | 2.1 | 132.84 | 5.535 | + 0.84 | + 0.003 | | |

| Jahr | Beobachter | $g$ | $p$ | $\varrho$ | $B-R$ | | Mittel $B-R$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1873.22 | Wilson & Seab. | 2 | 131°.38 | — | −0°.01 | — | | |
| 73.23 | Δ | 4 | 132.02 | 5″.450 | +0.64 | −0″.019 | +0°.94 (10) | −0″.061 (8) |
| 73.28 | O. Σ | 4 | 133.08 | 5.362 | +1.72 | −0.103 | | |
| 74.09 | Δ | 4 | 131.89 | 5.461 | +0.87 | +0.058 | | |
| 74.13 | Gledhill | 1 | 132.39 | — | +1.39 | — | | |
| 74.17 | Wilson & Seab. | 2 | 131.67 | — | +0.69 | — | +0.73 (13) | +0.023 (9) |
| 74.28 | O. Σ | 4 | 131.34 | 5.415 | +0.38 | +0.026 | | |
| 74.29 | Du | 2.1 | 131.79 | 5.337 | +0.84 | −0.051 | | |
| 75.17 | Δ | 4 | 130.67 | 5.285 | −0.14 | −0.039 | | |
| 75.25 | Sp | 4 | 131.45 | 5.382 | +0.64 | +0.066 | | |
| 75.27 | Wilson & Seab. | 1 | 131.44 | — | +0.63 | — | +0.34 (17) | +0.093 (14) |
| 75.28 | O. Σ | 4 | 130.98 | 5.558 | +0.17 | +0.239 | | |
| 75.31 | Du | 4.2 | 131.44 | 5.438 | +0.63 | +0.121 | | |
| 76.07 | Δ | 2 | 130.62 | 5.268 | −0.28 | −0.018 | | |
| 76.29 | O. Σ | 2 | 130.81 | 5.335 | −0.13 | +0.056 | −0.40 (8) | +0.036 (6) |
| 76.29 | Du | 4.2 | 130.34 | 5.348 | −0.59 | +0.069 | | |
| 77.23 | Sp | 4 | 131.35 | 5.291 | +0.13 | +0.036 | | |
| 77.27 | O. Σ | 4 | 131.23 | 5.304 | −0.01 | +0.049 | −0.06 (12) | +0.003 (12) |
| 77.29 | Δ | 4 | 130.92 | 5.178 | −0.32 | −0.077 | | |
| 78.12 | Δ | 4 | 130.14 | 5.333 | −1.40 | +0.074 | | |
| 78.26 | Wilson & Seab. | 2 | 131.33 | — | −0.26 | | | |
| 78.26 | Jedrz. | 4 | 132.01 | 5.380 | +0.42 | +0.109 | −0.15 (18) | +0.036 (14) |
| 78.29 | O. Σ | 4 | 132.44 | 5.206 | +0.84 | −0.056 | | |
| 78.29 | Du | 4.2 | 130.49 | 5.263 | −1.11 | +0.001 | | |
| 79.27 | Sp | 4 | 131.92 | 5.256 | +0.05 | −0.042 | | |
| 79.28 | Wilson & Seab. | 2 | 133.68 | — | +1.82 | — | +0.76 (10) | −0.036 (8) |
| 79.29 | O. Σ | 4 | 132.74 | 5.269 | +0.88 | −0.030 | | |
| 80.16 | Franz | 2 | 130.60 | 5.545 | −1.35 | +0.194 | | |
| 80.22 | Jedrz. | 4 | 132.50 | 5.193 | +0.56 | −0.159 | +0.19 (7) | −0.041 (6) |
| 80.31 | Seabr. | 1 | 133.72 | — | +1.79 | — | | |
| 81.24 | Jedrz. | 4 | 131.29 | 5.467 | −0.45 | +0.042 | | |
| 81.26 | Seabr. | 1 | 131.37 | — | −0.36 | — | −0.30 (9) | +0.029 (8) |
| 81.30 | Sp | 4 | 131.57 | 5.445 | −0.14 | +0.016 | | |
| 82.25 | Seabr. | 2 | 129.83 | — | −1.38 | — | | |
| 82.26 | Sp | 4 | 131.06 | 5.468 | −0.18 | −0.030 | −0.46 (10) | −0.016 (8) |
| 82.27 | Jedrz. | 4 | 130.94 | 0.497 | −0.29 | −0.002 | | |
| 83.13 | Engelm. | 4 | 129.43 | 5.653 | −1.16 | +0.097 | | |
| 83.29 | Sp | 4 | 130.16 | 5.598 | −0.29 | +0.032 | −0.93 (11) | +0.051 (10) |
| 83.32 | Seabr. | 1 | 128.33 | — | −2.09 | — | | |
| 83.35 | Küstner | 2 | 129.20 | 5.557 | −1.19 | −0.004 | | |
| 84.21 | Perrotin | 2 | 128.95 | 5.561 | −0.63 | −0.054 | −0.42 (6) | −0.037 (6) |
| 84.25 | Sp | 4 | 129.21 | 5.589 | −0.32 | −0.028 | | |
| 85.29 | Engelm. | 4 | 128.18 | 5.654 | −0.21 | +0.002 | −0.06 (8) | −0.024 (8) |
| 85.29 | Sp | 4 | 128.48 | 5.603 | +0.09 | −0.049 | | |
| 86.29 | Jedrz. | 4 | 126.98 | — | −0.23 | — | | |
| 86.30 | Engelm. | 4 | 128.56 | 5.569 | +1.36 | −0.098 | +0.57 (8) | −0.098 (4) |
| 87.24 | Sp | 4 | 125.93 | 5.611 | −0.15 | −0.053 | −0.15 (4) | −0.053 (4) |
| 88.27 | Sp | 4 | 125.03 | 5.697 | +0.15 | +0.053 | +0.15 (4) | +0.053 (4) |

In der vorstehenden Zusammenstellung finden sich die mit Berücksichtigung der Gewichte gebildeten Jahresmittel $B-R$. Letztere wurden nun weiter nach Massgabe der abtheilenden Zwischenräume in folgende Normalörter vereinigt, welche also als das Ergebniss der angestellten Untersuchungen über die persönlichen Fehler betrachtet werden können.

| | $B-R$ | | $g$ | | $p$ | $\varrho$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | ° | " | | | ° | " |
| 1826.2 | + 0.38 | − 0.009 | 17 | 8 | 159.89 | 5.340 |
| 1832.2 | − 0.22 | + 0.040 | 16 | 20 | 154.48 | 5.710 |
| 1835.2 | + 0.07 | + 0.014 | 8 | 8 | 151.43 | 5.602 |
| 1841.2 | − 0.16 | + 0.012 | 24 | 20 | 149.46 | 5.262 |
| 1844.2 | + 0.96 | + 0.033 | 25 | 18 | 151.29 | 5.384 |
| 1847.2 | + 0.13 | − 0.069 | 18 | 17 | 149.01 | 5.500 |
| 1850.2 | − 0.08 | − 0.057 | 14 | 12 | 145.50 | 5.613 |
| 1853.2 | − 0.28 | − 0.044 | 18 | 9 | 141.98 | 5.558 |
| 1856.2 | + 0.15 | + 0.007 | 34 | 30 | 140.32 | 5.402 |
| 1859.2 | + 0.37 | + 0.063 | 22 | 18 | 140.77 | 5.316 |
| 1862.2 | − 0.27 | + 0.042 | 19 | 11 | 140.86 | 5.394 |
| 1865.2 | − 0.14 | − 0.030 | 32 | 28 | 139.57 | 5.536 |
| 1868.2 | − 0.59 | − 0.065 | 21 | 19 | 135.86 | 5.604 |
| 1871.2 | + 0.04 | + 0.009 | 32 | 28 | 133.07 | 5.607 |
| 1874.2 | + 0.62 | + 0.033 | 40 | 31 | 131.59 | 5.428 |
| 1877.2 | − 0.17 | + 0.024 | 38 | 32 | 131.04 | 5.279 |
| 1880.2 | + 0.24 | − 0.014 | 26 | 22 | 132.19 | 5.337 |
| 1883.2 | − 0.64 | + 0.007 | 27 | 24 | 129.90 | 5.568 |
| 1886.2 | + 0.26 | − 0.049 | 24 | 20 | 127.58 | 5.618 |

Ueberblickt man diese Fehlerreihe, so dürfte dieselbe auf einen befriedigenden Anschluss der Theorie an die Beobachtungen deuten. Im Positionswinkel namentlich ist auch die Vertheilung der Vorzeichen eine völlig entsprechende und auffallende Anhäufungen desselben Vorzeichens finden nirgends statt. Für die Distanzen gilt dies nicht in gleichem Grade. Hier sind kleine systematische Abweichungen zu bemerken. Ob dieselben ganz allein den nicht völlig beseitigten persönlichen Fehlern zur Last fallen, ist natürlich nicht mit Sicherheit zu behaupten. Ich möchte aber doch zu dieser Annahme hinneigen, weil das periodenweise Praevaliren einzelner Beobachter weit mehr bemerkbar ist wie in den Positionswinkeln. Auf der anderen Seite freilich muss nochmals hervorgehoben werden, dass das gefundene Rechnungsresultat kein im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate wahrscheinlichstes ist. Dieses wäre nun nach den letzten Normalörtern abzuleiten. Ich glaube indessen, dass die vorliegenden Beobachtungen noch nicht dazu auffordern. Nach mehreren Jahren freilich kann sich die Sache anders gestalten. In Folge des rein interpolatorischen Characters der Formel für die Bewegung des Schwer-

punktes $S_2$ kann es gar keinem Zweifel unterliegen, dass mit der Zeit dieselbe den Beobachtungen nicht mehr genügen wird. Andeutungen dafür, allerdings in höchst unsicherer Weise, enthält die Darstellung der beiden Herschel'schen Beobachtungen. Es würde nicht schwer sein, durch kleine Correctionen auch diese beiden Messungen besser darzustellen, als es die gebrauchten Bahnelemente thun. Der dadurch erzielte Gewinn wäre aber ein durchaus imaginärer. Man wird bei jenen Beobachtungen Fehler von einigen Graden als möglich gelten lassen müssen, ohne die Genauigkeit dieser Messungen zu unterschätzen und dies um so mehr, als diese nur auf je einem Abendmittel beruhen. Es muss hierbei noch auf einen Umstand aufmerksam gemacht werden. Beide genannten Messungsresultate wurden als auf $\frac{A+B}{2}$ sich beziehend angenommen. Für den ersten Positionswinkel ist es beinahe ganz gleichgiltig, ob man annimmt, dass $\frac{A+B}{2}$, $C$ oder $A$, $C$ beobachtet worden ist, weil die 3 Sterne $ABC$ zu jener Zeit sehr nahe in einer geraden Linie standen. Für den Positionswinkel vom Jahre 1802 ist dies aber nicht der Fall. Gewöhnlich wird angenommen, dass die Angabe sich auf $AC$ bezieht. Da aber nachweisbar Herschel an jenem Abende die Sterne $A$ und $B$ nicht getrennt gesehen hat, so scheint es mir bei weitem richtiger, die erwähnte Annahme zu machen. Will man diese Ansicht nicht gelten lassen, so verkleinert sich die obige Differenz $B-R$ um ungefähr 3 Grad, so dass die Beobachtung beinahe genau dargestellt wird. Auf allzu grosse Genauigkeit dieser Messung wird man aber schon, nach der erwähnten Thatsache zu schliessen, nicht rechnen dürfen.

Ein instructives Bild der Bewegungsverhältnisse des Sternes $C$ giebt eine graphische Darstellung der scheinbaren Bahn. Herr List hat auf mein Ersuchen die dieser Abhandlung beigefügte Zeichnung ausgeführt. Hier sind die den Jahresmitteln (pg. 81 ff.) entsprechenden Punkte der Reihe nach mit 1,2 etc. bezeichnet und durch eine gebrochene Linie mit einander verbunden. Die ausgezeichnete Curve stellt die theoretisch mit Hülfe der Ephemeride auf pg. 71 berechneten Oerter dar. Der Massstab ist so gewählt, dass $1^{cm} = 0.''125$. Die Mitte von $A$ und $B$ hat die Coordinaten

$$x_0 = -20.8^{cm}; \quad y_0 = -19.2^{cm}$$

und die rechtwinkeligen Coordinaten $x$, $y$ in Centimetern. welche dem Positionswinkel $p$ und der Distanz $\varrho$ entsprechen, sind nach folgenden Formeln berechnet, welche eine Drehung der Coordinatenaxen um $188^0$ gegen die frühere Lage enthalten:

$$\xi = \varrho \cos (188^0 - p)$$
$$\eta = \varrho \sin (188^0 - p)$$
$$x = 8\,\xi - 20.8$$
$$y = 8\,\eta - 19.2$$

Ein Anblick der Zeichnung dürfte nun darthun, dass die theoretisch berechneten Oerter die scheinbare Bewegung in allen characteristischen Eigenschaften in ganz ausgezeichneter Weise wiedergeben. Dass die kleinen systematischen Abweichungen in Distanz bei dem gewählten sehr grossen Massstab nicht stärker hervortreten, darf ebenfalls als günstig bezeichnet werden.

# Nachtrag.

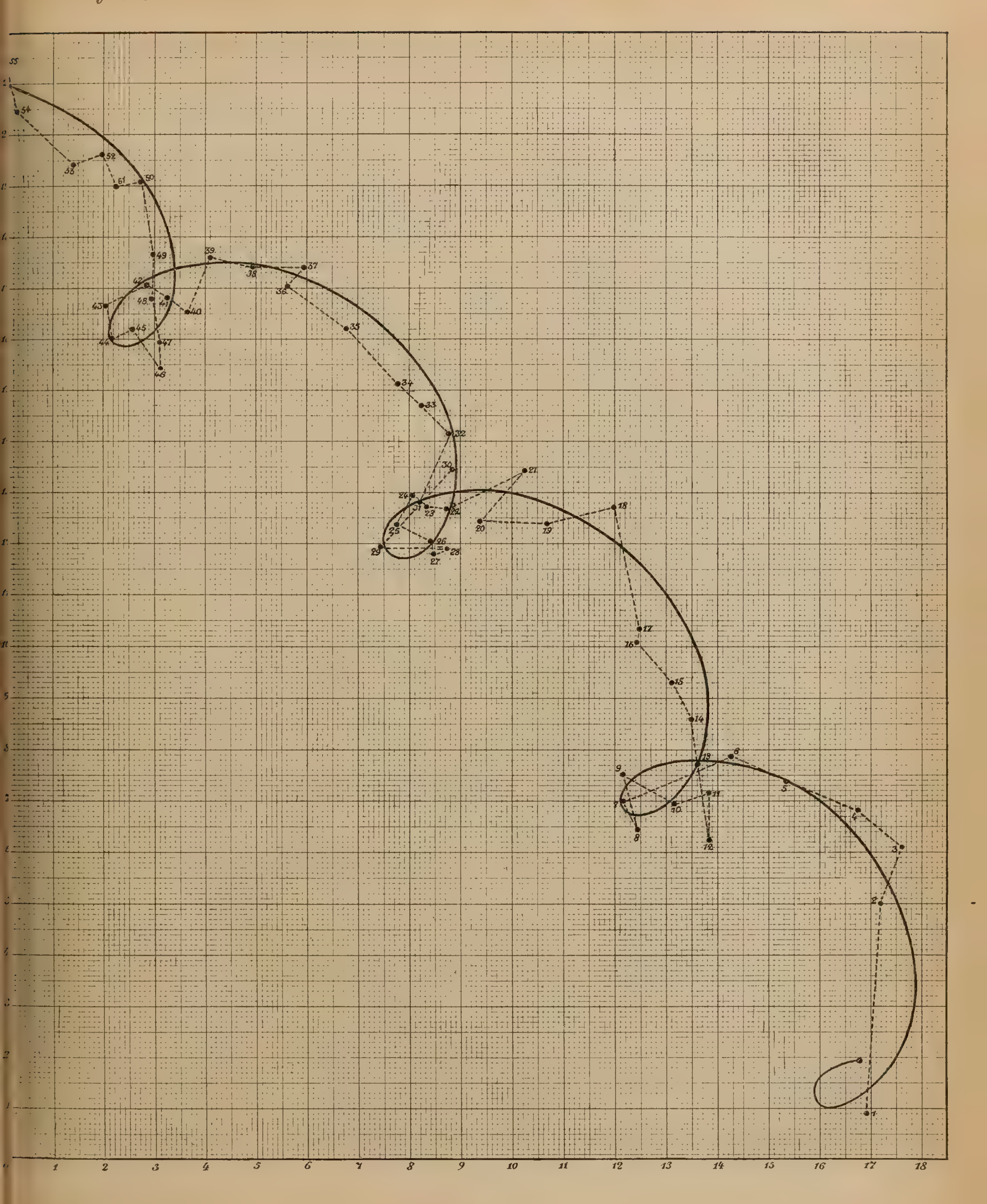
Der freundlichen Gefälligkeit des Herrn Geheimraths O. v. Struve verdanke ich die Mittheilung folgender bisher noch nicht publicirter Messungen. Leider gelangte ich erst in ihren Besitz, als meine Rechnungen beinahe beendet waren und eine Umrechnung mit grösserer Mühe verbunden gewesen wäre. Aus diesem Grunde begnügte ich mich, die in Jahresmittel vereinigten Beobachtungen mit der in vorstehender Abhandlung entwickelten Theorie zu vergleichen. An die Messungen Herrn O. Struve's wurden hierbei nur die in Band IX der Pulcowaer Beobachtungen angegebenen Correctionen angebracht, während die von Herrn Hermann Struve (H. Σ) am 30-zölligen Refractor erhaltenen Beobachtungen ohne jede Correctur benutzt wurden. Hieraus erklärt sich der offenbar systematische Character der übrig bleibenden Differenzen, der zum Theil sehr deutlich hervortritt.

*A* und *B*

| Beob. | Jahr | Anzahl | $p$ | $\varrho$ | *B*—*R* | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| O. Σ | 1881.28 | 3 | 86°.30 | 0″.880 | + 5°.60 | + 0″.070 |
| O. Σ | 84.26 | 3 | 60.63 | 0.953 | — 3.74 | + 0.064 |
| H. Σ | 86.30 | 4 | 49.00 | 0.863 | — 5.73 | — 0.073 |
| H. Σ | 87.30 | 5 | 46.56 | 0.960 | — 3.78 | + 0.004 |
| O. Σ | 88.33 | 3 | 45.85 | 1.015 | — 0.19 | + 0.039 |
| H. Σ | 88.33 | 2 | 44.35 | 0.930 | — 1.69 | — 0.046 |

$\frac{A+B}{2}$ und *C*

| Beob. | Jahr | Anzahl | $p$ | $\varrho$ | *B*—*R* | | reduc. aus |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| O. Σ | 1881.28 | 3 | 130°.80 | 5″.210 | — 0°.92 | — 0″.218 | $\frac{A+B}{2}$, *C* |
| O. Σ | 84.26 | 3 | 130.21 | 5.524 | + 0.69 | — 0.093 | *A*, *C* |
| O. Σ | 84.26 | 3 | 127.69 | 5.601 | — 1.83 | — 0.016 | *B*, *C* |
| H. Σ | 86.30 | 4 | 127.25 | 5.551 | + 0.05 | — 0.116 | *A*, *C* |
| H. Σ | 87.30 | 3 | 126.57 | 5.518 | + 0.56 | — 0.145 | *A*, *C* |
| H. Σ | 88.33 | 2 | 124.40 | 5.505 | — 0.41 | — 0.135 | *A*, *C* |
| O. Σ | 88.33 | 2 | 123.98 | 5.635 | — 0.83 | — 0.005 | *A*, *C* |
| O. Σ | 88.33 | 2 | 123.69 | 5.698 | — 1.12 | + 0.058 | *B*, *C* |


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18

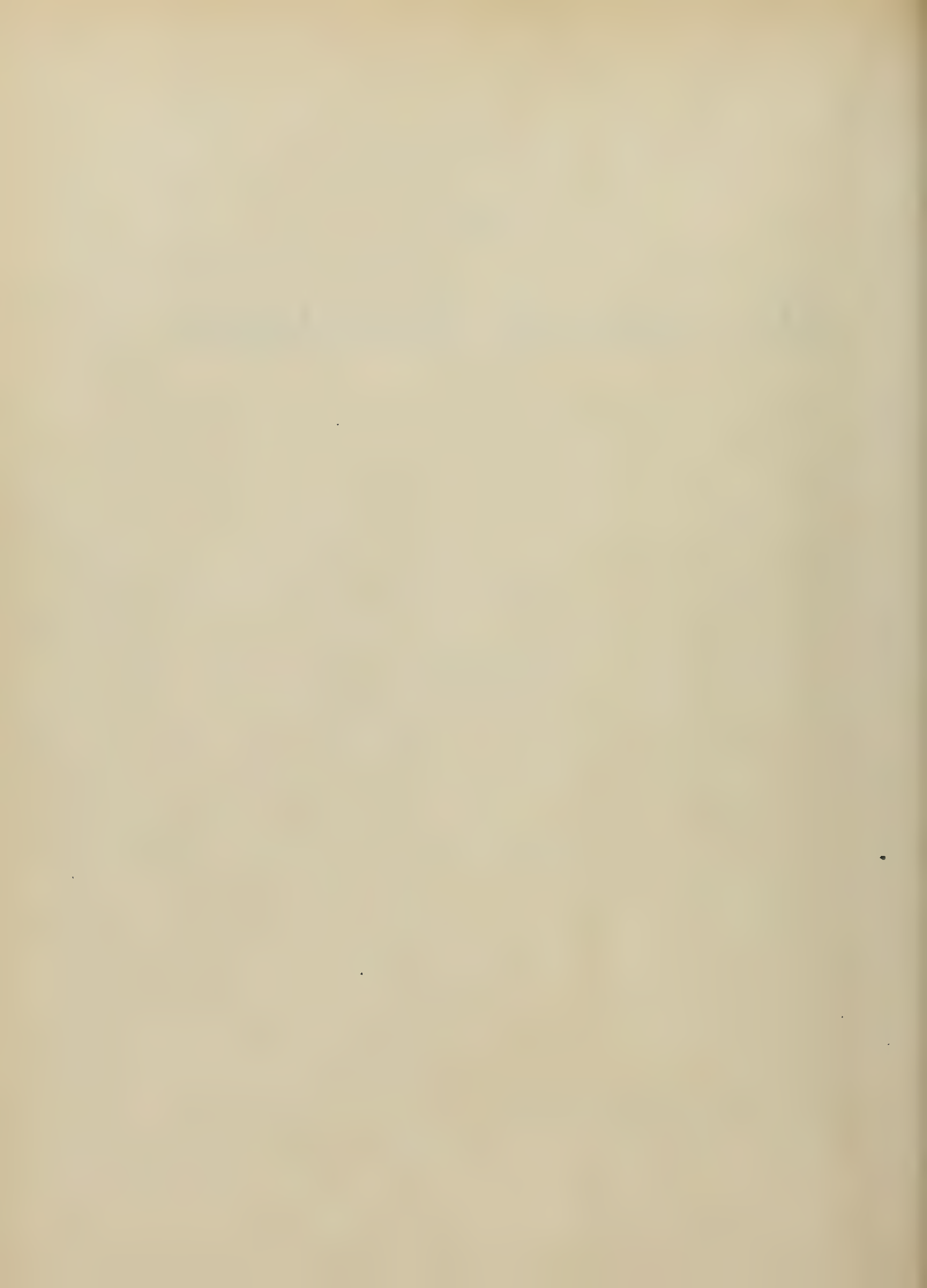


Ueber

# die reducirte Resultante.

Von

**A. Brill**
in Tübingen.



Die Theorie der Resultante eines Systems von Gleichungen lässt sich in einer Richtung erweitern, die, wiewohl zahlreiche Fragen aus dem Gebiet der Geometrie und der Functionentheorie dahin weisen, noch wenig betreten worden ist. Man kann für ein System von $n$ Gleichungen mit $n-1$ Unbekannten, welches durch eine gewisse Anzahl von Werthsystemen der Letzteren befriedigt wird, einen Ausdruck zu bilden verlangen, dessen Verschwinden die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür liefert, dass noch ein weiteres solches Werthsystem existirt. Haben z. B. drei Curven eine Anzahl von Punkten gemeinsam, so ist die Bedingung dafür, dass sie durch einen weiteren (der Lage nach unbestimmten) Punkt alle drei hindurch gehen, das Verschwinden eines in den Coefficienten der Curvengleichungen gebildeten Ausdrucks, in den noch die Coordinaten der angenommenen Verschwindungspunkte eingehen.

In einem früheren Aufsatze (Mathemat. Annalen, Bd. 4, S. 510) habe ich diesen Ausdruck die „reducirte Resultante" genannt und für einzelne Fälle hergestellt, ohne jedoch damals zu einem befriedigenden Abschluss gelangt zu sein.

Im Folgenden beehre ich mich der hohen Classe einen Satz mitzutheilen, vermöge dessen die reducirte Resultante als gemeinsamer Factor gewisser Glieder einer Entwicklung erscheint, welche durch einen übersichtlichen Algorithmus berechnet werden können. Hierdurch ist die Bedeutung jenes Begriffs festgestellt, und seine Berechtigung, sofern es dessen überhaupt noch bedurfte, nachträglich allgemein erwiesen.

Es sei gestattet, die Darstellung auf den Fall von drei Gleichungen mit zwei Unbekannten, also auf den erwähnten Fall von drei Curven

mit gemeinsamen Schnittpunkten zu beschränken, indem die folgenden Ausführungen ohne Weiteres auf den Fall einer beliebigen Anzahl von Gleichungen übertragbar sind.

1.

Zwischen je drei binären (ganzen homogenen) Functionen $f_i$, $\varphi_k$, $\psi_l$ — von der Dimension der Indices in den Veränderlichen $x$, $y$ — besteht im Allgemeinen eine identische Relation, die man folgendermassen findet.

Aus den nicht homogenen Functionen:

$$f_i - \alpha, \quad \varphi_k - \beta, \quad \psi_l - \gamma$$

stelle man durch Elimination von $x$ und $y$ die Resultante her, die eine ganze Function der willkührlich angenommenen Grössen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sein wird:

$$r\ (\alpha\ \beta\ \gamma).$$

Setzt man in derselben für $\alpha \ldots f_i$, für $\beta \ldots \varphi_k$, für $\gamma \ldots \psi_l$ ein, so ist:

$$r\ (f_i,\ \varphi_k,\ \psi_l) = o \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

die gesuchte Relation.

Denn diese Gleichung ist eine identische, weil man zu jedem Werthepaar $x$, $y$ Werthsysteme $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ finden kann, welche die Gleichungen:

$$f_i - \alpha = o; \ \varphi_k - \beta = o; \ \psi_l - \gamma = o \quad \ldots \quad (2)$$

befriedigen. Die letzteren genügen der Gleichung:

$$r\ (\alpha,\ \beta,\ \gamma) = o,$$

welche auch noch bestehen muss, wenn man die $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ durch $f_i$, $\varphi_k$, $\psi_l$ ersetzt. Da dies für jedes beliebige Werthepaar $x$, $y$ der Fall ist, so ist (1) eine identische Gleichung. Dieselbe ist ferner homogen hinsichtlich $x$, $y$. Setzt man nämlich statt $x \ldots xt$, statt $y \ldots yt$, statt $z \ldots zt$; ferner statt $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ bezw. $\alpha t^i$, $\beta t^k$, $\gamma t^l$, so ändern die Gleichungen (2) sich nicht, also kann auch (1) als Folge von (2) sich nicht ändern; (1) ist also homogen.

Man bildet die Resultante aus drei algebraischen Gleichungen zwischen zwei (nicht homogen auftretenden) Unbekannten nach Poisson in folgender Weise.

$f\,(xy)$, $\varphi\,(xy)$, $\psi\,(xy)$ seien ganze Functionen von $x$ und $y$.

Dann füge man den Gleichungen:

$$f(xy) = o$$
$$\varphi(xy) = o$$
$$\psi(xy) = o$$

die weitere zu:

$$t = \lambda x + \mu y$$

und eliminire $x$ und $y$ aus dieser Gleichung und etwa $f = o$, $\varphi = o$. Man erhält so eine Gleichung in $t$ von der Form:

$$T \equiv T_0 t^r + T_1 t^{r-1} + T_2 t^{r-2} + \ldots + T_r = o,$$

deren Grad $r$ gleich der Anzahl der Werthepaare $x$, $y$ ist, welche $f = o$, $\varphi = o$ zugleich befriedigen. Bezeichnet man dieselben durch:

$$x_1 y_1;\ x_2 y_2;\ \ldots x_r y_r,$$

so sind die Coefficienten $T_i$, dividirt durch $T_0$, gleich den elementaren symmetrischen Functionen der Wurzeln:

$$t_i = \lambda x_i + \mu y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots r)$$

der Gleichung $T = o$.

Für den Fall, dass die Resultante der beiden Binärformen, welche je das Aggregat der Glieder höchster Dimension einerseits in $f(xy)$, andrerseits in $\varphi(xy)$ ausmachen, nicht verschwindet, wenn also, geometrisch zu reden, die Curven $f = o$, $\varphi = o$ keinen unendlich fernen Schnittpunkt besitzen, ist $r = mn$, gleich dem Product der Grade von $f$ und $\varphi$, und $T_0$ ist gleich jener Resultante (Serret, höhere Algebra, deutsche Ausg., 1. Aufl. § 269, S. 485).

Die Resultante $R$ aus $f$, $\varphi$, $\psi$ ist nun darstellbar durch das Product:

$$R = T_0^p \psi(x_1 y_1)\, \psi(x_2 y_2) \ldots \psi(x_r y_r),$$

wo $p$ der Grad von $\psi$ ist, $R$ ein Ausdruck, der durch Verwandlung der symmetrischen Funktionen der $x_i\, y_i$ in die Coefficienten der Gleichung $T = o$ auf rationale Form gebracht werden kann. Der Factor $T_0^p$ dient dazu, $R$ zu einer ganzen Function der Coefficienten von $f$ und $\varphi$ zu machen, und kann nur in Ausnahmefällen (wenn besondere Beziehungen zwischen den Coefficienten von $f$, $\varphi$, $\psi$ bestehen) durch eine niedrigere Potenz von $T_0$ ersetzt werden.

Die Resultante aus $f$, $\varphi$, $\psi$ verschwindet insbesondere dann, wenn die constanten Terme in diesen drei Functionen zugleich verschwinden. Daher muss, wenn dieselben $A$, $B$, $C$ sind, $R$ in die Form gebracht werden können:

$$AM + BN + CP,$$

wo $M$, $N$, $P$ die $A$, $B$, $C$ noch enthalten können. Eine ähnliche Bemerkung lässt sich bezüglich der Coefficienten $A'$, $B'$, $C'$ der höchsten Potenzen $x^m$ in $f$, $x^n$ in $\varphi$, $x^p$ in $\psi$, sowie hinsichtlich der Coefficienten derjenigen von $y$ in diesen drei Functionen machen. Denn wenn man mit einer dritten Variabeln $z$ homogen macht, so bleibt es sich gleich, ob man die Resultante aus:

$$\frac{f}{z^m}, \quad \frac{\varphi}{z^n}, \quad \frac{\psi}{z^p}$$

durch Elimination von $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ bildet, oder diejenige aus:

$$\frac{f}{x^m}, \quad \frac{\varphi}{x^n}, \quad \frac{\psi}{x^p}$$

durch Elimination von $\frac{z}{x}$ und $\frac{y}{x}$. Das Resultat ist in jedem Falle $R$. Sowie nun $R$ verschwindet, wenn $A$, $B$, $C$ Null werden, so muss $R$ auch mit $A'$, $B'$, $C'$ verschwinden, also von der Form sein:

$$A'M' + B'N' + C'P'.$$

Wir setzen nunmehr für $f$, $\varphi$, $\psi$ die früher betrachteten Functionen:

$$f_i - \alpha, \quad \varphi_k - \beta, \quad \psi_l - \gamma,$$

dann ist $T_0$, wenn $f_i$ und $\varphi_k$ theilerfremd sind, gleich der Resultante aus diesen Binärformen, und der Coefficient von $\gamma^r = \gamma^{ik}$ in der Resultante:

$$R = r(\alpha\beta\gamma)$$

gleich der $l^{\text{ten}}$ Potenz jener Resultante aus $f_i$ und $\varphi_k$.

Haben $f_i$, $\varphi_k$, $\psi_l$ einen Linearfactor gemeinsam, so verschwindet $r$ identisch. Denn in diesem Fall kann man durch die Transformation:

$$y' = ax + by; \qquad x' = x,$$

wo $ax + by$ der gemeinsame Factor ist, $f_i$, $\varphi_k$, $\psi_l$ auf die Form von Functionen bringen, für welche der Coefficient der höchsten Potenz von $x'$ in allen dreien fehlt. Dann verschwindet aber nach dem Gesagten die Resultante, wenn man sie nach der angegebenen Regel bildet. — An ihre Stelle tritt ein Ausdruck niederen Grades in $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, der wieder zu einer Relation zwischen den Formen führt.

Die Function $r(\alpha\beta\gamma)$ kann ferner in solche niederen Grades rational zerfallen. So wird im Falle $i = k = l$ $r$ die $i^{te}$ Potenz eines Ausdrucks, der sich übrigens auch direct bestimmen lässt (Vgl. Haase, Bd. 2 der Math. Annalen, S. 529, sowie die Note des Verf. ibd. Bd. 5, S. 401).

2.

Das Verfahren, durch welches oben die identische Relation zwischen drei Binärformen hergestellt wurde, wende ich im Folgenden auf drei nicht homogene Formen von zwei Veränderlichen an. Hierbei treffe ich mit Herrn Perrin zusammen, der wohl zuerst[1]) jene Methode der Variation von Formen durch willkührliche Grössen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ für die Aufstellung identischer Relationen fruchtbar gemacht hat. Das Ziel, welches ich hier im Auge habe, ist die Bildung eines Ausdrucks, der auch in dem Fall vorhandener gemeinsamer Werthsysteme noch die Bedeutung einer Resultante besitzt.

Seien wieder $f(xy)$, $\varphi(xy)$, $\psi(xy)$ drei ganze Functionen von $x$, $y$ (von den Graden $m$, $n$, $p$), welche für gewisse Werthsysteme $x$, $y$ zugleich verschwinden können. Bildet man die Resultante aus:

$$f(xy) - \alpha$$
$$\varphi(xy) - \beta$$
$$\psi(xy) - \gamma,$$

so ist dieselbe eine ganze Function von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$:

$$R\,(\alpha\beta\gamma),$$

die wir uns nach aufsteigenden Dimensionen der Grössen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ geordnet denken wollen.

---

1) In der kürzlich erschienenen Abhandlung: Sur la relation, qui existe entre $p$ fonctions entières de $p-1$ variables, Comptes rendus 1888.

Verschwinden zugleich $f$, $\varphi$, $\psi$ für das Werthepaar:

$$x = a, \ y = b,$$

so ordne man diese Functionen nach Dimensionen der Differenzen $x-a$, $y-b$ an. Bezeichnet man die Dimensionen durch Indices und ist $f_i$ das Aggregat der Glieder niedrigster Dimension in $f$, $\varphi_k$ in $\varphi$, $\psi_l$ in $\psi$, ist also:

$$\begin{aligned} f &= f_i + f_{i+1} + \cdots \\ \varphi &= \varphi_k + \varphi_{k+1} + \cdots \\ \psi &= \psi_l + \psi_{l+1} + \cdots, \end{aligned}$$

so erhält man durch Einführung dieser Ausdrücke für $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ in $R\,(\alpha\,\beta\,\gamma)$ eine Gleichung:

$$R\,(f, \varphi, \psi) = o,$$

deren Glieder von gleichhoher Dimension in $x-a$, $y-b$ je für sich ein identisch verschwindendes Aggregat geben müssen. Um unter diesen die Glieder niedrigster Dimension zu erhalten, nehme man in $R\,(\alpha\beta\gamma) = o$ die Grössen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sehr klein an. Haben dann

$$f = o, \quad \varphi = o$$

in $x = a$, $y = b$ einen Schnittpunkt von der Multiplicität $\pi$, so bestimmen sich $\pi$ von den Wurzelpaaren, die bei kleinen Werthen von $\alpha$, $\beta$ die Gleichungen:

$$f - \alpha = o \quad \varphi - \beta = o$$

befriedigen, dadurch, dass man aus:

$$f(a + \delta a, \ b + \delta b) - \alpha = o; \quad \varphi\,(a + \delta a, \ b + \delta b) - \beta = o$$

die kleinen Grössen $\delta a$, $\delta b$ berechnet. Dies geschieht aber mit Hilfe der niedrigsten Glieder in der Entwicklung von $f$ und $\varphi$; insbesondere erhält man, wenn die Resultante aus $f_i$ und $\varphi_k$ nicht verschwindet, aus:

$$f_i\,(\delta a, \delta b) - \alpha = o; \quad \varphi_k\,(\delta a, \delta b) - \beta = o$$

$\pi = ik$ Werthepaare $\delta a$, $\delta b$. Setzt man jedes derselben in:

$$\psi\,(a + \delta a, \ b + \delta b) - \gamma$$

ein, wobei man sich, wenn $f_i$, $\varphi_k$, $\psi_l$ keinen Factor gemeinsam haben, auf:

$$\psi_l\,(\delta a, \delta b) - \gamma$$

beschränken kann, und bildet das Product der $\pi$ Factoren, so ist dasselbe ein Factor der Resultante $R(\alpha\beta\gamma)$ von $f-\alpha$, $\varphi-\beta$, $\psi-\gamma$. Andererseits aber ist dasselbe auch das Resultat der Elimination von $\delta a$, $\delta b$ aus den Gliedern niedrigster Ordnung von $f-\alpha$, $\varphi-\beta$, $\psi-\gamma$, geschrieben in $\delta a$, $\delta b$ statt $x-a$, $y-b$, und zwar, wenn $f_i$, $\varphi_k$, $\psi_l$ keinen gemeinsamen Factor haben, die Resultante $r(\alpha\beta\gamma)$ aus:

$$f_i\,(\delta a, \delta b) - \alpha = o$$
$$\varphi_k(\delta a, \delta b) - \beta = o$$
$$\psi_l\,(\delta a, \delta b) - \gamma = o.$$

Aus den Gliedern niedrigster Dimension der Entwicklung von $R(\alpha\beta\gamma)$ nach Potenzen von $\alpha, \beta, \gamma$ lässt sich somit der Factor $r(\alpha\beta\gamma)$ ausscheiden, und $R$ ist von der Form:

$$R(\alpha\beta\gamma) = r(\alpha\beta\gamma)\,P + R'(\alpha\beta\gamma),$$

wo die Glieder in $R'$ alle von höherer Dimension sind, wie die in $r.P$ auftretenden.

Weil $r(\alpha\beta\gamma)$, wenn man $\alpha, \beta, \gamma$ wiederum durch $f_i$, $\varphi_k$, $\psi_l$ ersetzt, eine homogene Function von $x-a$, $y-b$ wird (§ 1), so verschwinden mit:

$$r\,(f_i\,\varphi_k\,\psi_l)$$

auch die Glieder niedrigster Dimension von $R(f\varphi\psi)$ identisch.

Wenn $f_i$, $\varphi_k$, $\psi_l$ einen gemeinsamen Theiler besitzen, geometrisch gesprochen, wenn die Curven:

$$f(xy) = o;\;\; \varphi(xy) = o;\;\; \psi(xy) = o$$

in $x = a$, $y = b$ ein oder mehrere Elemente gemeinsam haben (sich berühren), so tritt an die Stelle von $r(\alpha\beta\gamma)$, welches alsdann identisch verschwindet, eine andere Function, die sich — für kleine Werthe $\alpha\beta\gamma$ — durch Elimination der gleichfalls kleinen Grössen $\delta a$, $\delta b$ aus:

$$f_i\,(\delta a, \delta b) + f_{i+1}\,(\delta a, \delta b) + \cdots - \alpha = o$$
$$\varphi_k(\delta a, \delta b) + \varphi_{k+1}(\delta a, \delta b) + \cdots - \beta = o$$
$$\psi_l\,(\delta a, \delta b) + \psi_{l+1}\,(\delta a, \delta b) + \cdots - \gamma = o$$

berechnen lässt, indem man sich auf die Glieder niederster Dimension in $\alpha, \beta, \gamma$ beschränkt. Bei der grossen Zahl von Möglichkeiten jedoch, die hierbei auftreten können, verzichte ich darauf, näher auf diesen Fall

einzugehen, und nehme im Folgenden an, dass $r(\alpha\beta\gamma)$ und die analogen Bildungen nicht identisch verschwinden.

Der Factor $P$ von $r$ kann nun entweder selbst eine Function von $\alpha, \beta, \gamma$ oder ein von diesen Grössen unabhängiger Ausdruck allein der Coefficienten von $f, \varphi, \psi$ sein. Im ersteren Falle giebt es ausser dem Werthsystem, für das $r$ verschwindet, noch ein anderes von sehr kleinen Grössen $\alpha, \beta, \gamma$, für welches $R(\alpha, \beta, \gamma) = o$ wird, also die Gleichungen:

$$f(xy) - \alpha = o; \quad \varphi(xy) - \beta = o; \quad \psi(xy) - \gamma = o$$

zugleich bestehen; das heisst, es giebt noch einen weiteren Punkt $a' \, b'$, für welchen $f, \varphi, \psi$ zugleich verschwinden. Ist ein solcher nicht vorhanden, so muss der zweite Fall eintreten; $P$ ist von $\alpha\beta\gamma$ unabhängig. Weil $r$ nicht identisch verschwindet, so repräsentirt in diesem Fall die Gleichung:

$$P = o$$

die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $f, \varphi, \psi$ einen weiteren gemeinsamen Verschwindungswerth besitzen, $P$ muss also die „reducirte Resultante“ sein.

Haben aber $f = o$, $\varphi = o$, $\psi = o$ ausser in $a, b$ noch in $a', b'$; $a'', b''$; .... Punkte gemeinsam, so findet man die reducirte Resultante auf folgende Weise:

Man entwickle $f(xy)$, $\varphi(xy)$, $\psi(xy)$:

1. Nach Potenzen von $x - a$, $y - b$. Seien $f_i, \varphi_k, \psi_l$ die wirklich auftretenden Glieder niedrigster Dimension, und sei:

$$r(f_i, \varphi_k, \psi_l) = o$$

die (nach § 1) bestehende identische Relation zwischen den Binärformen $f_i, \varphi_k, \psi_l$;

2. Nach Potenzen von $x - a'$, $y - b'$. Zwischen den Gliedern $f_{i'}, \varphi_{k'}, \psi_{l'}$ niedrigster Dimension bestehe die Relation:

$$r'(f_{i'}, \varphi_{k'}, \psi_{l'}) = o,$$

und so weiter.

Dann ist das Aggregat der Glieder niederster Dimension, die in der Entwicklung der Resultante $R(\alpha\beta\gamma)$ von:

$$f - \alpha, \quad \varphi - \beta, \quad \psi - \gamma$$

wirklich auftreten, gleich dem Product [1]):

$$P \cdot r(\alpha\beta\gamma) r'(\alpha\beta\gamma) r''(\alpha\beta\gamma) \cdots,$$

wo der Factor $P$ von $\alpha, \beta, \gamma$ unabhängig ist, wenn alle gemeinsamen Schnittpunkte von $f = o$, $\varphi = o$, $\psi = o$ bei der Bildung des Products der $r$ berücksichtigt sind. Das Verschwinden von $P$ drückt dann die Bedingung dafür aus, dass zu den vorhandenen Verschwindungssystemen $a\, b$; $a'\, b'$; $a''\, b''$; .... ein weiteres hinzutritt. Mit Rücksicht darauf, dass die Functionen $r(\alpha\beta\gamma)$ ... als nicht verschwindend angenommen wurden, ist $P = o$ als die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Vermehrung der gemeinsamen Werthsysteme anzusehen, weil nur, wenn $P = o$ ist, sich der Grad der Glieder niedrigster Ordnung in $R(\alpha\beta\gamma)$ über den des Products $r.r'.r''$... hinaus erhöht. Der Ausdruck $P$ ist also die reducirte Resultante.

3.

Für die wirkliche Darstellung der reducirten Resultante $P$ von drei Curven $f = o$, $\varphi = o$, $\psi = o$, die in den Punkten $a, b$; $a', b'$; $a'', b''$; .... Schnittpuncte von der Multiplicität $\mu, \nu, \pi$; $\mu', \nu', \pi'$; $\mu'', \nu'', \pi''$; .... bilden, genügt es, eines der Glieder niedrigster Ordnung in der Entwicklung von $R(\alpha\beta\gamma)$ zu berechnen und durch das entsprechende Glied des Products $r(\alpha\beta\gamma) . r'(\alpha\beta\gamma)$ .... zu dividiren.

So z. B. ist der Coefficient $\Gamma_\omega$ von $\gamma^{\pi+\pi'+\pi''+\cdots}$ in $R$, wenn:

$$\pi + \pi' + \pi'' + \cdots = \omega$$

gesetzt wird, bis auf einen Zahlenfactor gleich:

$$\Gamma_\omega = \left\{ \frac{\partial^\omega R(\alpha\beta\gamma)}{\partial \gamma^\omega} \right\} = \left\{ \frac{\partial^\omega R}{\partial C^\omega} \right\},$$

wo das Einschliessen in Klammern bedeutet: für $\alpha = \beta = \gamma = o$, und $C$ das constante Glied in dem Ausdruck $\psi(xy)$ ist. Wenn man ferner

---

1) In der oben genannten Abhandlung macht bereits Herr Perrin die Bemerkung, dass, wenn drei Curven ein System von einfachen Schnittpuncten gemeinsam haben, das Aggregat der (in diesem Falle homogenen) Glieder niedrigster Ordnung von $R(\alpha\beta\gamma)$ in ein Product von linearen Factoren zerfällt, welche einzeln den gemeinsamen Puncten entsprechen.

die Resultante von $f$, $\varphi$, $\psi$ wie in § 1 durch die symmetrischen Functionen der Schnittpuncte der Curven:

$$f(xy) = o; \quad \varphi(xy) = o$$

darstellt. so wird:

$$\Gamma_\omega = T_0^p \, \psi(x_1 y_1) \, \psi(x_2 y_2) \cdots \psi(x_\varrho y_\varrho),$$

wo $T_0$ der Coefficient der höchsten Potenz von $t$ in der Resultante aus $f(xy)$, $\varphi(xy)$ und $t - \lambda x - \mu y$ (s. § 1) ist, $p$ die Ordnung des höchsten Gliedes in $\psi(xy)$, $\varrho$ die Anzahl der Schnittpunkte von $f = o$ und $\varphi = o$, die nicht in die gemeinsamen Puncte $a, b$; $a', b'$; .... fallen, und nicht unendlich grosse Coordinaten besitzen. Wenn Schnittpuncte von $f$ und $\varphi$ von der letzterwähnten Art überhaupt nicht auftreten, so ist:

$$\omega + \varrho = mn,$$

wo $m$ und $n$ die Gradzahlen von $f$ und $\varphi$ sind. Dividirt man den Ausdruck $\Gamma_\omega$ durch den Coefficienten von $\gamma^\omega$ in dem Product:

$$r(\alpha\beta\gamma) \, r'(\alpha\beta\gamma) \, r''(\alpha\beta\gamma) \cdots,$$

so erhält man die reducirte Resultante. Da nun nach Voraussetzung die $r, r', \ldots$ identisch nicht verschwinden, was gleichbedeutend ist mit der Annahme, dass $f_i$, $\varphi_k$, $\psi_l$ keinen gemeinsamen Theiler haben (§ 1), ferner $f_{i'}$, $\varphi_{k'}$, $\psi_{l'}$ keinen, u. s. w., so ist der Coefficient von $\gamma^\omega$ in $r . r' . r'' \cdots$ gleich dem Product der Resultanten $(f_i \, \varphi_k)$, $(f_{i'} \, \varphi_{k'})$, $(f_{i''} \, \varphi_{k''})$.... je der eingeklammerten Binärformen, erhoben auf die $l^{\text{te}}$, $l'^{\text{te}}$, .... Potenz (§ 1). Die reducirte Resultante von $f$, $\varphi$, $\psi$ ist also:

$$P = \frac{\Gamma_\omega}{(f_i \varphi_k)^l \, (f_{i'} \varphi_{k'})^{l'} \cdots},$$

während die Zahlen $\pi, \pi', \ldots$ die Werthe $ik, i'k', \ldots$ haben, so dass der Grad von $P$ in den Coefficienten von $\psi$ wird:

$$\begin{aligned} \varrho &= mn - ik - i'k' - \cdots \\ &= mn - \Sigma ik. \end{aligned}$$

Andererseits sind bekanntlich die in $\Gamma_\omega$ auftretenden symmetrischen Functionen der $x_1 y_1$, $x_2 y_2, \ldots$ von der Ordnung $p$ in den Coefficienten der Gleichung $T = o$, also von der Ordnung z. B. von $T_0^p$. Aber $T_0$ (§ 1) ist die Resultante aus den Gliedern höchster Dimension in $f$ und $\varphi$, also

von der Ordnung $n$ in den Coefficienten von $f$, $m$ in denen von $\varphi$; $T_0$ hat also den Grad $np$, $mp$ bezw. in den Coefficienten von $f$ und $\varphi$. Der Quotient $P$ ist hiernach von der Ordnung:

$$np - \Sigma il$$

in den Coefficienten von $f$,

$$mp - \Sigma kl$$

in denen von $\varphi$. — Vergleicht man diese Zahlen mit der oben erhaltenen $\varrho$, so liegt in der symmetrischen Bildung der drei Ausdrücke ein nachträglicher Beweis für die symmetrische Gestaltung des (unsymmetrisch entstandenen) Endausdrucks $P$ hinsichtlich der Coefficienten von $f$, $\varphi$, $\psi$, und eine Bestätigung dafür, dass die aus $T_\omega$ auszuscheidenden Factoren alle gefunden sind.

Anwendungen des Vorstehenden auf die Bildung von Resultanten aus Correspondenzgleichungen, wie sie in der Theorie der algebraischen Functionen auftreten. behalte ich mir vor an einer anderen Stelle mitzutheilen.

Andere Beispiele von reducirten Resultanten, auch solche, wobei eine Berührung der Curven in den gemeinsamen Puncten angenommen wird, findet man in der früher erwähnten Abhandlung des Verfassers vom Jahre 1871.

Handelt es sich um eine Ausdehnung des Obigen auf den Fall von vier Flächengleichungen, so bedarf es keiner neuen Betrachtungen, wenn die vier Flächen nur Schnittpuncte (von übrigens beliebiger Multiplicität), nicht aber Linienelemente gemeinsam haben. Analoges gilt für Gleichungssysteme mit mehr Veränderlichen.



# Zur Theorie

der

# Berührungscurven der ebenen Curve vierter Ordnung.

---

Von

**M. Noether.**

---



Die allgemeinsten quadratischen Systeme von Curven $n^{ter}$ Ordnung, welche eine gegebene ebene Curve $4^{ter}$ Ordnung, $\Omega$, an allen Schnittstellen in $1^{ter}$ Ordnung berühren, sind seit Hesse und Steiner (Crelle J. 49, 55) vielfach behandelt worden. Insbesondere ist in Bezug auf die 36 $\infty^3$-Systeme von solchen Berührungscurven $3^{ter}$ Ordnung, für welche die je 6 Berührungspunkte nicht auf einem Kegelschnitt liegen, von Clebsch (Math. Annalen III) bemerkt worden, dass innerhalb eines jeden dieser Systeme diejenigen Curven, welche noch je einen Doppelpunkt haben, in 8 völlig getrennte $\infty^2$-Schaaren zerfallen, welche einzeln selbst wieder nur quadratisch in den beiden Parametern sind; die Schnittpunkte von je zwei Curven irgend eines dieser $8 \cdot 36$ Untersysteme haben ausgezeichnete Lageneigenschaften, und diese Untersysteme sind den $8 \cdot 36$ Aronhold'schen Siebensystemen von Doppeltangenten eindeutig zugeordnet.

Dass auch in allen höheren Systemen von Berührungscurven von $\Omega$ quadratische Untersysteme mit analogen Eigenschaften existiren, ist zwar von mir in einer Note in den „Berichten der Erlanger physik.-medic. Societät“ [1]) angedeutet worden, indem ich eine unmittelbar ausdehnbare einfache Methode gab, um jene Unterschaaren von Curven $3^{ter}$ Ordnung aufzufinden, zum Zweck, die von Clebsch a. c. O. angegebene Abbildbarkeit der Doppelebene, welche $\Omega$ als Uebergangscurve hat, auf die einfache Ebene nachzuweisen. In dieser Methode und dieser Abbildung hat man alle Mittel zur Untersuchung dieser bemerkenswerthen Untersysteme, die alle auf's Engste ausgezeichneten Systemen von Doppeltangenten zugeordnet sind. Aber weder verfolgt die Specialuntersuchung,

---

1) Heft 10, 1878: „Ueber die ein-zweideutigen Ebenentransformationen.“

welche Herr De Paolis dieser Abbildung gewidmet hat,[1]) die Untersysteme, noch finden sich dieselben sonst irgendwo hervorgehoben.

Ich erlaube mir daher, eine systematische Behandlung der Theorie dieser Systeme (in Nr. 1) mit einer Reihe von Ausführungen (in Nr. 3—7), im Anschluss an die aus Nr. 1 folgende Abbildung (Nr. 2), hier vorzulegen. Ich thue dies auch aus dem Grunde, weil von den unzähligen Sätzen über Lagenverhältnisse der Schnitt- und Berührungspunkte der Doppeltangenten und der Berührungscurven von $\Omega$ überhaupt, welche unsere allgemeine Methode alle als specielle Fälle in sich begreift, bisher nur die allereinfachsten ausgesprochen worden sind; beschränke mich aber in den Beispielen von Nr. 7 auf einige die Doppeltangenten betreffenden Sätze.

Ferner benutze ich die Gelegenheit, um in (Nr. 1—4) einmal eine vollständige algebraische Begründung der Charakteristikentheorie zu geben, die zu den $\Omega$ in 1[ter] Ordnung berührenden Curven gehört. Diese Theorie ist bisher entweder aus transcendenten Beziehungen abgeleitet, oder, wenn algebraisch, nur ganz unvollständig begründet und entwickelt worden. Der Theil der Begründung, welcher zum Nachweise der völligen Gleichartigkeit der 36 eigentlichen geraden Charakteristiken unter sich etc. sich der Cremona'schen Ebenentransformationen bedient, findet sich auch in der De Paolis'schen Abhandlung (auch implicit in meiner Note über Thetafunctionen, Erl. Berichte, 1878). Da diese Theorie, insbesondere der letzte Satz von Nr. 4, so unmittelbar und mit so grosser Leichtigkeit aus jedem einzelnen Doppeltangentensystem die allgemeinsten von denselben Eigenschaften anzuschreiben erlaubt, so habe ich in Nr. 7 die Sätze meistens nur an speziellen einzelnen Systemen ausgesprochen.

---

2) „La trasformazione piana doppia di terzo ordine primo genere e la sua applicazione alle curve del quarto ordine.“ (Mem. d. R. Acc. d. Lincei, Ser. 3, Bd. II, 1878.)

## 1. Berührungssysteme.

Die Grundcurve $4^{\text{ter}}$ Ordnung, auf welche sich alle unsere Betrachtungen beziehen, sei überall mit

$$\Omega_4(\xi) \equiv \Omega_4 \equiv \Omega = o$$

bezeichnet. Sei $C(\xi) = o$ eine $\Omega_4$ an allen Schnittstellen in $1^{\text{ter}}$ Ordnung berührende Curve $r^{\text{ter}}$ Ordnung; so wird das „System" der zu $C$ gehörigen Berührungscurven $C'$ an $\Omega$ definirt durch die Identität

$$(1) \qquad C(\xi) \cdot C'(\xi) \equiv P^2(\xi) - Q'(\xi) \cdot \Omega(\xi),$$

wo $P(\xi) = o$ alle möglichen Curven irgend einer Ordnung sind, welche durch die Berührungspunkte der Curve $C$ mit $\Omega$ gelegt werden können. Solche Systeme gibt es nur eine e n d l i c h e Anzahl, indem, wenn man zu Stelle von $C$ irgend eine der Curven $C'$ setzt, das System sich nicht ändert. Man braucht daher für $C$ nur zu nehmen:

1) jede der Doppeltangenten von $\Omega$, was ebensoviele verschiedene „ungerade eigentliche Systeme", oder kurz „ungerade Systeme", liefert;

2) die verschiedenen Curven $3^{\text{ter}}$ Ordnung, die $\Omega$ in drei gegebenen und drei weiteren Punkten berühren, welche 6 Punkte nicht auf einem Kegelschnitt liegen sollen: die „geraden eigentlichen Systeme", oder kurz „die geraden Systeme";

3) die Kegelschnitte, die $\Omega$ in einem gegebenen und drei weiteren Punkten berühren, welche 4 Punkte nicht auf einer Geraden liegen sollen: die „Gruppensysteme";

4) $C(\xi)$ als Quadrat einer linearen Function. Dieser uneigentliche Fall von 3), in welchem die vier Punkte auf einer Geraden liegen, was $C(\xi)$ zu einem vollständigen Quadrat macht, führt nur auf Ausdrücke $C'(\xi)$, die vermöge $\Omega(\xi) = o$ ebenfalls vollständige Quadrate sind, und wird im Folgenden nur in § 6, I berücksichtigt.

Man kann den Systemsbegriff auch so fassen: Zwei Berührungscurven gehören zu einem System zusammen, wenn ihre Berührungspunkte, einfach genommen, zwei „corresiduale" Gruppen bilden. Und umgekehrt

bildet jede zu einer Berührungsgruppe corresiduale (und jede residuale) Gruppe von Punkten eine Berührungsgruppe desselben Systems.

Nimmt man $C(\xi)$ und die Ordnung von $P(\xi)$ fest an, und legt alle Curven $P(\xi)$ dieser Ordnung $s$, so erhält man eine quadratische Schaar von Curven $C'(\xi) = o$, der Ordnung $r' = 2s - r$, von der Mannigfaltigkeit $\infty^{2r'-3}$ (ausgenommen $r' = 1$), wenn man vermöge der Gleichung $\Omega(\xi) = o$ reducirt; also eine quadratische $\infty^{2r'-3}$ Schaar von Gruppen von je $2r'$ doppelt zu zählenden Punkten auf $\Omega$. Ohne Reduction durch $\Omega(\xi) = o$ wird die Schaar der $C'(\xi) = o$ eine quadratische $\infty^{\frac{1}{2}r'(r'-1)}$ Schaar, indem zu den $2r' - 3$ quadratisch eingehenden Parametern jener Schaar noch $\frac{1}{2}(r' - 3)(r' - 2)$ linear eingehende hinzukommen. Die Gruppen von je $2r'$ Punkten, alle einfach gezählt, bilden auf $\Omega$ eine lineare Vollschaar, ausgeschnitten von den Curven $P(\xi) = o$.

Im Folgenden sollen ausgezeichnete Theilschaaren der $\infty^{\frac{1}{2}r'(r'-1)}$ Schaar von Curven $C'(\xi) = o$ betrachtet werden, nämlich solche, welche ausserhalb $\Omega$ bewegliche Doppelpunkte besitzen und doch die Parameter in keiner weiteren Irrationalität enthalten, als die Grundschaar, also quadratische Schaaren bleiben. Man erreicht dies dadurch, dass man die Function $Q'(\xi)$ in Gleichung (1) zu einem vollen Quadrat werden lässt, wobei man aber $r$ im Allgemeinen nicht mehr auf 1, 2 oder 3 reduciren kann.

Sei nämlich in (1) $C(\xi) = o$ eine irreducible Curve $r^{\text{ter}}$ Ordnung, welche $\Omega$ in $2r$ Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{2r}$ berühre und $d$ Doppelpunkte $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_d$ ausserhalb $\Omega$ besitze. Man lege die Schaar $P(\xi) = o$ der Curven $s^{\text{ter}}$ Ordnung $(s \geqq r)$, welche durch die Punkte $\alpha$ und $\beta$ gehen:

$$\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_t P_t + K \cdot C = o, \tag{2}$$

wo die $\lambda_i$ willkürliche Parameter, $K$ eine beliebige Curve $(s - r)^{\text{ter}}$ Ordnung und

$$t \geqq rs - \tfrac{1}{2}(r-1)(r-2) - (2r + d) = r(s-2) - 2d - [\tfrac{1}{2}(r-1)(r-2) - d]$$

ist. Dieselben treffen $C = o$ in einer $\infty^t$-Schaar von Gruppen von je $r(s - 2) - 2d$ Punkten. Nun wird später gezeigt werden, dass eine Reihe von Fällen existirt, in welchen diese Gruppenschaar identisch ist mit derjenigen, welche von zu $C$ adjungirten Curven $(s - 2)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\lambda_0 Q_0 + \lambda_1 Q_1 + \cdots + \lambda_t Q_t + K' C = o \tag{3}$$

aus $C$ ausgeschnitten wird (so ist unmittelbar klar, dass dies für $d = \frac{1}{2}(r-1)(r-2)$, d. h. wenn das Geschlecht von $C$ gleich $o$ ist, eintritt); für diese Fälle also wird nach dem Restsatz:

$$(4)\quad Q_0(\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_t P_t) - P_0(\lambda_0 Q_0 + \lambda_1 Q_1 + \cdots + \lambda_t Q_t) \equiv C \cdot D,$$

oder

$$(4')\quad Q_0(\Sigma\lambda_i P_i + KC) - P_0(\Sigma\lambda_i Q_i + K'C) \equiv C(D + KQ_0 + K'P_0)$$

wo $D + KQ_0 + K'P_0 = o$ eine Curve der Ordnung $2s - r - 2$ ist, welche durch die $(s-r)(s-2)+d$ ausserhalb $C$ liegenden beweglichen Schnittpunkte $\gamma_\lambda$ von

$$(5)\qquad P \equiv \Sigma\lambda_i P_i + KC = o, \quad Q \equiv \Sigma\lambda_i Q_i + K'C = o$$

hindurchgeht. Der Curvenbüschel $2s^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$P^2 - \varrho Q^2 \Omega = o,$$

trifft aber $C = o$ in $2\big(r(s-2) - 2d\big) + 4r + 4d = 2rs$ von $\varrho$ unabhängigen Punkten; man kann also $\varrho$ so bestimmen, dass eine Curve des Büschels $C$ zum Factor hat:

$$P^2 - \varrho' Q^2 \Omega \equiv C \cdot C'.$$

Dabei wird $\varrho'$ auch von den Parametern $\lambda$ unabhängig; denn sei

$$P_0^2 - \varrho_0 Q_0^2 \Omega \equiv C \cdot C_0',$$

so folgt für $C = o$

$$\sqrt{\varrho_0} \cdot Q_0 P \pm \sqrt{\varrho'}\, Q P_0 = o,$$

was in Verbindung mit (4) $\varrho' = \varrho_0$ liefert. Wir mögen daher $\varrho' = 1$ setzen:

$$(6)\qquad P^2 - Q^2 \Omega \equiv C \cdot C'.$$

Hier erhält man in $C'(\xi) = o$ eine Schaar von Curven der Ordnung $2s - r$, welche die $\frac{1}{2}s(s+3) - 2r - d$ oder mehr Parameter von (2), und etwaige weitere Parameter von $Q$, quadratisch enthalten, die Curve $\Omega$ je in $2(2s-r)$ Punkten berühren und je $(s-r)(s-2)+d$ bewegliche Doppelpunkte $\gamma_\lambda$, die sich aus (5) ergeben, enthalten. Diese Curven bilden eine zu $C$ gehörige Unterklasse in dem ganzen zu $C$ gehörigen Berührungssysteme.

Denkt man sich die ganze $\xi$-Ebene mit zwei Blättern überdeckt, indem man über jedem Punkt die beiden Werthe von $\sqrt{\Omega}$ aufträgt, Blätter, die also längs $\Omega = o$ verzweigt sind, so kann man die Curve $C'(\xi) = o$ in zwei übereinanderlagernde Curven rational trennen, je nachdem man $\sqrt{\Omega} = \mp \frac{P}{Q}$ nimmt. Wir wollen etwa die durch

$$(7) \qquad P + Q\sqrt{\Omega} = o$$

bestimmte Schaar betrachten.

Von den Doppelpunkten $\gamma_\lambda$ der Curven $C'$ gilt dann: sie sind nur scheinbare, d. h. die beiden Zweige einer $C'$ laufen an einer solchen Stelle in verschiedenen Blättern; und diese beiden Zweige liegen harmonisch zu den beiden Richtungen, welche die Curven $P = o$ und $Q = o$ daselbst haben. Denn beschränkt man sich in Gleichung (6) auf die Glieder zweiter Dimension an der Stelle $\gamma_\lambda$, so sagen dieselben aus, dass die 3 Richtungspaare von $P^2$, $Q^2$ und $C'$ in Involution liegen; ist also für den einen Zweig von $C'$ $\frac{P}{Q} = a$, so ist für den andern Zweig $\frac{P}{Q} = -a$, und für den ersten Zweig wird $\sqrt{\Omega} = -a$, für den zweiten $\sqrt{\Omega} = +a$.

Auch bei zwei Curven der Schaar $C'$ kann man die wirklichen von den scheinbaren Schnittpunkten unterscheiden. Hat man für zwei solche Curven nach (6):

$$P_1^2 - Q_1^2 \Omega = o \text{ und } P_2^2 - Q_2^2 \Omega = o\,,$$

so gilt für die wirklichen Schnittpunkte:

$$P_1 + Q_1\sqrt{\Omega} = o\,, \qquad P_2 + Q_2\sqrt{\Omega} = o\,,$$

also

$$P_1 Q_2 - P_2 Q_1 = o\,.$$

Nun ist nach (4)

$$P_1 Q_2 - P_2 Q_1 = C \cdot N$$

wo $N = o$ eine Curve der Ordnung $2s - r - 2$ ist, welche durch die $(s-r)(s-2) + d$ Doppelpunkte $\gamma_{\lambda_1}$ der zu $P_1 Q_1$ gehörigen Curve $C_1'$ und die $(s-r)(s-2) + d$ Doppelpunkte $\gamma_{\lambda_2}$ der zu $P_2 Q_2$ gehörigen Curve $C_2'$ hindurchgeht. Die Curve $N = o$ trifft also die Curve $C_1'$ in

$$(2s-r)(2s-r-2) - 2(s-r)(s-2) - 2d$$

wirklichen Schnittpunkten mit $C_2'$. — Ebenso sind in (6) die $r(s-2)-2d$ ausserhalb der $\beta$ liegenden Schnittpunkte von $Q$ und $P$ mit $C$ zugleich scheinbare Schnittpunkte von $C$ und $C'$. —

Bei den vorstehenden Betrachtungen ist implicite angenommen, dass alle $(s-r)(s-2)+d$ ausserhalb $C$ liegenden Schnittpunkte $\gamma_\lambda$ von $P=o$, $Q=o$ von den Punkten $\beta$ endlich entfernt liegen. Haben aber die $P=o$, $Q=o$ für alle $\lambda$ eine Berührung in einem Punkte $\beta$, so wird dieser Punkt nach (6) nur fester einfacher Punkt aller $C'$.

Die Gleichungen (4), (6) sind für verschiedene $\lambda$ nicht von einander unabhängig. Beziehen sich wieder $P_1, Q_1, C_1'$ auf irgend eine, $P_2, Q_2, C_2'$ auf irgend eine andere der Curven $C'(\xi)=o$, und ist nur gegeben:

$$P_1^2 - Q_1^2\Omega = C\cdot C_1', \tag{8}$$

$$P_1 Q_2 - P_2 Q_1 = C\cdot N, \tag{9}$$

so folgt daraus

$$P_1(P_1 N - Q_2 C_1') = Q_1(Q_1 N\Omega - P_2 C_1'),$$

also

$$P_1 N - Q_2 C_1' = Q_1 M, \tag{10}$$

$$Q_1 N\Omega - P_2 C_1' = P_1 M. \tag{11}$$

Ferner aus (8), (9) und (10):

$$C(P_1 N - Q_2 C_1') = C Q_1 M = Q_1(Q_1 Q_2\Omega - P_1 P_2),$$

also

$$Q_1 Q_2 \Omega - P_1 P_2 = C\cdot M, \tag{12}$$

und aus (12) und (9):

$$C(MQ_2 + NP_2) = Q_1(Q_2^2\Omega - P_2^2),$$

also

$$MQ_2 + NP_2 = -C_2' Q_1 \tag{13}$$

$$P_2^2 - Q_2^2\Omega = C\cdot C_2'. \tag{14}$$

(14) ist aber die Formel (6) für die zweite Curve $C'$. Endlich folgt noch aus (10) und (11):

$$C_1'(P_2 N + Q_2 M) = Q_1(N^2\Omega - M^2),$$

also nach (13):

$$(15) \qquad M^2 - N^2 \Omega = C_1' C_2',$$

womit $C_2'$ analog aus $C_1'$ hergeleitet ist, wie diese beiden Curven aus $C$ es waren.

Die in Vorstehendem inbegriffenen Fälle, zu welchen auch noch solche mit reduciblen Curven $C$ hinzukommen, werden sich alle aus der bekannten eindeutigen Abbildung der erwähnten Doppelebene auf eine einfache Ebene ergeben.

## 2. Abbildung der Doppelebene.

Die Abbildbarkeit der in Nr. 1 genannten Doppelebene auf eine einfache Ebene beruht selbst auf einem solchen speciellen Falle der Formel (6) von Nr. 1, der sich direct erledigen lässt.

Man nehme in Nr. 1: $r = 3, d = 1, s = 3$; und zwar soll $C(\xi) = o$ irgend eine „gerade" eigentliche Berührungscurve 3ter Ordnung mit einem Doppelpunkt $\beta$ sein; ihre 6 Berührungspunkte $\alpha_1 \cdots \alpha_6$ mit $\Omega$ sollen also nicht auf einem Kegelschnitt liegen. Dabei darf $C(\xi) = o$ sogar eine reducible Curve ihrer Art sein, z. B. aus drei Doppeltangenten, die zusammen zu einem geraden System gehören, bestehen, wobei man irgend einen der 3 Schnittpunkte als Doppelpunkt $\beta$ annehmen kann. Solche Curven $C$ existiren also immer.

In (2) hat man dann $t = 1$, $K$ wird eine Constante, die $Q$ von (3) werden zu einem Geradenbüschel durch den Punkt $\beta$, und es gilt der Restsatz (4) oder (4′) für die Schaaren (5). Eine Curve 3ter Ordnung von (5) hat mit der entsprechenden Geraden $Q$ aus (5), ausser $\beta$ und dem gemeinsamen Punkte auf $C$, nur je einen Punkt $\gamma_\lambda$ gemein, der nicht in $\beta$ hineinfällt; denn wenn $\gamma_\lambda$ an $\beta$ rückte, würde in Gleichung (4)

$$Q_0 P_1 - Q_1 P_0 = C \cdot D,$$

da die $P$ die entsprechenden $Q$ in $\beta$ berührten, $C D$ den Punkt $\beta$ zum 3-fachen Punkte, $D$ also $\beta$ zum einfachen Punkte haben, d. h. die Gerade $D$ ginge durch alle drei ausserhalb der 6 Punkte $\alpha_1 \cdots \alpha_6$ liegenden Schnittpunkte von $P_0 = o$, $P_1 = o$ hindurch, und diese 6 Punkte müssten auf einen Kegelschnitt liegen — gegen die Voraussetzung.

Dann folgt Gleichung (6), auch wenn $C$ aus drei Doppeltangenten $T_1, T_2, T_3$ besteht. Denn sei $\beta$ der Schnittpunkt von $T_1, T_2$ so bestimme man $\varrho$ in $P^2 - \varrho Q^2 \Omega = o$ so, dass diese Curve noch durch einen weiteren, als die festen Schnittpunkte mit $T_3$ geht: diese Curve wird dann $T_3$ zum Factor haben; der Rest, eine Curve 5$^{\text{ter}}$ Ordnung, die $T_1$ und $T_2$ in je 6 festen Punkten trifft, wird noch $T_1 T_2$ als Factor enthalten müssen; man hat also Gleichung (6).

Die so gefundenen Curven $C'(\xi) = o$ werden eine Unterklasse von $\infty^2$ Curven 3$^{\text{ter}}$ Ordnung, welche alle $\Omega$ in je 6 Punkten berühren, je einen beweglichen scheinbaren Doppelpunkt besitzen und sich zu je zwei in nur e i n e m wirklichen Schnittpunkt treffen, gelegen auf der Verbindungsgeraden $N = o$ der Doppelpunkte der beiden Curven.

Setzt man also

$$(16) \qquad \begin{cases} \varrho y_1 = P_0(\xi) + Q_0(\xi) \sqrt{\Omega(\xi)} \\ \varrho y_2 = P_1(\xi) + Q_1(\xi) \sqrt{\Omega(\xi)} \\ \varrho y_3 = C(\xi)\,, \end{cases}$$

so entsprechen den Geraden $\Sigma \lambda_i y_i = o$ die Curven $C'(\xi) = o$, in nur einem Blatte genommen, und es werden auch die $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3$, sowie $\frac{\sqrt{\Omega(\xi)}}{\xi_1^2}$, rationale Functionen von $y_1, y_2, y_3$. Die charakteristischen Eigenschaften der Umkehrungsformeln lassen sich unmittelbar angeben. Den beide Blätter durchsetzenden Geraden der doppelten $\xi$-Ebene $\Xi$ entspricht in der einfachen $Y$-Ebene eine lineare $\infty^2$-Schaar von Curven, von der Ordnung der $C'$, also von der 3$^{\text{ten}}$ Ordnung. Diese Curven müssen, da die ihnen ein-zweideutig entsprechenden Geraden der Doppelebene $\Xi$ je 4 Verzweigungspunkte haben, das Geschlecht 1 haben, also ohne Doppelpunkte sein; und je zwei der Curven dürfen sich in nur 2 beweglichen Punkten treffen, d. h. sie müssen 7 feste einfache Punkte gemein haben. Man hat somit:

$$(17) \qquad \sigma \xi_1 = \Gamma_1(y)\,, \;\; \sigma \xi_2 = \Gamma_2(y)\,, \;\; \sigma \xi_3 = \Gamma_3(y)\,,$$

wo die $\Gamma$ Curven 3$^{\text{ter}}$ Ordnung mit 7 gemeinsamen einfachen Punkten

$$a_1, a_2 \cdots a_7$$

sind.

Geht man umgekehrt von einer solchen Schaar (17) aus, so kommt man auf eine doppelte Ebene $\Xi$ mit Uebergangscurve $\Omega$, 4^ter^ Ordnung vom Geschlecht 3, die der Jacobi'schen Curve

$$\Delta(y) = \Sigma \pm \frac{d\Gamma_1}{dy_1}\frac{d\Gamma_2}{dy_2}\frac{d\Gamma_3}{dy_3} \tag{18}$$

der Schaar (17), einer Curve 6^ter^ Ordnung mit Doppelpunkten in $a_1, \cdots a_7$, eindeutig entspricht.

Es wird vermöge (17)

$$\sigma^4 \Omega(\xi) = \Delta^2(y),$$

$$\frac{\sqrt{\Omega(\xi)}}{\xi_1^2} = \frac{\Delta(y)}{\Gamma_1^2(y)}, \tag{18'}$$

was die Umkehrung (17) von (16) ergänzt.

Die wirkliche Ausrechnung der Umkehrung (17) von (16) ist für das Folgende unnöthig. Ich bemerke desshalb nur: Fasst man die $y$ als Liniencoordinaten der Ebene $\Xi$ auf, so geht wegen der aus (4) folgenden Gleichung

$$y_1 Q_1 - y_2 Q_0 + y_3 D \equiv o \tag{19}$$

die Linie $(y)$ durch den entsprechenden Punkt $(\xi)$; und zwar kann man durch Bilden der zweiten Polare von $(\xi)$ in Bezug auf die linke Seite von (6) zeigen, dass in (16) einem Punkte $(\xi)$ gerade die beiden Doppelpunktstangenten $(y)$ derjenigen Berührungscurven 3^ter^ Ordnung, $C'(\xi) = o$, entsprechen, die in $(\xi)$ ihren Doppelpunkt hat; einer Geraden $(y)$ der Schnittpunkt auf $(y)$ von irgend solchen zwei Curven $C'(\xi) = o$, die ihre Doppelpunkte auf $(y)$ haben. Diese Betrachtung liefert ferner aus (16) zu (19) eine zweite Gleichung, die rational in den $\xi$ und den $y$ ist, und zwar von der Dimension 1 in den $\xi$, 2 in den $y$. Somit kömmt man durch diese Rechnung auf den Ausgangspunkt von Aronhold für die $\Omega_4$[1]) zurück, und der Weg der Abbildung selbst ist im Wesentlichen der von Clebsch,[2]) aber mit Vermeidung aller räumlichen Betrachtungen

Die Einzelheiten der Abbildung sind folgende: Während den Geraden von $Y$ im Allgemeinen in $\Xi$ in nur je einem Blatte laufende Curven

---

1) Aronhold, Monatsber. d. Berl. Akad. 1864. Clebsch-Lindemann: „Vorlesungen", Cap. über Connexe.

2) Clebsch, Math. Annalen III.

$3^{\text{ter}}$ Ordnung mit je einem beweglichen scheinbaren Doppelpunkte entsprechen, welche $\Omega_4$ noch in je 6 Punkten berühren, entspricht dem Geradenbüschel durch einen der Punkte $a_i$ nur eine quadratische $\infty^1$-Schaar von Kegelschnitten, die $\Omega_4$ in je 4 Punkten berühren. $a_i$ ist also Fundamentalpunkt, dem eine Doppeltangente von $\Omega_4$ entspricht, gelegen in einem Blatte; derselben Doppeltangente, im anderen Blatte genommen, entspricht in $Y$ eine Curve $3^{\text{ter}}$ Ordnung aus den $\Gamma(y)$, welche aber bez. $a_i$ zum Doppelpunkt hat, und zwar werden ihre Doppelpunktstangenten in $a_i$ auch solche für die Jacobi'sche Curve $\Delta(y)$. Diese 7, den 7 Punkten $a_i$ entsprechende, Doppeltangenten von $\Omega$ bezeichne ich bez. mit

$$t_{18}, t_{28}, \cdots t_{78}$$

und den zugehörigen ungeraden Berührungssystemen ertheile ich die Charakteristiken

$$(18), \ (28), \cdots (78).$$

Ferner entsprechen den 21 Verbindungsgraden $L_1(a_i a_k)$ und den dieselben zu Curven $\Gamma(y)$ ergänzenden Kegelschnitten je durch die anderen 5 Punkte $a$ weitere 21 Doppeltangenten von $\Omega$, im einen, bez. im andern Blatte; eine solche Gerade und der ergänzende Kegelschnitt treffen $\Delta$ in denselben beiden Punkten. Diese 21 Doppeltangenten und die Charakteristiken ihrer Systeme bezeichne ich bez. mit

$$t_{ik}, (ik).$$

Wir haben in unserer Abbildung ein (Aronhold'sches) 7-System von Doppeltangenten von $\Omega_4$ ausgezeichnet, konnten aber zu diesem Zwecke oben von einer nur aus drei Doppeltangenten $T_1 T_2 T_3$ bestehenden Curve $C$ ausgehen. Da die $C$ selbst zu den $C'(\xi) = o$ gehört, wird sich diese Curve $C$ abbilden durch $a_i \cdot a_k \cdot L_1(a_i, a_k)$, es ist also

$$T_1 = t_{i8}, \ T_2 = t_{k8}, \ T_3 = t_{ik},$$

wobei nach der Abbildung diese 3 Linien je in solchem Blatte laufend zu nehmen sind, dass $t_{i8}$ mit $t_{k8}$ nur einen scheinbaren, $t_{ik}$ mit $t_{i8}$ und $t_{k8}$ je einen wirklichen Schnittpunkt erhält. Dass solche 3 Doppeltangenten in der That ein einziges 7-System eindeutig bestimmen, wird sich später ergeben.

## 3. Discussion der einfachsten Berührungscurven an $\Omega$ und ihrer Untersysteme.

Zur Discussion der Berührungssysteme an $\Omega$ aus der Abbildung ist zunächst zu bemerken, dass zwei übereinander, aber getrennt laufende Curven von $\Xi$ immer gleichzeitig behandelt werden können; sie führen auf zwei Curven von $Y$, die in der durch die Punktepaare von $Y$ veranlassten involutorischen eindeutigen Ebenentransformation einander conjugirt sind. Bei dieser entsprechen den Geraden von $Y$ Curven $8^{\text{ter}}$ Ordnung von $Y$, welche die $a_i$ zu dreifachen Punkten haben. Die 28 Doppeltangenten mit ihren Bildern und den Charakteristiken ihrer Systeme sind in Nr. 2 schon aufgezählt; wir leiten jetzt die Berührungscurven $2^{\text{ter}}$ und und $3^{\text{ter}}$ Ordnung, $\Phi^{(2)}$ und $\Phi^{(3)}$, ab.

### I. Berührende Kegelschnitte, $\Phi^{(2)}$.

Für irgend zwei Kegelschnitte eines Gruppensystems, $C, C'$, gilt Gleichung (6) von Nr. 1, wobei $Q$ eine Constante wird. Alle diese Kegelschnitte machen also $\sqrt{\Omega}$ rational und müssen sich aus den, sich nicht selbst conjugirten, Curven $1^{\text{ter}}$ bis $6^{\text{ter}}$ Ordnung der $Y$-Ebene ergeben. Es finden sich folgende $\infty^1$-Schaaren, denen ich Gruppencharakteristiken zuschreibe, die als Indices angeschrieben sind:

a) $\Phi^{(2)}_{81}$; Bild in $Y$: $L_1(a_1)$, bez. $L_5(a_1 a_2^2 \cdots a_7^2)$.

b) $\Phi^{(2)}_{1234}$; Bild in $Y$: $L_2(a_1 a_2 a_3 a_4)$, bez. $L_4(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5^2 a_6^2 a_7^2)$.

c) $\Phi^{(2)}_{12}$: Bild in $Y$: $L_3(a_1^2 a_3 \cdots a_7)$, bez. $L_3(a_2^2 a_3 \cdots a_7)$,

sowie die durch Vertauschung der Zahlen $1 \cdots 7$ sich daraus ergebenden Schaaren.

Dies sind im Ganzen $7 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 63$ $\infty^1$-Schaaren. Dass dieselben unter sich gleichberechtigt sind, sieht man so: Macht man auf die Ebene $Y$ eine quadratische Transformation mit den Grundpunkten in $a_2, a_3, a_4$, so erhält man aus den Curven $\Gamma_3(a_1, \cdots a_7)$ Curven $\Gamma'_3(a'_1, \cdots, a'_7)$ der neuen $Y'$-Ebene, und den Geraden der letzteren durch $a'_1$ entsprechen die Kegelschnitte b) durch $a_1, a_2, a_3, a_4$; zwischen $Y'$ und $\Xi$ herrscht aber eine der zwischen $Y$ und $\Xi$ bestehenden völlig analoge Beziehung. Ebenso

folgen die $\Phi_{12}^{(2)}$ aus den $\Phi_{81}^{(2)}$ durch eine cubische Cremona-Transformation der $Y$-Ebene.

Wir haben somit 63 gleichartige Gruppencharakteristiken, die ich so bezeichne (mit den Vertauschungen 1, 2, $\cdots$ 7):

$$[81], [12], [1234] = [5678].$$

Dabei sind eckige Klammern gesetzt, weil das System $[ik]$ nicht der Doppeltangente $(ik)$ zugeordnet ist. Vielmehr gibt es unter den Curven $L_1(a_1)$ die 6 zerfallenden Curven

$$a_k \cdot L_1(a_1^2 a_k)(k = 2, \cdots 7);$$

d. h. in $\Phi_{81}^{(2)}$ die 6 in je ein Doppeltangentenpaar zerfallenden Curven

$$t_{8k} \cdot t_{1k} \qquad (k = 2, \cdots 7),$$

was ich schreibe

$$[81] = (8\,k) + (1\,k), \; (k = 2, \cdots 7).$$

Ebenso in $\Phi_{12}^{(2)}$ die 6 Doppeltangentenpaare

$$t_{81} \cdot t_{82}, \qquad t_{1k} \cdot t_{2k} (k = 3, \cdots 7),$$

oder

$$[12] = (81) + (82) = (1\,k) + (2\,k) \qquad (k = 3, \cdots 7);$$

und in $\Phi_{1234}^{(2)} = \Phi_{5678}^{(2)}$ die 6 Doppeltangentenpaare

$$t_{12} \cdot t_{34}, \; t_{13} \cdot t_{24}, \; t_{14} \cdot t_{23}, \; t_{56} \cdot t_{78}, \; t_{57} \cdot t_{68}, \; t_{58} \cdot t_{67},$$

oder

$$\begin{aligned}[1234] = [5678] &= (12) + (34) = (13) + (24) = (14) + (23) \\ &= (56) + (78) = (57) + (68) = (58) + (67).\end{aligned}$$

### II. $\Omega$ berührende ungerade $\Phi^{(3)}$, ohne scheinbare Doppelpunkte.

Da diese $\infty^3$-Schaaren einzeln auf die 28 Doppeltangenten von $\Omega$ vermöge Gleichungen:

$$t_{ik} \cdot \Phi_{ik}^{(3)} = P_{ik}^2 - \Omega,$$

die nur spezieller Fall von (6), Nr. 1 sind, zurückführen, so sind längs jeder dieser Berührungscurven die beiden Blätter der Doppelebene getrennt.

Man hat:

a) $\Phi_{81}^{(3)}$; Bild: $L_3(a_2 \cdots a_7)$, bez. $L_6(a_1^3 a_2^2 \cdots a_7^2)$.

b) $\Phi_{12}^{(3)}$; Bild: $L_4(a_1^2 a_2^2 a_3 \cdots a_7)$, bez. $L_5(a_1 a_2 a_3^2 \cdots a_7^2)$,

mit den Vertauschungen $1, \cdots 7$. Diese Curven $\Phi^{(3)}$ haben keine scheinbaren Doppelpunkte, weil sich die beiden Bilder einer solchen Curve nur je in 6 Punkten auf $\Delta$ schneiden. Wohl aber könnte man jeder der 28 Schaaren noch an irgend einer Stelle der Doppelebene einen wirklichen Doppelpunkt geben, nur dass dann die Gesammtheit der $\infty^2$ Curven mit Doppelpunkt in einer Schaar keine quadratische Schaar mehr bildet; stellt man vielmehr mit einer solchen Curve $C$ mit Doppelpunkt $\beta$ Gleichung (6), Nr. 1 für $r = 3$, $s = 3$ auf, so erhält $C'$, statt eines beweglichen Doppelpunkts, einen festen Punkt in $\beta$. In einer Schaar $\Phi_{ik}^{(3)}$ ist dagegen als ausgezeichnet enthalten: die zugeordnete Doppeltangente $t_{ik}$, verbunden mit allen doppelt genommenen Geraden. Zwei der Curven einer Schaar $\Phi_{ik}^{(3)}$ treffen sich in 3 wirklichen, auf einer Geraden liegenden, und 6 scheinbaren, auf einem Kegelschnitt liegenden, Schnittpunkten.

### III. $\Omega$ berührende gerade $\Phi^{(3)}$, mit einem scheinbaren Doppelpunkte.

Die Berührungscurven 3ter Ordnung, deren je 6 Berührungspunkte mit $\Omega$ nie auf einem Kegelschnitt liegen, bilden quadratische $\infty^3$-Schaaren; und darunter erhält man aus der Abbildung folgende Unterschaaren von $\infty^2$, nur immer in je einem Blatte laufenden, Curven, analog der oben zur Abbildung benutzten Unterschaar:

a$_1$) $\Phi_0^{(3)}$; Bild: $L_1$, bez. $L_8(a_1^3 \cdots a_7^3)$,

a$_2$) $\Phi_0^{(3)}$; Bild: $L_4(a_1^3 a_2 \cdots a_7)$, bez. $L_5(a_2^2 \cdots a_7^2)$.

b$_1$) $\Phi_{8123}^{(3)} = \Phi_{4567}^{(3)}$; Bild: $L_2(a_1 a_2 a_3)$, bez. $L_7(a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^3 \cdot\cdot a_7^3)$,

b$_2$) $\Phi_{8123}^{(3)} = \Phi_{4567}^{(3)}$; Bild: $L_3(a_1^2 a_4 \cdot\cdot a_7)$, bez. $L_6(a_1 a_2^3 a_3^3 a_4^2 \cdot\cdot a_7^2)$,

b$_3$) $\Phi_{8123}^{(3)} = \Phi_{4567}^{(3)}$; Bild: $L_4(a_1 a_2 a_3 a_4^2 a_5^2 a_6^2)$, bez. $L_5(a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4 a_5 a_6 a_7^3)$,

mit allen Vertauschungen der Zahlen $1 \cdot\cdot 7$. Dies liefert aus a$_1$) und a$_2$) $1 + 7 = 8$ Unterschaaren, denen die Charakteristik

$$(o) = (123 \cdots 78),$$

und aus $b_1$), $b_2$), $b_3$) $1 + 3 + 4 = 8$ Unterschaaren, denen die Charakteristik

$$(8123) = (4567)$$

zugeschrieben ist; im Ganzen $8 \cdot 36$ Unterschaaren, die sich je zu 8 auf 36 Charakteristiken $(o)$, $(iklm)$ vertheilen. Die Zuordnung ist so:

Die Schaaren $a_2$) gehören zum selben $\infty^3$-System $\Phi_0^{(3)}$, wie $a_1$); denn unter den Bild-Curven von $a_1$) und $a_2$) sind bez. die beiden conjugirten Curven

$$L_1(a_1), \quad L_5(a_1\, a_2^2 \cdots a_7^2)$$

enthalten, die $\Delta$ in denselben 6 Punkten treffen; daher sind die Punktgruppen, in welchen $\Delta$ von den Curven $a_2$) getroffen wird, corresidual zu den Schnittgruppen mit den Curven $a_1$) und dieses überträgt sich auf die Berührungsgruppen auf $\Omega$ der entsprechenden Curven der Doppelebene. Aus der $\infty^2$-Schaar $L_1$ von $a_1$) sind die 7 $\infty^2$-Schaaren von $a_2$), die zu $(o)$ gehören, durch Cremona-Transformationen der $Y$-Ebene abgeleitet; so dass diese 7 Schaaren — genau nach dem oben unter Nr. 3 I. gemachten Schlusse — jener ersten Schaar völlig gleichwerthig sind. Aber auch die 8 Schaaren b) ergeben sich aus $a_1$), $a_2$) durch Cremona-Transformation der $Y$-Ebene, so dass dieselben sowohl zu einem und demselben $\infty^3$-System $\Phi_\alpha^{(3)}$ gehören, als mit jenen ersten 8 Schaaren gleichberechtigt sind. Dies für jeden der 35 Werthe $(iklm)$, welche $(\alpha)$ ausser $(o)$ noch annehmen kann.

Die 8 Unterschaaren $\Phi_0^{(3)}$ in $a_1$), $a_2$) lassen sich durch die 8 Werthe 8, 1, 2, $\cdot\cdot$ 7 eines Index von einander unterscheiden. Sie sind einzeln 8 verschiedenen 7-Systemen von Doppeltangenten zugeordnet; nämlich Schaar $a_1$), vom Index 8, dem System:

$a_1'$) $\qquad t_{81},\ t_{82}, \cdots t_{87},$

insofern i r g e n d zwei der Doppeltangenten aus diesem System, $t_{8i}$, $t_{8k}$, verbunden mit einer nicht diesem System angehörigen $t_{ik}$, eine der Curven $\Phi_0^{(3)}$ von $a_1$) bilden (wobei der Schnittpunkt von $t_{8i}$ mit $t_{8k}$ als scheinbarer Doppelpunkt betrachtet wird). Ebenso Schaar $a_2$), vom weiteren Index 1, dem System:

$a_2'$) $\qquad t_{12}, \cdots t_{17},\ t_{18};$

Schaar $b_1$) mit Charakteristik $(8123) = (4567)$ und Bild $L_2(a_1 a_2 a_3)$ dem System:

$b_1'$) $t_{23},\ t_{31},\ t_{12},\ t_{48},\ \cdots t_{78}$;

Schaar $b_2$) mit Bild $L_3(a_1^2 a_4 \cdots a_7)$ dem System:

$b_2'$) $t_{14}, \cdots t_{17},\ t_{23},\ t_{28},\ t_{38}$;

endlich Schaar $b_3$) mit Bild $L_4(a_1 a_2 a_3 a_4^2 a_5^2 a_6^2)$ dem System:

$b_3'$) $t_{17},\ t_{27},\ t_{37},\ t_{87},\ t_{45},\ t_{46},\ t_{56}$.

Eine andere Zuordnung der Schaaren zu den 7-Systemen ist die: In $a_1$) gibt es 7 $\infty^1$-Schaaren, bestehend je aus einer der 7 Doppeltangenten $a_1'$), $t_{8i}$, verbunden mit einer $\infty^1$-Schaar $\Phi_{8i}^{(2)}$ aus I, Nr. 3, mit Charakteristik $[8\,i]$. Nimmt man dann in Gleichung (6) von Nr. 1 diese $\infty^1$-Schaar $t_{8i} \cdot \Phi_{8i}^{(2)}$ für $C'$, irgend eine Schaar $\Phi_0^{(3)}$ der Schaar $a_1$) für $C_1$, so liefern die Curven 3ter Ordnung, $P = o$, dieser Gleichung den Satz:

Die 6 Berührungspunkte irgend einer Curve $\Phi_0^{(3)}$ der Unterschaar $a_1$ mit $\Omega$ bilden mit den 2 Berührungspunkten irgend einer Doppeltangente $t_{8i}$ aus $a_1'$) und dem scheinbaren Doppelpunkte $\beta$ der Curve $\Phi_0^{(3)}$ ein System von 9 Schnittpunkten zweier Curven 3ter Ordnung.

Dasselbe gilt für die übrigen Unterschaaren und entsprechenden Systeme von je 7 Doppeltangenten.

Die 7-Systeme $a_1'$) $a_2'$) haben noch die Eigenschaft, dass die Summe der Zahlen ihrer Charakteristiken, wenn man bei dieser Summenbildung je zwei gleiche Zahlen weglässt, zu $(o)$ wird, nämlich

$$(81) + (82) + \cdots + (87) = (812 \cdots 7) = (o),$$
$$(12) + (13) + \cdots + (18) = (12 \cdots 8) = (o);$$

analog liefern $b_1'$), $b_2'$), $b_3'$):

$$(23) + (31) + (12) + (48) + \cdots + (78) = (4567) = (1238),$$
$$(14) + \cdots + (17) + (23) + (28) + (38) = (4567) = (1238),$$
$$(17) + (27) + (37) + (87) + (45) + (46) + (56) = (1238) = (4567).$$

Wenn nun, wie am Schlusse von Nr. 2, drei Doppeltangenten $t_{8i}$, $t_{8k}$, $t_{ik}$ vorliegen, für welche die Summe der Charakteristiken zu

$$(8\,i) + (8\,k) + (i\,k) = (o)$$

wird, und 2 der Doppeltangenten $t_{8i}$, $t_{8k}$ werden vor der dritten ausgezeichnet, so gibt es unter den 8 zu $(o)$ gehörigen 7-Systemen $\mathfrak{a}'_1)$, $\mathfrak{a}'_2)$ nur eines, welches jene beiden, $t_{8i}$, $t_{8k}$ enthält, nämlich $\mathfrak{a}'_1)$; womit die Behauptung am Schlusse von Nr. 2 gerechtfertigt ist.

## 4. Charakteristikentheorie.

In Nr. 3 haben wir für die 28 Doppeltangenten, für die 36 geraden $\infty^3$-Schaaren von $\Phi^{(3)}$ und die 63 $\infty^1$-Schaaren von $\Phi^{(2)}$, und damit für alle Gesammt-Berührungsschaaren, Systems-Charakteristiken eingeführt.

Zunächst lehren die dortigen Betrachtungen, dass der Index 8 dabei vor den übrigen Indices $1, 2, \cdots 7$ nur in der Abbildung mittels $\mathfrak{a}'_1)$ von III, Nr. 3 bevorzugt war, an sich aber denselben in Bezug auf $\Omega_4$ völlig gleichwerthig ist. Die bez. Charakteristiken sind also:

für die Doppeltangenten: $(ik)$,
„ „ geraden $\Phi^{(3)}$: $(o) = (123 \cdots 78)$, $(iklm) = (npqr)$,
„ „ $\Phi^{(2)}$: $[ik]$, $[iklm] = [npqr]$,

wo $i, k, \cdots q, r$ von einander verschiedene Zahlen aus der Reihe $1, 2 \cdots 8$ sind.

Auf diese Zeichen wende man folgende Rechenregeln an:

Es ist

$$(\alpha_1) + (\alpha_2) + (\alpha_3) = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3),$$
$$(\alpha_1) + (\alpha_2) = [\alpha_1] + [\alpha_2] = [\alpha_1 \alpha_2],$$

also

$$[\alpha_1] + (\alpha_2) = (\alpha_1 \alpha_2),$$

wobei in einer Charakteristik die einzelnen Zahlen beliebig geordnet, zwei gleiche weggelassen werden können, und wobei

$$[123 \cdots 8] = o$$

gesetzt und in Combination ebenfalls weggelassen wird. Daraus folgt schon

$$(12 \cdots 8) = (o), \; (1234) = (5678), \; [1234] = [5678].$$

Man hat dann den Satz:

Ist die Summe zweier Charakteristikencombinationen $= o$, so bilden die beiden entsprechenden Curvencombinationen zwei Berührungscurven eines Systems.

Zum Beweis genügt es, alle Charakteristiken aus Zeichen $(ik)$ zusammenzusetzen und denselben Doppeltangenten zuzuordnen; und zwar braucht man nur den Satz in der Form nachzuweisen:

Liefert die Summe der Charakteristiken von $2s$ Doppeltangenten $o$, so liegen deren $4s$ Berührungspunkte mit $\Omega$ auf einer Curve $s^{\text{ter}}$ Ordnung.

Der Beweis ergibt sich aus Nr. 3, durch den Schluss von $s-1$ auf $s$. Für $s=1$ ist der Satz selbstverständlich; für $s=2$ ist derselbe in Nr. 3, I entwickelt. Ist $s=3$:

$$(\alpha_1)+(\alpha_2)+(\alpha_3)+(\alpha_4)+(\alpha_5)+(\alpha_6)=o\,,$$

und $(\alpha_1)+(\alpha_2)+(\alpha_3)=(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3)=(\alpha)$ eine ungerade Charakteristik, so wird

$$(\alpha_1)+(\alpha_2)+(\alpha_3)+(\alpha)=o\,,$$
$$(\alpha_4)+(\alpha_5)+(\alpha_6)+(\alpha)=o\,;$$

nach dem für $s=2$ Gesagten bilden also die 6 Berührungspunkte der drei zu $(\alpha_1)$, $(\alpha_2)$, $(\alpha_3)$ gehörigen Doppeltangenten (einfach genommen) eine zu den 2 Berührungspunkten der Doppeltangente $(\alpha)$ corresiduale Gruppe auf $\Omega$; ebenso die 6 Berührungspunkte der drei zu $(\alpha_4)$, $(\alpha_5)$, $(\alpha_6)$ gehörigen Doppeltangenten, so dass also diese Gruppe von 6 Punkten auch jener Gruppe von 6 Punkten corresidual ist, Wird aber bei $s=3$ $(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3)=(\alpha)$ eine gerade Charakteristik, so kann man zunächst $(\alpha)=(o)$ annehmen, da sich die übrigen Fälle vermöge Cremona'scher Transformationen der $Y$-Ebene nach III. Nr. 3 daraus ergeben; es sind dann nur die Zerlegungen möglich

$$(o)=(i\,k)+(i\,l)+(k\,l)\,,$$

die nach III, Nr. 3 wieder nur zu einander corresidualen Gruppen von je 6 Punkten auf $\Omega$ führen, alle dem System $(o)$ angehörig.

Bei allgemeinem $s$ zerlege man die Summe

$$(\alpha_1)+(\alpha_2)+\cdots+(\alpha_{2s})=o$$

in

$$(\alpha_1)+(\alpha_2)+(\alpha_3)+(\alpha_4)=[\alpha]=(\beta_1)+(\beta_2)$$
$$(\alpha_5)+(\alpha_6)+\cdots+(\alpha_{2s})=[\alpha]=(\beta_1)+(\beta_2);$$

so wird nach den Fällen $s = 3$ und $s - 1$ (bez. wenn $[\alpha] = o$ nach den Fällen für noch niedrigere $s$) sowohl die Gruppe der 8 Berührungspunkte der $(\alpha_1) \cdots (\alpha_4)$ zugeordneten Doppeltangenten, als die Gruppe der $4s - 8$ Berührungspunkte der $(\alpha_5) \cdots (\alpha_{2s})$ zugeordneten Doppeltangenten zur Gruppe der beiden Berührungspunkte der beiden $(\beta_1)$ und $(\beta_2)$ zugeordneten Doppeltangenten corresidual, so dass jene Gruppen zu einander corresidual werden.

In der Abbildung ist der Uebergang von den $(o)$ zugeordneten Curven zu den den übrigen 35 geraden Charakteristiken zugeordneten Curven durch Cremona'sche Transformationen der $Y$-Ebene bewirkt worden. Ueberträgt man dies auf die Charakteristiken-Bezeichnung, so erhält man folgende erlaubte Charakteristikensubstitutionen, durch welche nun die Auszeichnung von $(o)$ aufgehoben werden kann:

Wenn $[s]$ eine beliebige Gruppen-Charakteristik, so ist $\{s\}$ eine Substitution, welche eine eigentliche Charakteristik $(a)$ in $(as)$ oder $(a)$ transformirt, je nachdem $(a)$ und $(as)$ gleichen oder entgegengesetzten Charakter des Geraden und Ungeraden haben; also eine Gruppencharakteristik $[a]$ in $[as]$ transformirt, wenn, für $[a] = (a_1) + (a_2)$, nur eine der beiden Zahlen $(a_1)$, $(a_2)$ durch $\{s\}$ verändert wird, sonst aber $[a]$ unverändert lässt.

Man kann dann irgend eine andere gerade Charakteristik, z. B. $(4567) = (1238)$, mit $(o')$ bezeichnen, die Doppeltangenten mit $(i'k')$, und zwar etwa die 7 von $b_1'$) Nr. 3, III der Reihe nach mit $(8'1'), \cdots (8'7')$; so vertritt dieses System in der Bezeichnung die Stelle des ursprünglichen.

Damit ist die ganze Charakteristikentheorie[1]) für unsere Berührungscurven an $\Omega$ aufgestellt, und zwar algebraisch begründet.

## 5. Die Berührungsschaaren $\Phi^{(4)}$, $\Phi^{(5)}$, $\Phi^{(6)}$.

### I. Berührungscurven $\Phi^{(4)}$ mit je einem scheinbaren Doppelpunkte.

Zu jeder der 63 Gruppencharakteristiken $[\alpha]$ gehört eine $\infty^6$-Schaar von Curven $4^{\text{ter}}$ Ordnung, $\Phi_\alpha^{(4)}$, welche $\Omega_4$ in einer $\infty^5$-Schaar von Gruppen von je 8 Punkten berühren. Aus einer solchen Curve $C'$, welche $\Omega_4$

---

1) S. insbesondere meinen Aufsatz: „Ueber die Gleichungen $8^{\text{ten}}$ Grades und ihr Auftreten in der Theorie der Curven $4^{\text{ter}}$ Ordnung", Math. Ann. XV, § 7.

in $\alpha_1', \alpha_2' \cdots \alpha_8'$ berühre, ergeben sich alle Curven 4ter Ordnung, welche $\Omega_4$ in denselben Punkten berühren, in der Form

$$C' + \lambda \Omega_4 = o .$$

Man kann dann zeigen:

In diesem Büschel gibt es eine Curve mit scheinbarem Doppelpunkte; derselbe ist der 9te Schnittpunkt $\beta$ der durch $\alpha_1', \cdots \alpha_8'$ gehenden Curven 3ter Ordnung.

Zum Beweise leite man die Curve $C'$ aus einem in 4 Punkten $\alpha_1, \cdots \alpha_4$ berührenden Kegelschnitt $C$, mit derselben Charakteristik $[\alpha]$, mittels Gleichung (6) von Nr. 1 her, für $r = 2$, $s = 3$, $d = o$. Die Ableitung dieser Gleichung gilt, wegen $o = d = \frac{1}{2}(r-1)(r-2)$ hier vollständig. Man kommt so auf eine in $\alpha_1' \cdots \alpha_8'$ berührende Curve 4ter Ordnung $C'$ mit einem scheinbaren Doppelpunkt $\beta$.

Man betrachte dann den Schnitt der Curve $C'$ $(\beta^2)$ mit den Curven $C_3(\alpha_1' \cdots \alpha_8')$. Unter diesen Curven $C_3$ ist $P$ von (6) enthalten, welche auch durch $\beta$ geht und $C'$ in noch zwei weiteren Punkten $\gamma_1, \gamma_2$ trifft, welche, da $Q(\beta)$ hindurchgeht, mit $\beta$ auf einer Geraden liegen. Die ganze $\infty^2$-Schaar der zur Gruppe $(\beta^2, \gamma_1, \gamma_2)$ corresidualen Gruppen von je 4 Punkten auf $C'(\beta^2)$, nämlich die von den $\infty^2$ Geraden ausgeschnittenen Gruppen, müsste also auch von den $C_3$ $(\alpha_1' \cdots \alpha_8')$ ausgeschnitten werden, wenn diese nicht zu $C'(\beta^2)$ adjungirt wären. Aber $\alpha_1', \cdots \alpha_8'$ liegen nicht auf einem Kegelschnitt (wegen des ausgeschlossenen uneigentlichen Falls von 3), Nr. 1), die $C_3(\alpha_1' \cdots \alpha_8')$ bilden daher nur eine $\infty^1$-Schaar, müssen also alle durch $\beta$ gehen.

(Oder: die beiden Punkte, in welchen $C'$ ausser $\beta$ und $\alpha_1', \cdots \alpha_8'$ von $P$ geschnitten sind, gehören zu einer $\infty^1$-Schaar auf $C'$; also geht durch $\alpha_1' \cdots \alpha_8', \beta$ eine $\infty^1$-Schaar von Curven 3ter Ordnung.)

Dasselbe folgt, indem man bemerkt, dass in Gleichung (6) von Nr. 1 an Stelle von $C$ die $\infty^1$ Kegelschnitte aus der Schaar $[\alpha]$ treten können. Die Formeln (8) bis (14) von Nr. 1 lehren dabei den Uebergang von der auf zwei solche Kegelschnitte $C_2, C_2'$ bezüglichen Gleichung (8) oder

$$B_2^2 - \Omega = C_2 C_2',$$

mittels (9), d. h., wenn $\psi_3$ eine durch die 4 Berührungspunkte von $C_2$ mit $\Omega$ gehende Curve 3ter Ordnung ist, mittels

$$B_2 M_1 - \psi_3 = C_2 N_1$$

zu der Gleichung (14) oder

$$\psi_3^2 - M_1^2 \Omega \equiv C_2 C_4',$$

wo

$$C_4' \equiv C_2' M_1^2 - 2 B_2 M_1 N_1 + C_2 N_1^2,$$

eine Curve 4ter Ordnung mit Doppelpunkt in $M_1 = N_1 = o$. Nach denselben Formeln aber hat man, wenn man $B_2$ durch $B_2 + \lambda C_2'$, also $C_2$ durch

$$K_2 = C_2 + 2\lambda B_2 + \lambda^2 C_2',$$

$\psi_3$ durch

$$\psi_3' = \psi_3 + \lambda \chi_3$$

ersetzt, wo

$$\chi_3 = C_2' M_1 - B_2 N_1:$$

$$\psi_3'^2 - K_2 C_4' \equiv \begin{vmatrix} B_2 C_2 & M_1 - N_1 \\ C_2' B_2 & \lambda \quad\quad 1 \end{vmatrix}^2 \equiv (M_1 + \lambda N_1)^2 \Omega,$$

und man hat so $\infty^1$ Curven 3ter Ordnung $\psi_3'$, durch die 8 Punkte $\alpha_1' \cdots \alpha_8'$, in welchen $\Omega$ von $C_4'$ berührt wird, und durch den Punkt $M_1 = N_1 = o$.

Die Abbildungen der 63 Curvenschaaren $C_4'$, mit je einem scheinbaren Doppelpunkte, werden:

a) $\Phi_{81}^{(4)}$; Bild in $Y$: $L_4(a_1^2 a_2 \cdots a_7)$, bez. $L_8(a_1^2 a_2^3 \cdots a_7^3)$.

b) $\Phi_{1234}^{(4)}$; Bild in $Y$: $L_5(a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^2 a_5 a_6 a_7)$, bez. $L_7(a_1^2 \cdots a_4^2 a_5^3 a_6^3 a_7^3)$.

c) $\Phi_{12}^{(4)}$; Bild in $Y$: $L_6(a_1^3 a_2 a_3^2 \cdots a_7^2)$, bez. $L_6(a_1 a_2^3 a_3^2 \cdots a_7^2)$.

In einer solchen $\infty^5$-Schaar mit der Charakteristik $[\alpha]$ sind enthalten: die zu $[\alpha]$ gehörigen $\infty^1$ Berührungskegelschnitte, verbunden mit den doppelt gezählten Geraden der Ebene (entsprechend dem Zerfallen von $L$ in $L_3(a_1 \cdots a_7)$ und die bez. Schaar aus I von Nr. 3); ferner 12 $\infty^3$-Schaaren von ungeraden berührenden $\Phi^{(3)}$, verbunden mit je einer der 12 Doppeltangenten $(ik)$, für welche $(\alpha ik)$ ungerade ist; endlich $2 \cdot 16$ $\infty^2$-Schaaren von berührenden geraden $\Phi^{(3)}$, mit je einem scheinbaren Doppelpunkte, verbunden mit je einer der 16 Doppeltangenten $(ik)$, für welche $(\alpha ik)$ gerade ist. So hat man als Bild der letzteren,

wenn man $[\alpha] = [81]$ und $(ik) = (81)$ also $(\alpha i k) = (o)$ nimmt, die beiden Schaaren:

$$L_3(a_1^2 a_2 \cdots a_7) \cdot L_1 \text{ und } L_4(a_1^3 a_2 \cdots a_7),$$

also Bilder von $t_{81}$, verbunden mit der Schaar $\Phi_0^{(3)}$ aus a₁) bez. a₂) von III, Nr. 3; und dieses zeigt zugleich, dass der Satz von III, Nr. 3 ein spezieller Fall des obigen in I dieser Nummer ist.

**II. Berührungscurven $\Phi^{(4)}$ mit je 2 scheinbaren Doppelpunkten.**

Diese Curvenschaaren, von der Mannigfaltigkeit $\infty^4$, lassen sich nach den Formeln (2)—(6) von Nr. 1 aus Doppeltangentenpaaren $C$, mit je einem scheinbaren Schnittpunkt, ableiten. Sei

$$C = \xi_1 \cdot \xi_2$$

ein solches Paar, so kann man in (2) Nr. 1 setzen:

$$P = (\lambda_0 \xi_1 - \lambda_1 \xi_2) D + K \cdot \xi_1 \xi_2, \quad Q = \lambda_0 \xi_1 + \lambda_1 \xi_2$$

wo $D$ irgend einen Kegelschnitt durch die 4 Berührungspunkte von $\xi_1$, $\xi_2$ vorstellt. Denn (4) wird dann, wenn

$$P_0 = (\xi_1 - \xi_2) D, \quad Q_0 = \xi_1 + \xi_2:$$

$$D(\xi_1 + \xi_2)(\lambda_0 \xi_1 - \lambda_1 \xi_2) - D(\xi_1 - \xi_2)(\lambda_0 \xi_1 + \lambda_1 \xi_2) = 2(\lambda_0 - \lambda_1) \cdot \xi_1 \xi_2 \cdot D.$$

Stellt man dann auch hier $P^2 - \varrho Q^2 \Omega = o$ auf und bestimmt $\varrho$ so, dass diese Curve $\xi_1$ zum Factor hat, so wird sie, da sie in $\xi_1 = \xi_2 = o$ zwei zu $P = o$, $Q = o$ harmonisch liegende Zweige hat, daselbst auch die Richtung von $\xi_2$ haben, also wegen der 4 weiteren Schnittpunkte mit $\xi_2 = o$ auch $\xi_2$ zum Factor haben; so dass auch hier Gleichung (6) von Nr. 1 gilt. Setzt man noch

$$\Omega = D^2 - \xi_1 \xi_2 C_2',$$

so würde

$$P^2 - Q^2 \Omega = \xi_1 \xi_2 \cdot C',$$

wo

$$C' = (\lambda_0 \xi_1 + \lambda_1 \xi_2)^2 C_2' + (K \xi_2 + 2 \lambda_0 D) \cdot (K \xi_1 - 2 \lambda_1 D),$$

mit scheinbaren Doppelpunkten in

$$\lambda_0 \xi_1 + \lambda_1 \xi_2 = o, \quad K \xi_2 + 2 \lambda_0 D = o.$$

Man sieht zugleich aus dieser Ableitung:

Es gibt 6·63 verschiedene Unterschaaren $\Phi^{(4)}$ mit je 2 scheinbaren Doppelpunkten. Eine solche Schaar hat die Mannigfaltigkeit $\infty^4$ und ist einem der 6 Paare von Doppeltangenten zugeordnet, welche in einer der 63 $\infty^1$-Schaaren von Berührungskegelschnitten $\Phi^{(2)}$ enthalten sind. Die 8 Berührungspunkte einer solchen Curve $\Phi^{(4)}$ liegen mit den beiden Doppelpunkten dieser Curve, mit den 4 Berührungspunkten des zugeordneten Doppeltangentenpaars und mit dem Schnittpunkt dieses Paars auf einer Curve 3ter Ordnung.

Dasselbe ergibt sich aus den Abbildungen dieser $\infty^4$-Schaaren $\Phi^{(4)}$:

a₁) $\Phi^{(4)}_{12}$; Bilder: $L_3(a_3 \cdots a_7)$, bez. $L_9(a_1^4 a_2^4 a_3^3 \cdots a_7^3)$,

a₂) $\Phi^{(4)}_{12}$; Bilder: $L_5(a_1^2 a_2^2 a_3^3 a_4 \cdots a_7)$, bez. $L_7(a_1^2 a_2^2 a_3 a_4^3 \cdots a_7^3)$.

b) $\Phi^{(4)}_{81}$; Bilder: $L_5(a_1 a_3^2 \cdots a_7^2)$, bez. $L_7(a_1^3 a_2^4 a_3^2 \cdots a_7^2)$.

c₁) $\Phi^{(4)}_{1234}$; Bilder: $L_4(a_1 \cdots a_4 a_5^2 a_6^2)$, bez. $L_8(a_1^3 \cdots a_4^3 a_5^2 a_6^2 a_7^4)$,

c₂) $\Phi^{(4)}_{1234}$; Bilder: $L_6(a_1^3 a_2^3 a_3 a_4 a_5^2 a_6^2 a_7^2)$, bez. $L_6(a_1 a_2 a_3^3 a_4^3 a_5^2 a_6^2 a_7^2)$,

mit den Vertauschungen von $1, 2, \cdots 7$.

In a₁) ist enthalten $t_{81} +$ der $\infty^3$-Schaar von ungeraden Berührungscurven $\Phi^{(3)}_{82}$; ferner $t_{82} +$ der $\infty^3$-Schaar von ungeraden Berührungscurven $\Phi^{(3)}_{81}$, sowie $t_{81} t_{82}$, verbunden mit den doppelt gezählten Geraden der $\Xi$-Ebene; dagegen die 16, nicht in [12] enthaltenen Doppeltangenten, verbunden mit je einer der geraden $\infty^2$-Schaaren von Berührungscurven $\Phi^{(3)}$ aus III, Nr. 3, die 10 übrigen Doppeltangenten nur wieder mit zerfallenden Curven verbunden. Aus der aus der Abbildung von a₁) gefolgerten Thatsache, dass unter den Curven von a₁) $t_{81} t_{82}$, verbunden mit den doppelten Geraden, vorkommt, schliesst man ebenfalls auf die obigen Curven 3ter Ordnung $P$, d. h. die aus der Abbildung hier folgenden Curven $\Phi^{(4)}$ sind mit den aus den Doppeltangentenpaaren erschlossenen Curven identisch.

III. Berührungscurven $\Phi^{(4)}$, mit je 3 scheinbaren Doppelpunkten.

Man hat folgende Schaaren mit ihren Abbildungen:

$a_1$) $\Phi^{(4)}_{12}$; Bilder: $L_2(a_1, a_2)$, bez. $L_{10}(a_1^3 a_2^3 a_3^4 \cdots a_7^4)$,

$a_2$) $\Phi^{(4)}_{12}$; Bilder: $L_4(a_1 a_2 a_3^2 a_4^2 a_5^2)$, bez. $L_8(a_1^3 a_2^3 a_3^2 a_4^2 a_5^2 a_6^4 a_7^4)$,

$a_3$) $\Phi^{(4)}_{12}$; Bilder: $L_6(a_1^3 a_2^3 a_3^2 \cdots a_6^2)$, bez. $L_6(a_1 a_2 a_3^2 \cdots a_6^2 a_7^4)$.

$b_1$) $\Phi^{(4)}_{1234}$; Bilder: $L_3(a_1^2 a_5 a_6 a_7)$, bez. $L_9(a_1^2 a_2^4 a_3^4 a_4^4 a_5^3 a_6^3 a_7^3)$,

$b_2$) $\Phi^{(4)}_{1234}$; Bilder: $L_5(a_2^2 a_3^2 a_4^2 a_5 a_6 a_7^3)$, bez. $L_7(a_1^4 a_2^2 a_3^2 a_4^2 a_5^3 a_6^3 a_7)$.

$c_1$) $\Phi^{(4)}_{81}$; Bilder: $L_4(a_2^3 a_3 \cdots a_7)$, bez. $L_8(a_1^4 a_2 a_3^3 \cdots a_7^3)$,

$c_2$) $\Phi^{(4)}_{81}$; Bilder: $L_6(a_1^2 a_2^3 a_3^3 a_4^3 a_5 a_6 a_7)$, bez. $L_6(a_1^2 a_2 a_3 a_4 a_5^3 a_6^3 a_7^3)$,

mit allen Vertauschungen von $1, \cdots 7$. Dies liefert aus $a_1$), $a_2$), $a_3$) $1 + 10 + 5 = 16$ $\infty^3$-Schaaren, die alle zur Gruppen-Charakteristik [12] gehören; denn in $a_1$) z. B. ist enthalten: $t_{12}$, verbunden mit der $\infty^2$-Schaar $\Phi^{(3)}_0$ aus III, $a_1$) von Nr. 3, mit dem Bild $L_1(a_1 a_2) \cdot L_1$; etc. Im Ganzen ergeben sich so 16 · 63 *Schaaren, zu je 16 den 63 Gruppencharakteristiken zugeordnet.*

In $a_1$) sind wieder als Unterschaaren enthalten: die Curven mit den Abbildungen:

$$L_2(a_1 a_2 a_3), \cdots, \; L_2(a_1 a_2 a_7), \; L_1(a_1 a_2) \cdot L_1,$$

d. h. die 6 Doppeltangenten

$a_1'$) $\qquad t_{83}, \; t_{84}, \cdots, t_{87}, \; t_{12},$

je verbunden mit einer $\infty^2$-Schaar von geraden $\Phi^{(3)}$ aus III, Nr. 3. Diese 6 Doppeltangenten sind in der [12] zugehörigen Kegelschnittschaar nicht enthalten, irgend drei von ihnen bilden eine „gerade" Berührungscurve, und die Berührungspunkte aller 6 liegen auf einer Curve $3^{\text{ter}}$ Ordnung (da die Summe der 6 · Charakteristiken von $a_1'$) $= o$ ist). *Den 16 derartigen Sechsersystemen,*[1]) *welche zu* $[\alpha]$ *gehören, sind unsere zu* $[\alpha]$ *gehörigen 16* $\infty^3$*-Schaaren einzeln zugeordnet.*

---

1) Andere theilweise bekannte Eigenschaften dieser Sechsersysteme werden später (Nr. 5, XV und Nr. 7, II) erwähnt.

Die Curven $P$ von (2) Nr. 1 liefern den Satz:

Durch die 8 Berührungspunkte einer unserer Curven $\Phi^{(4)}$, durch deren 3 Doppelpunkte und durch die 2 Berührungspunkte irgend einer der Doppeltangenten des zugehörigen Sechsersystems gehen $\infty^2$ Curven $4^{ter}$ Ordnung; durch die ersteren 11 Punkte und durch die 4 Berührungs- und den Schnittpunkt zweier dieser 6 Doppeltangenten $\infty^1$ Curven $4^{ter}$ Ordnung.

**IV. Ungerade Berührungscurven $\Phi^{(5)}$, mit je 2 scheinbaren Doppelpunkten.**

Aus den 28 Doppeltangenten $t_{ik} = C(\xi) = o$ ergeben sich vermöge (2)—(6) von Nr. 1 für $r = 1$, $d = o$, $s = 3$ ebenso viele Schaaren $C'(\xi) = o$ von Curven $\Phi_{ik}^{(5)}$, mit je zwei scheinbaren Doppelpunkten. Dabei wird $P = o$ in (5) eine $\infty^7$-Schaar von Curven $3^{ter}$ Ordnung, welche $\Omega$ in einer Vollschaar von Gruppen von je 10 Punkten schneiden. So berührt also unsere Schaar $\Phi_{ik}^{(5)}$ die Curve $\Omega$ in der Gesammtschaar von Gruppen von je 10 Punkten, welche zum System $(ik)$ überhaupt gehören. Die Mannigfaltigkeit der Curvenschaar $\Phi_{ik}^{(5)}$ selbst aber wird $\infty^8$; denn ist $\alpha_1', \cdot\cdot \alpha_{10}'$ eine solche Gruppe von 10 Punkten auf $\Omega$, so wird man zunächst durch $\alpha_1' \cdots \alpha_{10}'$ und die beiden Berührungspunkte von $t_{ik}$ die eine der $\infty^7$ Curven $3^{ter}$ Ordnung, $P = o$, legen; sodann aber kann man für $Q = o$ von (5) irgend eine der $\infty^1$ durch den dritten Schnittpunkt $\gamma$ von $P = o$ mit $t_{ik}$ gehenden Geraden wählen; man erhält so $\infty^1$ Curven $5^{ter}$ Ordnung $C'(\xi) = o$, welche alle $\Omega$ in $\alpha_1', \alpha_2' \cdots \alpha_{10}'$ berühren, durch $\gamma$ gehen und noch je 2 Doppelpunkte bez. in einem der $\infty^1$ Punktpaare haben, in welchen $P = o$ von den $\infty^1$ Geraden $Q = o$ getroffen wird.

Die Bilder der Curvenschaaren $\Phi_{ik}^{(5)}$ ergeben sich aus den der $t_{ik}$, indem man das Bild eines doppelt gerechneten Kegelschnitts $L_6(a_1^2 \cdots a_7^2)$ hinzunimmt; also:

$\Phi_{81}^{(5)}$; Bild: $L_6(a_1\, a_2^2 \cdots a_7^2)$, bez. $L_9(a_1^4\, a_2^3 \cdots a_7^3)$.

$\Phi_{12}^{(5)}$; Bild: $L_7(a_1^3\, a_2^3\, a_3^2 \cdots a_7^2)$, bez. $L_8(a_1^2\, a_2^2\, a_3^3 \cdots a_7^3)$.

V. Gerade Berührungscurven $\Phi^{(5)}$, mit je drei scheinbaren Doppelpunkten.

Diese Curvenschaaren ergeben sich einzeln aus den unter III, Nr. 3 angegebenen $8 \cdot 36$ $\infty^2$-Schaaren gerader $\Phi^{(3)}$, indem man die letzteren in (2)—(6), Nr. 1 für $C$ nimmt und daselbst $r = 3$, $d = 1$, $s = 4$ nimmt. Es gibt also auch $8 \cdot 36$ solcher Schaaren $\Phi^{(5)}$, und jede erhält die Mannigfaltigkeit $\infty^7$, berührt also $\Omega$ in der zur betreffenden geraden Charakteristik gehörenden Vollschaar von Gruppen von je 10 Punkten. Ihre Bilder werden aus den $\Phi^{(3)}$ von III, Nr. 3 unter Hinzunahme des Bildes $L_3(a_1 \cdots a_7)$ einer doppelt gezählten Geraden erhalten; werden also:

a$_1$) $\Phi_0^{(5)}$; Bild: $L_4(a_1 \cdots a_7)$, bez. $L_{11}(a_1^4 \cdots a_7^4)$,

a$_2$) $\Phi_0^{(5)}$; Bild: $L_7(a_1^4 a_2^2 \cdots a_7^2)$, bez. $L_8(a_1 a_2^3 \cdots a_7^3)$.

b$_1$) $\Phi_{8123}^{(5)}$; Bild: $L_5(a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4 \cdot\cdot a_7)$, bez. $L_{10}(a_1^3 a_2^3 a_3^3 a_4^4 \cdot\cdot a_7^4)$,

b$_2$) $\Phi_{8123}^{(5)}$; Bild: $L_6(a_1^3 a_2 a_3 a_4^2 \cdot\cdot a_7^2)$, bez. $L_9(a_1^2 a_2^4 a_3^4 a_4^3 \cdot\cdot a_7^3)$,

b$_3$) $\Phi_{8123}^{(5)}$; Bild: $L_7(a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^3 a_5^3 a_6^3 a_7)$, bez. $L_8(a_1^3 a_2^3 a_3^3 a_4^2 a_5^2 a_6^2 a_7^4)$.

Da eine solche Schaar, wie die zugehörige $\Phi^{(3)}$, einem 7-System von Doppeltangenten zugeordnet ist (III, Nr. 3), und $\Phi^{(3)}$ in eine solche Gerade, verbunden mit $\infty^1$ Kegelschnitten, zerfallen kann, so hat man noch:

D u r c h d i e 10 B e r ü h r u n g s p u n k t e e i n e r u n s e r e r C u r v e n $\Phi^{(5)}$, i h r e 3 D o p p e l p u n k t e u n d d i e 2 B e r ü h r u n g s p u n k t e i r g e n d e i n e r d e r D o p p e l t a n g e n t e n d e s z u g e o r d n e t e n 7-S y s t e m s, $t_\alpha$, g e h e n $\infty^1$ C u r v e n 4$^{\text{ter}}$ O r d n u n g, m i t d e m l e t z t e n B a s i s p u n k t i n e i n e m S c h n i t t p u n k t d e r $\Phi^{(5)}$ m i t d e r $t_\alpha$.

VI. Ungerade Berührungscurven $\Phi^{(5)}$, mit je 4 scheinbaren Doppelpunkten.

Nach der Abbildung hat man folgende $\infty^6$-Schaaren:

a$_1$) $\Phi_{12}^{(5)}$; Bild: $L_4(a_2^2 a_3 \cdots a_7)$, bez. $L_{11}(a_1^5 a_2^3 a_3^4 \cdots a_7^4)$,

a$_2$) $\Phi_{12}^{(5)}$; Bild: $L_5(a_1 a_2 a_3^2 \cdot\cdot a_6^2)$, bez. $L_{10}(a_1^4 a_2^4 a_3^3 \cdot\cdot a_6^3 a_7^5)$,

a$_3$) $\Phi_{12}^{(5)}$; Bild: $L_6(a_1^2 a_2^2 a_3^3 a_4^3 a_5 a_6 a_7)$, bez. $L_9(a_1^2 a_2^3 a_3^2 a_4^2 a_5^4 a_6^4 a_7^4)$,

a$_4$) $\Phi_{12}^{(5)}$; Bild: $L_7(a_1^3 a_2 a_3^4 a_4^2 \cdot\cdot a_7^2)$, bez. $L_8(a_1^2 a_2^4 a_3 a_4^3 \cdot\cdot a_7^3)$.

b$_1$) $\Phi_{81}^{(5)}$; Bild: $L_5(a_1^2 a_2^3 a_3 \cdot\cdot a_7)$, bez. $L_{10}(a_1^3 a_2^2 a_3^4 \cdot\cdot a_7^4)$,

b$_2$) $\Phi_{81}^{(5)}$; Bild: $L_6(a_1^3 a_2^2 \cdots a_6^2)$, bez. $L_9(a_1^2 a_2^3 \cdots a_6^3 a_7^5)$,

b$_3$) $\Phi_{81}^{(5)}$; Bild: $L_7(a_1^2 a_2 a_3 a_4^3 \cdot\cdot a_7^3)$, bez. $L_8(a_1^3 a_2^4 a_3^4 a_4^2 \cdot\cdot a_7^2)$,

mit den Vertauschungen von $1, \cdots 7$. Dies gibt $27 \cdot 28$ $\infty^6$-Schaaren, je zu 27 einem der 28 ungeraden Systeme $(ik)$ angehörig.

Die Zuordnung der einzelnen Schaaren zu Charakteristikengruppen ergibt sich aus den in jeder Schaar weiter enthaltenen Unterschaaren. In $a_1$) ist enthalten als Bild:

$$L_2(a_3 \cdots a_7) \cdot L_1(a_2) \cdot L_1'(a_2),$$

d. h. die Doppeltangente $t_{12}$, welcher die Schaar zunächst zugeordnet ist, verbunden mit zwei Berührungskegelschnitten eines Systems; ferner die Doppeltangente $t_{81}$, verbunden mit der $\infty^5$-Schaar von [82] zugeordneten Berührungscurven $\Phi^{(4)}$ aus I dieser Nummer; die übrigen in der Gruppe $(12) + (81) = [82]$ enthaltenen 10 Doppeltangenten nur je mit Curvenschaaren $\Phi^{(4)}$ aus II, Nr. 5, die letzten 16 Doppeltangenten je mit Schaaren $\Phi^{(4)}$ aus III, Nr. 5 verbunden. Somit unterscheiden sich die $(ik)$ zugehörigen 27 Unterschaaren $\Phi^{(6)}$ nach den 27 von $t_{ik}$ verschiedenen Doppeltangenten, indem in einer solchen Schaar immer nur eine dieser 27 Doppeltangenten mit einer $\Phi^{(4)}$ aus I, Nr. 5 verbunden vorkommt.

Dies liefert auch die Abbildung unserer Schaaren nach Nr. 1. Für $a_1$) gehe man zu dem Zweck in Nr. 1 aus von

$$C(\xi) \equiv t_{81} \cdot \Phi_{82}^{(2)},$$

wo $\Phi_{82}^{(2)}$ ein [82] angehöriger Berührungskegelschnitt ist (mit dem Bilde $a_1 \cdot L_1(a_2)$), und betrachte also die beiden Schnittpunkte von $t_{81}$ mit $\Phi_{82}^{(2)}$ als scheinbare Doppelpunkte $\beta_1, \beta_2$ von $C$. Die Curven 4[ter] Ordnung, $P = o$, von (2) Nr. 1, treffen dann nur $\Phi_{82}^{(2)}$ in $\infty^2$ Gruppen von je 2 beweglichen Punkten; den durch $\beta_1$ und $\beta_2$ gehenden Kegelschnitten $Q$, welche diese Gruppen ebenfalls ausschneiden, kann man also noch vorschreiben, dass in $\beta_1$ die Richtungen von $P$, $Q$ harmonisch liegen zu denen von $C$. Dann folgt aber Gleichung (6) von Nr. 1, und damit in den $C'$ die gesuchte $\infty^6$-Schaar von $\Phi_{12}^{(5)}$. Die vier Doppelpunkte einer solchen Curve liegen mit $\beta_1, \beta_2$ und mit zweien der Schnittpunkte der Curve mit $\Phi_{82}^{(2)}$ auf einem Kegelschnitt; ihre 10 Berührungspunkte, ihre 4 Doppelpunkte und die zwei Berührungspunkte von $t_{81}$ bilden die 16 Basispunkte eines Büschels von Curven 4[ter] Ordnung.

### VII. Gerade Berührungscurven $\Phi^{(5)}$, mit je 5 scheinbaren Doppelpunkten.

Man gehe in Nr. 1 für die Curve $C$ von einer aus drei Doppeltangenten $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ bestehenden geraden Berührungscurve $\Phi^{(3)}$ aus, mit 3 scheinbaren Doppelpunkten in deren Schnittpunkten $\beta_1 \beta_2 \beta_3$ (z. B. von $t_{81} t_{82} t_{12}$ mit dem Bilde $a_1 \cdot a_2 \cdot L_2(a_3 \cdots a_7)$, zu $(o)$ gehörig). Die Curven $4^{ter}$ Ordnung $P = o$ von (2) treffen $C$ nur in festen Punkten; die durch $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ gehenden Kegelschnitte $Q$ von (3) kann man dann so bestimmen, dass die Richtungen von $P$, $Q$ in $\beta_2$ mit denen von $\xi_1, \xi_3$ und in $\beta_3$ mit denen von $\xi_1, \xi_2$ harmonisch liegen. Gibt man nun der Curve

$$P^2 - \varrho\, Q^2 \Omega = o$$

einen weiteren Punkt auf $\xi_1$, so erhält sie nicht nur $\xi_1$, sondern auch $\xi_2 \xi_3$ zum Factor und es existirt also wieder Gleichung (6), womit in den $C'$ eine $\infty^5$-Schaar der gesuchten Curven $\Phi^{(5)}$ gefunden ist.

Solcher $\infty^5$-Schaaren existiren also $56 \cdot 36$, je 56 in der allgemeinen, einer der 36 geraden Charakteristiken $(\alpha)$ zugeordneten Schaar von $\Phi^{(5)}_\alpha$. Die 56 Schaaren von $(\alpha)$ sind einzeln den 56 Doppeltangententripeln zugeordnet, welche in der allgemeinen Schaar der $\Phi^{(3)}_\alpha$ enthalten sind.

Die 5 Doppelpunkte einer $\Phi^{(5)}_\alpha$ liegen mit den 3 Schnittpunkten des zugehörigen Doppeltangententripels auf einem Kegelschnitt; dieselben 8 Punkte, die 10 Berührungspunkte der $\Phi^{(5)}_\alpha$ und die 6 Berührungspunkte des Tripels liegen zusammen auf einer Curve $4^{ter}$ Ordnung.

Die Abbildung ergibt:

a$_1$) $\Phi^{(5)}_0$; Bild: $L_5(a_3^2 \cdots a_7^2)$, bez. $L_{10}(a_1^5 a_2^5 a_3^3 \cdots a_7^3)$, zug. $t_{81} t_{82} t_{12}$,

a$_2$) $\Phi^{(5)}_0$; Bild: $L_6(a_1^3 a_2^3 a_3^3 a_4 \cdots a_7)$, bez. $L_9(a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^4 \cdots a_7^4)$, zug. $t_{12} t_{13} t_{23}$.

b$_1$) $\Phi_{1234}$; Bild: $L_3(a_1 \cdots a_4)$, bez. $L_{12}(a_1^4 \cdots a_4^4 a_5^5 a_6^5 a_7^5)$, zug. $t_{85} t_{86} t_{87}$,

b$_2$) $\Phi_{1234}$; Bild: $L_4(a_1^2 a_2^2 a_5 a_6 a_7)$, bez. $L_{11}(a_1^3 a_2^3 a_3^5 a_4^5 a_5^4 a_6^4 a_7^4)$, zug. $t_{83} t_{84} t_{12}$,

b$_3$) $\Phi_{1234}$; Bild: $L_5(a_1^3 a_2 a_3 a_4 a_5^2 a_6^2)$, bez. $L_{10}(a_1^2 a_2^4 a_3^4 a_4^4 a_5^3 a_6^3 a_7^5)$, zug. $t_{87} t_{15} t_{16}$,

b$_4$) $\Phi^{(5)}_{1234}$; Bild: $L_6(a_2^2 a_3^2 a_4^2 a_5^3 a_6^3 a_7)$, bez. $L_9(a_1^5 a_2^3 a_3^3 a_4^3 a_5^2 a_6^2 a_7^4)$, zug. $t_{81} t_{17} t_{56}$,

b$_5$) $\Phi^{(5)}_{1234}$; Bild: $L_6(a_1^4 a_2^2 a_3^2 a_4^2 a_5 a_6 a_7)$, bez. $L_9(a_1 a_2^3 a_3^3 a_4^3 a_5^4 a_6^4 a_7^4)$, zug. $t_{12} t_{13} t_{14}$,

b$_6$) $\Phi^{(5)}_{1234}$; Bild: $L_7(a_1^3 \cdot\cdot a_4^3 a_5^2 a_6^2)$, bez. $L_8(a_1^2 \cdot\cdot a_4^2 a_5^3 a_6^3 a_7^5)$, zug. $t_{87} t_{57} t_{67}$,
b$_7$) $\Phi^{(5)}_{1234}$; Bild: $L_7(a_1 a_2 a_3^3 a_4^3 a_5^4 a_6^2 a_7^2)$, bez. $L_8(a_1^4 a_2^4 a_3^2 a_4^2 a_5 a_6^3 a_7^3)$, zug. $t_{12} t_{35} t_{45}$,
mit den Vertauschungen von $1, \cdots 7$. In einer solchen $\infty^5$-Schaar ist besonders enthalten: irgend eine der drei Doppeltangenten des zugehörigen Tripels, verbunden mit einer entsprechenden Schaar von $\infty^4$ Curven $\Phi^{(4)}$ aus II, Nr. 5.

**VIII. Ungerade Berührungscurven $\Phi^{(5)}$, mit je 6 scheinbaren Doppelpunkten.**

Man hat die $\infty^4$-Schaaren:

a$_1$) $\Phi^{(5)}_{81}$; Bild: $L_2(a_1)$, bez. $L_{13}(a_1^4 a_2^5 \cdots\cdot a_7^5)$,
a$_2$) $\Phi^{(5)}_{81}$; Bild: $L_4(a_1 a_2^2 a_3^2 a_4^2)$, bez. $L_{11}(a_1^4 a_2^3 a_3^3 a_4^3 a_5^5 a_6^5 a_7^5)$,
a$_3$) $\Phi^{(5)}_{81}$; Bild: $L_5(a_1^4 a_2 \cdots a_7)$, bez. $L_{10}(a_1 a_2^4 \cdots\cdot a_7^4)$,
a$_4$) $\Phi^{(5)}_{81}$; Bild: $L_6(a_1 a_2^4 a_3^2 \cdot\cdot a_6^2)$, bez. $L_9(a_1^4 a_2 a_3^3 \cdot\cdot a_6^3 a_7^5)$,
a$_5$) $\Phi^{(5)}_{81}$; Bild: $L_7(a_1^4 a_2^3 a_3^3 a_4^3 a_5 a_6 a_7)$, bez. $L_8(a_1 a_2^2 a_3^2 a_4^2 a_5^4 a_6^4 a_7^4)$.
b$_1$) $\Phi^{(5)}_{12}$; Bild: $L_3(a_1 a_2 a_3^2)$, bez. $L_{12}(a_1^4 a_2^4 a_3^3 a_4^5 \cdot\cdot a_7^5)$,
b$_2$) $\Phi^{(5)}_{12}$; Bild: $L_4(a_3^3 a_4 \cdot\cdot a_7)$, bez. $L_{11}(a_1^5 a_2^5 a_3^2 a_4^4 \cdot\cdot a_7^4)$,
b$_3$) $\Phi^{(5)}_{12}$; Bild: $L_5(a_1^3 a_2 a_3^2 a_4^2 a_5^2)$, bez. $L_{10}(a_1^2 a_2^4 a_3^3 a_4^3 a_5^3 a_6^5 a_7^5)$,
b$_4$) $\Phi^{(5)}_{12}$; Bild: $L_6(a_2^2 a_3^3 a_4^3 a_5^3 a_6 a_7)$, bez. $L_9(a_1^5 a_2^3 a_3^2 a_4^2 a_5^2 a_6^4 a_7^4)$,
b$_5$) $\Phi^{(5)}_{12}$; Bild: $L_7(a_1^3 a_2^3 a_3^4 a_4^2 a_5^2 a_6^2)$, bez. $L_8(a_1^2 a_2^2 a_3 a_4^3 a_5^3 a_6^3 a_7^5)$,
b$_6$) $\Phi^{(5)}_{12}$; Bild: $L_7(a_1^5 a_2 a_3^2 \cdot\cdot a_7^2)$, bez. $L_8(a_2^4 a_3^3 \cdots a_7^3)$,

mit den Vertauschungen von $1, \cdots 7$. Dies sind $72 \cdot 28$ Schaaren, zu je 72 in einem der 28 ungeraden Systeme $(\alpha)$ enthalten.

In a$_1$) mit dem Bild $L_2(a_1)$, ist enthalten: 1) die Doppeltangente $t_{81}$, verbunden mit 2 Kegelschnitten eines Systems [81]; 2) irgend eine der 6 Doppeltangenten

$$t_{82},\ t_{83}, \cdots t_{87},$$

verbunden mit einer $\infty^3$-Schaar von rationalen $\Phi^{(4)}$ aus III, Nr. 5. Dieses Sechsersystem, welchem unsere Unterschaar $\Phi^{(4)}_{81}$ aus (81) eindeutig zugeordnet ist, hat die Eigenschaft, mit $t_{81}$ verbunden eines der $8 \cdot 36$ Aronhold'schen 7-Systeme von III, Nr. 3 zu liefern. Solcher 7-Systeme, welche $t_{81}$ enthalten, gibt es in der That $\frac{8 \cdot 36 \cdot 7}{28} = 72$, nämlich je 2 unter den 8 zu jeder der 36 geraden Charakteristiken gehörigen Systemen.

Hiernach leitet man eine unserer Schaaren mittels Nr. 1 ab, indem man von einer Curve

$$C \equiv t_{82} t_{83} t_{84} t_{85} \cdot t_{67}$$

ausgeht, und in ihr die 6 gegenseitigen Schnittpunkte von $t_{82}$, $t_{83}$, $t_{84}$, $t_{85}$ als scheinbare Doppelpunkte $(\beta_1, \cdots \beta_6)$ betrachtet $(r = 5,\ d = 6,\ s = 5)$, wodurch man unmittelbar zu (6), Nr. 1 gelangt. Die 6 Doppelpunkte einer so abgeleiteten $\Phi_{81}^{(5)}$ liegen mit den 6 Eckpunkten $\beta_1 \cdots \beta_6$ des vollständigen Vierseits $t_{82} t_{83} t_{84} t_{85}$ auf einer Curve 3ter Ordnung, die auch durch die 3 wirklichen Schnittpunkte von $\Phi_{81}^{(5)}$ mit $t_{67}$ geht; und jene 15 Punkte, die 10 Berührungspunkte von $\Phi_{81}^{(5)}$, und die 10 Berührungspunkte von $t_{82} t_{83} t_{84} t_{85} t_{67}$ liegen auf einer Curve 5ter Ordnung.

### IX. Berührungscurven $\Phi^{(6)}$, mit je 4 scheinbaren Doppelpunkten.

Man hat 63 verschiedene $\infty^{11}$-Schaaren, welche $\Omega$ in $\infty^9$ Gruppen von je 12 Punkten berühren, und welche sich aus den 63 $\infty^1$-Schaaren von $\Phi^{(2)}$ in I, Nr. 3, oder den 63 $\infty^5$-Schaaren von $\Phi^{(4)}$ in I, Nr. 5 einzeln nach Nr. 1 ergeben.

Die 12 Berührungspunkte und die 4 Doppelpunkte einer solchen $\Phi^{(6)}$ bilden die 16 Basispunkte eines Büschels von Curven 4ter Ordnung; dieselben 16 Punkte liegen mit den 8 Berührungspunkten einer zugehörigen $\Phi^{(4)}$ und deren Doppelpunkte auf einer Curve 5ter Ordnung, durch deren 10 weitere Schnittpunkte mit $\Phi^{(4)}$ auch $\Phi^{(6)}$ geht. Diese 10 Punkte und die 5 Doppelpunkte liegen auch auf einer Curve 3ter Ordnung.

Die .Abbildungen ergeben sich aus Nr. 3, I durch Zufügung von $L_6(a_1^2 \cdots a_7^2)$, zu

a) $\Phi_{81}^{(6)}$; Bild: $L_7(a_1^3 a_2^2 \cdots a_7^2)$, bez. $L_{11}(a_1^3 a_2^4 \cdots a_7^4)$.

b) $\Phi_{1234}^{(6)}$; Bild: $L_8(a_1^3 \cdots a_4^3 a_5^2 a_6^2 a_7^2)$, bez. $L_{10}(a_1^3 \cdots a_4^3 a_5^4 a_6^4 a_7^4)$.

c) $\Phi_{12}^{(6)}$; Bild: $L_9(a_1^4 a_2^2 a_3^3 \cdots a_7^3)$, bez. $L_9(a_1^2 a_2^4 a_3^3 \cdots a_7^3)$.

### X. $\Phi^{(6)}$, mit je 5 scheinbaren Doppelpunkten.

Dieselben sind nach Nr. 1 abzuleiten aus Doppeltangentenpaaren, deren Schnittpunkt als scheinbarer Doppelpunkt betrachtet wird; die so entstehenden $\infty^{10}$-Schaaren sind also einzeln den Schaaren $\Phi^{(4)}$ von Nr. 5, II

zugeordnet. Es gibt deren, wie dort, 6 · 63. Die 12 Berührungspunkte einer solchen Curve $\Phi^{(6)}$ und ihre 5 Doppelpunkte liegen mit den 4 Berührungspunkten des zugehörigen Doppeltangentenpaars und dessen Schnittpunkt (und mit je einem Schnittpunkt der beiden Doppeltangenten mit $\Phi^{(6)}$) auf einer Curve 4ter Ordnung, mit den 8 Berührungspunkten einer zugehörigen $\Phi^{(4)}$ von II Nr. 5 und deren 2 Doppelpunkten auf einer Curve 5ter Ordnung. Die Berührungsgruppen einer $\infty^{10}$-Schaar von $\Phi^{(6)}$ auf $\Omega$ bilden eine $\infty^9$-Vollschaar.

Die Abbildungen ergeben sich aus II, Nr. 5 durch Zufügung von $L_3(a_1 \cdots a_7)$ zu

a$_1$) $\Phi^{(6)}_{12}$; Bild: $L_6(a_1 a_2 a_3^2 \cdots a_7^2)$, bez. $L_{12}(a_1^5 a_2^5 a_3^4 \cdots a_7^4)$; etc.

### XI. $\Phi^{(6)}$, mit je 6 scheinbaren Doppelpunkten.

Dieselben sind nach Nr. 1 einzeln den Schaaren $\Phi^{(4)}$ von III, Nr. 5 zugeordnet, bilden also 16 · 63 $\infty^9$-Schaaren, welche aber $\Omega$ in Vollschaaren, je 16 in derselben Vollschaar, berühren. Durch die 12 Berührungspunkte einer solchen Curve $\Phi^{(6)}$, durch deren 6 Doppelpunkte, durch die 2 Berührungspunkte irgend einer der Doppeltangenten des zugehörigen Sechsersystems (s. Nr. 5, III) und durch einen Schnittpunkt derselben mit $\Phi^{(6)}$ gehen $\infty^2$ Curven 5ter Ordnung.

Die Abbildungen erhält man aus III, Nr. 5 wieder durch Zufügung von $L_3(a_1 a_2 \cdots a_7)$ zu

a$_1$) $\Phi^{(6)}_{12}$; Bild: $L_5(a_1^2 a_2^2 a_3 \cdots a_7)$, bez. $L_{13}(a_1^4 a_2^4 a_3^5 \cdots a_7^5)$; etc.

### XII. $\Phi^{(6)}$, mit je 7 scheinbaren Doppelpunkten.

Die Abbildung einer dieser $\infty^8$-Schaaren wird:

a$_1$) $\Phi^{(6)}_{81}$; Bild: $L_4(a_2 a_3 \cdots a_7)$, bez. $L_{14}(a_1^6 a_2^5 \cdots a_7^5)$.

Diese Schaar ist zunächst der Gruppe [81] zugehörig. Enthalten ist in ihr: 1) $t_{81}$, verbunden mit einer $\infty^7$-Schaar von $\Phi^{(5)}_0$ aus Nr. 5, V, a$_1$); 2) irgend eine der 6 Doppeltangenten

a$_1'$) $t_{82}$, $t_{83}$, $\cdots t_{87}$,

je verbunden mit einer $\infty^6$-Schaar von $\Phi^{(5)}$ aus Nr. 5, VI; 3) irgend eine der 6 Doppeltangenten

a$_1''$) $t_{12}, t_{13}, \cdots t_{17}$,

je verbunden mit einer $\infty^4$-Schaar von $\Phi^{(5)}$ aus Nr. 5, VIII. Dabei ist $t_{81}$ eine der 16 nicht in [81] enthaltenen Doppeltangenten; a$_1'$) und a$_1''$) sind die beiden Systeme von 6 Doppeltangenten, welche, mit $t_{81}$ verbunden, zu den 8 Aronhold'schen 7-Systemen gehören, die der geraden Charakteristik $[81]+(81)=(o)$ zugeordnet sind. Da a$_1'$) und a$_1''$) zu a$_1$) sich ungleichartig verhalten, erhält man also, zu [81] gehörig, $16 \cdot 2$ Unterschaaren. Im Ganzen gibt es $16 \cdot 2 \cdot 63$ unserer Schaaren.

Man leitet eine solche Schaar nach Nr. 1 dadurch her, dass man von einer zerfallenden Curve 4$^{ter}$ Ordnung, $C$, mit 4 scheinbaren Doppelpunkten ausgeht; nämlich für a$_1$) von einer Doppeltangente $t_{81}$, verbunden mit einer geraden Berührungscurve $\Phi_0^{(3)}$ mit einem scheinbaren Doppelpunkte (Nr. 3, III), wobei auch die 3 Schnittpunkte von $t_{81}$ mit $\Phi_0^{(3)}$ als scheinbare Doppelpunkte zu betrachten sind. Lässt man auch $\Phi_0^{(3)}$ zerfallen in $t_{82}$ und einen von den $\infty^1$ Berührungskegelschnitten [82], so folgt:

Die 12 Berührungspunkte von $\Phi_{81}^{(6)}$ aus a$_1$) dieser Nummer liegen mit den 7 Doppelpunkten dieser Curve auf $\infty^2$ Curven 5$^{ter}$ Ordnung; mit diesen, den 4 Berührungspunkten und dem Schnittpunkte von $t_{81}$, $t_{82}$ und mit einem Schnittpunkt von $t_{82}$ mit $\Phi_{81}^{(6)}$ auf $\infty^1$ Curven 5$^{ter}$ Ordnung; diese 2 Punkte mit jenen 7 Doppelpunkten auf $\infty^1$ Curven 3$^{ter}$ Ordnung.

### XIII. $\Phi^{(6)}$, mit je 8 scheinbaren Doppelpunkten.

Die Abbildung einer dieser $\infty^7$-Schaaren ist:

$$\Phi_{8123}^{(6)}; \text{ Bild: } L_4(a_1^2 a_4 a_5 a_6 a_7).$$

In derselben sind ausgezeichnet enthalten: $t_{82}$ und $t_{83}$, je verbunden mit einer $\infty^6$-Schaar von Curven $\Phi^{(5)}$ aus VI, Nr. 5. Dies sind zwei in der Gruppe [8123] enthaltene Doppeltangenten, welche aber aus zwei verschiedenen der 6 Paare von [8123] genommen sind. Somit gibt es innerhalb einer Gruppencharakteristik $[\alpha]$ $\frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 4 = 60$ verschiedene unserer Schaaren, im Ganzen $60 \cdot 63$ $\infty^7$-Schaaren.

Um die obige Schaar mittels Nr. 1 abzuleiten, kann man von einer Curve

$$C = t_{82} \cdot t_{83} \cdot \Phi_{81}^{(2)}$$

ausgehen, indem man die 5 gegenseitigen Schnittpunkte der 3 Curven, aus welchen $C$ besteht, als scheinbare Doppelpunkte von $C$ betrachtet:

Die 12 Berührungspunkte einer $\Phi^{(6)}$, ihre 8 Doppelpunkte, die 4 Berührungspunkte des zugehörigen Doppeltangentenpaars und dessen Schnittpunkt bilden die 25 Basispunkte eines Büschels von Curven 5ter Ordnung; der letztere Punkt liegt mit den acht Doppelpunkten der $\Phi^{(6)}$ auf $\infty^1$ Curven 3ter Ordnung.

### XIV. $\Phi^{(6)}$, mit je 9 scheinbaren Doppelpunkten.

Eine Schaar ist:

$$\Phi_{1234}^{(6)}; \text{ Bild: } L_3(a_5\, a_6\, a_7).$$

In dieser $\infty^6$-Schaar ist ausgezeichnet enthalten: irgend eine der 4 Doppeltangenten

$$t_{81},\ t_{82},\ t_{83},\ t_{84},$$

je verbunden mit einer $\infty^5$-Schaar von Curven $\Phi^{(5)}$ aus VII, Nr. 5. Die 4 Doppeltangenten bilden ein Quadrupel derart, dass keine derselben in der Gruppe [1234] vorkommt und irgend drei derselben eine gerade Berührungscurve $\Phi^{(3)}$ bilden. Solcher Quadrupel, [1234] zugeordnet, gibt es $\frac{16 \cdot 15 \cdot 8 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 80$. Es gibt somit $80 \cdot 63$ gleichberechtigte unserer $\infty^6$-Schaaren $\Phi^{(6)}$.

Mittels Nr. 1 lässt sich eine solche Schaar aus dem zugehörigen Quadrupel als Curve $C$ ableiten, indem man deren 6 gegenseitige Schnittpunkte als scheinbare Doppelpunkte von $C$ betrachtet:

Die 12 Berührungspunkte einer $\Phi^{(6)}$, ihre 9 Doppelpunkte, die 6 Eckpunkte des aus dem zugehörigen Quadrupel gebildeten Vierseits und die 8 Berührungspunkte dieses Vierseits liegen auf einer Curve 5ter Ordnung; die 9 Doppelpunkte mit jenen 6 Eckpunkten auf einer Curve 3ter Ordnung.

**XV. $\Phi^{(6)}$, mit je 10 scheinbaren Doppelpunkten.**

Eine $\infty^5$-Schaar ist:

$$\Phi_{81}^{(6)}; \text{ Bild: } L_3(a_1 a_2^2).$$

Dieselbe enthält besonders: irgend eine der Doppeltangenten

$$t_{83}, \; t_{84}, \; t_{85}, \; t_{86}, \; t_{87}, \; t_{12},$$

je verbunden mit einer $\infty^4$-Schaar von $\Phi^{(5)}$ aus VIII, Nr. 5. Die 6 Doppeltangenten, denen unsere Schaar, nach [81], weiter eindeutig zugeordnet ist, bilden eines der in III, Nr. 5 besprochenen Sechsersysteme. Es gibt eine einzige Gruppe, [12], welche keine der Doppeltangenten des Sechsersystems enthält; aber zwei verschiedene Gruppen, nämlich ausser [81] auch [82], welche alle 6 Linien des Systems enthalten. Zur Gruppe [81] existiren aber 32 verschiedene Gruppen, welche zu [81] in analoger Beziehung stehen, wie [82].

Somit gibt es $32 \cdot 63$ unserer $\infty^5$-Schaaren.

Zur Ableitung einer Schaar nach Nr. 1 kann man ausgehen von einer Curve

$$C = t_{82} \cdot t_{83} t_{84} t_{85} t_{86} t_{87},$$

indem man die 10 Ecken des aus $t_{83} \cdots t_{87}$ gebildeten vollständigen 5-Seits als scheinbare Doppelpunkte von $C$ betrachtet:

Durch die 12 Berührungspunkte und die 10 Doppelpunkte einer $\Phi^{(6)}$, sowie durch die 8 Berührungspunkte von vier Linien des zugehörigen Sechsersystems und deren 6 Schnittpunkte gehen $\infty^1$ Curven 6ter Ordnung; durch diese 6 Punkte und jene 10 Doppelpunkte $\infty^1$ Curven 4ter Ordnung.

## 6. Uneigentliche Berührungsschaaren.

I. Die uneigentlichen, zu $[o]$ gehörenden Berührungscurven sind nur solche von gerader Ordnung, welche vermöge $\Omega_4 = o$ durch doppelt gezählte Curven ersetzt werden können. Indessen gibt es doch darunter ausgezeichnete Schaaren, auf welche ebenfalls die Betrachtungen von Nr. 1 Anwendung finden, und welche der Vollständigkeit halber für $\Psi_0^{(4)}$ und $\Psi_0^{(6)}$ aufgezählt werden sollen.

A. Als $\Psi_0^{(4)}$ hat man so zunächst die Gesammtheit von $\infty^6$ Berührungscurven 4ter Ordnung:

$$C_2^2 - \lambda\,\Omega = o\,,$$

ohne scheinbare Doppelpunkte; abgebildet durch $L_6(a_1^2 \cdots a_7^2)$; irgend zwei der Curven treffen sich in 8 wirklichen und 8 scheinbaren Schnittpunkten, die je auf einem Kegelschnitt liegen.

B. Darin enthalten sind 63 Unterschaaren, von der Mannigfaltigkeit $\infty^3$, von denen jede Schaar $\Omega$ so berührt, wie die Paare der Kegelschnitte eines Gruppensystems $[\alpha]$. Nimmt man in einem solchen Paar statt eines der Kegelschnitte den mit ihm im andern Blatte vereinigt liegenden, so erhält man eine $\infty^2$-Schaar von $\Psi_0^{(4)}$, je aus zwei Kegelschnitten eines Gruppensystems $[\alpha]$ bestehend, die sich in 4 scheinbaren Schnittpunkten treffen, also $\infty^2$ $\Psi_0^{(4)}$ mit je 4 scheinbaren Doppelpunkten. Solcher quadratischer $\infty^2$-Schaaren gibt es 63; die Berührungsgruppen einer Schaar, einfach genommen, bilden eine lineare $\infty^2$-Schaar auf $\Omega$. Die Bilder der 63 Schaaren sind:

a) $\Psi_{0,81}^{(4)}$; Bild: $L_2(a_1^2)$, bez. $L_{10}(a_1^2\,a_2^4 \cdots a_7^4)$.

b) $\Psi_{0,1234}^{(4)}$; Bild: $L_4(a_1^2 \cdots a_4^2)$, bez. $L_8(a_1^2 \cdots a_4^2\,a_5^4\,a_6^4\,a_7^4)$.

c) $\Psi_{0,12}^{(4)}$; Bild: $L_6(a_1^4\,a_3^2 \cdots a_7^2)$, bez. $L_6(a_2^4\,a_3^2 \cdots a_7^2)$.

Ist für das System: $[\alpha]$:

$$C_2\,C_2' - B_2^2 \equiv \Omega\,,$$

wo $C_2, C_2', B_2$ Kegelschnitte sind, so wird

$$(C_2 + 2\,\lambda\,B_2 + \lambda^2\,C_2')(C_2 + 2\,\mu\,B_2 + \mu^2\,C_2') - [C_2 + (\lambda + \mu)\,B_2 + \lambda\,\mu\,C_2']^2 \equiv$$
$$\equiv (\lambda - \mu)^2\,\Omega.$$

Hier steht im ersten Term eine beliebige Curve der $\infty^2$-Schaar $\Psi_{0,\alpha}^{(4)}$, als deren Parameter $\lambda + \mu$, $\lambda\mu$ aufzufassen sind. Für $\mu = -\lambda$ folgt daraus, dass die 4 Schnittpunkte von $C_2 = o$, $C_2' = o$ und die 4 Berührungspunkte irgend eines zum selben System gehörigen Kegelschnitts $C_2 + 2\,\lambda\,B_2 + \lambda^2 C_2' = o$ auf einem Kegelschnitt liegen. Dieser bekannte Satz [1]) ergibt sich auch als specieller

---

1) Ein specieller Fall desselben findet sich zuerst bei Hesse, Cr. J. 49, p. 300.

Fall unserer Betrachtungen von Nr. 1, angewandt auf zwei Curven $\Psi_0^{(4)}$ einer Schaar, da man aus denselben unmittelbar schliesst:

Die 8 Berührungspunkte und 4 Schnittpunkte irgend zweier Kegelschnitte eines Systems $[\alpha]$ bilden mit den 4 Berührungspunkten irgend eines dritten Kegelschnitts aus $[\alpha]$ die Basispunkte eines Büschels von Curven 4ter Ordnung. Man hat zu jenem Zweck nur zu beachten, dass die genannten 8 Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt liegen.

C. Als $\Psi_0^{(6)}$ hat man zuerst die Gesammtheit der $\infty^{12}$ Curven

$$C_3^2 - Q_1^2 \cdot \Omega = o$$

mit je drei scheinbaren Doppelpunkten, abgebildet durch $L_9(a_1^3 \cdots a_7^3)$.

D. Sodann hat man 28 verschiedene $\infty^9$-Schaaren von Curven $\Psi_{0,\alpha}^{(6)}$, einzeln zugeordnet, ausser $[o]$, den 28 ungeraden Charakteristiken $(\alpha)$. Jede Curve hat 6 scheinbare Doppelpunkte. Die Abbildungen der Schaaren sind:

a) $\Psi_{0,81}^{(6)}$; Bild: $L_6(a_2^2 \cdots a_7^2)$, bez. $L_{12}(a_1^6 a_2^4 \cdots a_7^4)$.

b) $\Psi_{0,12}^{(6)}$; Bild: $L_8(a_1^4 a_2^4 a_3^2 \cdots a_7^2)$, bez. $L_{10}(a_1^2 a_2^2 a_3^4 \cdots a_7^4)$.

Diese 28 Schaaren sind einzeln auf die 28 Schaaren von ungeraden $\Phi_\alpha^{(3)}$ aus II, Nr. 3 derartig zu beziehen, dass je zwei Curven aus einer Schaar $\Phi_\alpha^{(3)}$ auch eine Curve der entsprechenden $\Psi_{0,\alpha}^{(6)}$ bilden. Daher lässt sich eine Schaar $\Psi_{0,\alpha}^{(6)}$ auch aus einer Curve 4ter Ordnung $\Phi_\alpha^{(3)} \cdot t_\alpha$, wo $t_\alpha$ die zu $(\alpha)$ gehörige Doppeltangente ist, nach Nr. 1 ableiten, indem man die 3 Schnittpunkte von $t_\alpha$ mit $\Phi_\alpha^{(3)}$ als scheinbare Doppelpunkte von $\Psi_\alpha^{(3)} \cdot t_\alpha$ betrachtet.

Die 12 Berührungs- und 6 Doppelpunkte von $\Psi_{0,\alpha}^{(6)}$ liegen mit den 8 Berührungspunkten von $\Phi_\alpha^{(3)} \cdot t_\alpha$ und den drei Schnittpunkten von $t_\alpha$ mit $\Phi_\alpha^{(3)}$ auf einer Curve 5ter Ordnung. Die letzteren 3 Punkte liegen mit den 6 Doppelpunkten von $\Psi_{0,\alpha}^{(6)}$ auf einer Curve 3ter Ordnung, diese 6 Punkte daher auf einem Kegelschnitt.

Durch die genannten $12 + 6$ Punkte von $\Psi_{0,\alpha}^{(6)}$ und die zwei Berührungspunkte von $t_\alpha$ gehen $\infty^3$ Curven 5ter Ordnung; diese 20 Punkte bilden also den vollständigen Schnitt einer Curve 4ter und 5ter Ordnung. Und da die ersten 12 Punkte auf einer Curve 3ter Ordnung liegen, so

folgt: der Kegelschnitt durch die 6 Doppelpunkte von $\Psi^{(6)}_{0,\alpha}$ geht auch durch die beiden Berührungspunkte von $t_\alpha$.

Analytisch sei

$$C = t_\alpha \Phi^{(3)}_\alpha = K_2^2 - \Omega;$$

so ist in Nr. 1 zu setzen

$$r = 4, \; d = 3, \; s = 5,$$

und

$$P \equiv K_2 (t_\alpha S_2 + \lambda \Phi^{(3)}_\alpha) + K_1 \cdot C, \;\; Q = t_\alpha S_2 - \lambda \Phi^{(3)}_\alpha,$$

wo $K_1, S_2$ willkürliche Functionen ersten und zweiten Grads. Dann folgt (6), wo

$$C' \equiv (t_\alpha S_2 + \lambda \Phi^{(3)}_\alpha)^2 + 2 K_1 K_2 (t_\alpha S_2 + \lambda \Phi^{(3)}_\alpha) + K_1^2 \cdot C + 4 \lambda S_2 \Omega.$$

Für die 6 Doppelpunkte von $C'$ wird $P = o$, $Q = o$, ohne dass $t_\alpha \Phi^{(3)}_\alpha$ oder $S_2 = o$ dafür $o$ wäre; daher folgt dafür

$$2 \lambda K_2 + t_\alpha K_1 = o,$$

ein auch durch die beiden Berührungspunkte $t_\alpha = o$, $K_2 = o$ von $t_\alpha$ gehender Kegelschnitt.

E. Ferner hat man 63 verschiedene $\infty^8$-Schaaren von Curven $\Psi^{(6)}_0$ mit je 7 scheinbaren Doppelpunkten; einzeln nach [$o$], den 63 Gruppencharakteristiken [$\alpha$] zugeordnet; mit den Abbildungen:

a) $\Psi^{(6)}_{0,81}$; Bild: $L_5(a_1^3 a_2 \cdots a_7)$, bez. $L_{13}(a_1^3 a_2^5 \cdots a_7^5)$.

b) $\Psi^{(6)}_{0,1234}$; Bild: $L_7(a_1^3 \cdots a_4^3 a_5 a_6 a_7)$, bez. $L_{11}(a_1^3 \cdots a_4^3 a_5^5 a_6^5 a_7^5)$.

c) $\Psi^{(6)}_{0,12}$; Bild: $L_9(a_1^5 a_2 a_3^3 \cdots a_7^3)$, bez. $L_9(a_1 a_2^5 a_3^3 \cdots a_7^3)$.

In einer solchen $\infty^8$-Schaar $\Psi^{(6)}_{0,\alpha}$ sind enthalten: die doppeltgezählten Geraden, verbunden mit der vorher genannten $\infty^2$-Schaar von $\Psi^{(4)}_{0,\alpha}$, die aus Kegelschnittpaaren [$\alpha$] besteht. Die ganze Schaar $\Psi^{(6)}_{0,\alpha}$ lässt sich also aus $\Psi^{(4)}_{0,\alpha}$ nach Nr. 1 ableiten, für $r = 4$, $d = 4$, $s = 5$:

Die 12 Berührungs- und 7 Doppelpunkte einer $\Psi^{(6)}_{0,\alpha}$ liegen mit den 8 Berührungs- und 4 Schnittpunkten irgend zweier Kegelschnitte des Systems [$\alpha$] auf einer Curve 5^ter^ Ordnung, diese 4 Schnittpunkte mit jenen 7 Doppelpunkten auf einer Curve 3^ter^ Ordnung.

F. Endlich gibt es $8 \cdot 36$ verschiedene $\infty^5$-Schaaren von Curven $\Psi_0^{(6)}$ mit je 10 scheinbaren Doppelpunkten; einzeln den $8 \cdot 36$ Aronhold'schen 7-Systemen von Doppeltangenten zuzuordnen. Die Bilder sind:

a$_1$) $\Psi_{0,0}^{(6)}$; Bild: $L_2$, bez. $L_{16}(a_1^6 \cdots a_7^6)$,

a$_2$) $\Psi_{0,0}^{(6)}$; Bild: $L_8(a_1^6 a_2^2 \cdots a_7^2)$, bez. $L_{10}(a_2^4, \cdots a_7^4)$.

b$_1$) $\Psi_{0,8123}^{(6)}$; Bild: $L_4(a_1^2 a_2^2 a_3^2)$, bez. $L_{14}(a_1^4 a_2^4 a_3^4 a_4^6 \cdot\cdot a_7^6)$,

b$_2$) $\Psi_{0,8123}^{(6)}$; Bild: $L_6(a_1^4 a_4^2 \cdot\cdot a_7^2)$, bez. $L_{12}(a_1^2 a_2^6 a_3^6 a_4^4 \cdot\cdot a_7^4)$,

b$_3$) $\Psi_{0,8123}^{(6)}$; Bild: $L_8(a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^4 a_5^4 a_6^4)$, bez. $L_{10}(a_1^4 a_2^4 a_3^4 a_4^2 a_5^2 a_6^2 a_7^6)$.

Als ausgezeichnet treten in einer solchen Schaar $\Psi_{0,\alpha}^{(6)}$ auf: die in irgend 2 Curven der zugeordneten Schaar $\Phi_\alpha^{(3)}$ von Nr. 3, III zerfallenden Curven; solche zwei Curven haben 8 scheinbare Schnittpunkte, welche mit den beiden Doppelpunkten der beiden $\Phi_\alpha^{(3)}$ zusammen die 10 scheinbaren Doppelpunkte der speciellen $\Psi_{0,\alpha}^{(6)}$ bilden:

Die 12 Berührungs- und 10 Doppelpunkte einer Curve $\Psi_{0,\alpha}^{(6)}$ liegen mit den 6 Berührungs- und dem Doppelpunkte einer zugeordneten $\Phi_\alpha^{(3)}$ (von III, Nr. 3) und mit 2 Schnittpunkten der $\Phi_\alpha^{(3)}$, $\Psi_{0,\alpha}^{(6)}$ auf $\infty^2$ Curven 6$^{\text{ter}}$ Ordnung; jene 22 Punkte mit den 2 Berührungspunkten irgend einer der 7 Doppeltangenten des zugeordneten 7-Systems auf $\infty^4$ Curven 6$^{\text{ter}}$ Ordnung.

II. Zu uneigentlichen Berührungsschaaren mögen wir auch solche rechnen, welche zwar nicht zu $[o]$, sondern zu einem der übrigen Charakteristikensysteme gehören, aber doch nur aus Curven bestehen, die alle zerfallen. Von den Curven $\Phi^{(6)}$ treten als solche Schaaren noch auf:

Die 63 $\infty^3$-Schaaren $\Phi_\alpha^{(6)}$, deren Curven aus je 3 Kegelschnitten einer $\infty^1$-Schaar $[\alpha]$ bestehen, den 63 verschiedenen $[\alpha]$ zugeordnet; Curven mit je 12 scheinbaren Doppelpunkten. Die Abbildungen sind:

a) $\Phi_{81}^{(6)}$; Bild: $L_3(a_1^3)$, bez. $L_{15}(a_1^3 a_2^6 \cdots a_7^6)$,

b) $\Phi_{1234}^{(6)}$; Bild: $L_6(a_1^3 \cdot\cdot a_4^3)$, bez. $L_{12}(a_1^3 \cdot\cdot a_4^3 a_5^6 a_6^6 a_7^6)$.

c) $\Phi_{12}^{(6)}$; Bild: $L_9(a_1^6 a_3^3 \cdots a_7^3)$, bez. $L_9(a_2^6 a_3^3 \cdots a_7^3)$.

Die 12 Berührungs- und 12 gegenseitigen Schnittpunkte von irgend drei Kegelschnitten eines Systems $[\alpha]$ liegen mit den 4 Berührungspunkten irgend eines vierten Kegel-

schnitts desselben Systems $[\alpha]$ auf $\infty^2$ Curven $6^{\text{ter}}$ Ordnung, mit den 8 Berührungs- und 4 Schnittpunkten irgend zweier Kegelschnitte von $[\alpha]$ auf $\infty^1$ Curven $6^{\text{ter}}$ Ordnung, mit den 12 Berührungs- und 12 Schnittpunkten irgend dreier Kegelschnitte von $[\alpha]$ auf einer Curve $6^{\text{ter}}$ Ordnung. Die 12 Schnittpunkte von irgend dreien der Kegelschnitte aus $[\alpha]$ bilden mit den 4 Schnittpunkten von irgend zweien der Kegelschnitte aus $[\alpha]$ die Basispunkte von $\infty^1$ Curven $4^{\text{ter}}$ Ordnung, und liegen mit den 12 Schnittpunkten von irgend drei andern der Kegelschnitte $[\alpha]$ auf einer Curve $4^{\text{ter}}$ Ordnung.

## 7. Specielle Schnittpunktsätze.

I. Die Betrachtungen von Nr. 3 führen, nach Nr. 1, nur auf bekanntere Schnittpunktsätze. Nimmt man zuerst in Nr. 1: $r=1$, $s=2$ und lässt die Curve $C_1'$ bez. $C_2'$, von (15) Nr. 1 in je 3 Doppeltangenten zerfallen, so hat man nach den dortigen Sätzen oder dieser Gleichung (15): von den 9 Schnittpunkten von $C_1'$ mit $C_2'$ sind 6 scheinbare auf einem Kegelschnitte, 3 wirkliche auf einer Geraden gelegen. Genaueres liefert die Abbildung in Nr. 3, II:

Es gibt (5040) verschiedene 6-Systeme von ungeraden Charakteristiken

$$(\alpha),\ (\beta);\ (\alpha_1),\ (\beta_1);\ (\alpha_2),\ (\beta_2)$$

der Art, dass die Summe aller 6 zu $o$ wird, die Summe von dreien aber $2\cdot 4$ mal ungerade, $2\cdot 6$ mal gerade wird. Die geraden Combinationen seien hier:

$$(\alpha\beta\alpha_1),\ (\alpha\beta\beta_1),\ (\alpha\beta\alpha_2),\ (\alpha\beta\beta_2);\ (\alpha_1\beta_1\alpha),\ (\alpha_1\beta_1\beta),$$

die ungeraden:

$$(\alpha\alpha_1\alpha_2),\ (\alpha\alpha_1\beta_2),\ (\alpha\beta_1\alpha_2),\ (\alpha\beta_1\beta_2);$$

man theile die 6 Charakteristiken in 3 Paare, wie oben, was nur auf eine Weise geht; dann liegen die 3 Schnittpunkte von $t_\alpha$ mit $t_\beta$; von $t_{\alpha_1}$ mit $t_{\beta_1}$; von $t_{\alpha_2}$ mit $t_{\beta_2}$ auf einer Geraden, die 6 übrigen Schnittpunkte der beiden perspectivischen Dreiecke

$$t_\alpha t_{\alpha_1} t_{\alpha_2};\ t_\beta t_{\beta_1} t_{\beta_2},$$

also von $t_\alpha$ mit $t_{\beta_1} t_{\beta_2}$, von $t_{\alpha_1}$ mit $t_\beta t_{\beta_2}$, von $t_{\alpha_2}$ mit $t_\beta t_{\beta_1}$, auf einem Kegelschnitt. (Hesse, Cr. J. Bd. 55.)

In dem obigen 6-System kann man die 2 ersten Paare willkürlich als 4 Doppeltangenten aus irgend einem Aronhold'schen 7-System wählen, wonach das dritte Paar bestimmt ist (Aronhold, a. c. O.).

Nimmt man aber in Nr. 1 für $C$ und $C'$ zwei gerade, in je 3 Doppeltangenten zerfallende Berührungscurven aus einer Schaar von III, Nr. 3, z. B. mit der vorstehenden Bedeutung die beiden Curven

$$C = t_\alpha t_\beta t_{\alpha_1}, \; C' = t_{\beta_1} t_{\alpha_2} t_{\beta_2},$$

so müssen die scheinbaren Doppelpunkte $t_\alpha = t_\beta = o$ von $C$, $t_{\alpha_2} = t_{\beta_2} = o$ von $C'$ und der wirkliche Schnittpunkt $t_{\alpha_1} = t_{\beta_1} = o$ von $C$ mit $C'$ auf einer Geraden liegen: was nur wieder der vorhergehende Satz ist. Aber es folgt weiter:

Die 12 Berührungspunkte unseres Systems von 3 Doppeltangentenpaaren liegen mit den 3 Doppelpunkten dieser Paare auf einer Curve $3^{\text{ter}}$ Ordnung.[1])

II. Hat man ein Sechsersystem von Doppeltangenten der Art III, Nr. 5, nämlich

$$t_{\alpha_1}, t_{\alpha_2}, \cdots t_{\alpha_6},$$

wo $[\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_6] = o$ und die Summe von irgend drei der 6 ungeraden Charakteristiken $\alpha_1, \cdot\cdot \alpha_6$ gerade ist (es gibt 1008 solcher Systeme), so hat man für zwei Curven

$$C = t_{\alpha_1} t_{\alpha_2} t_{\alpha_3}, \; C' = t_{\alpha_4} t_{\alpha_5} t_{\alpha_6}$$

eine Gleichung

$$C C' - B^2 = \Omega \cdot K,$$

wo aber $K$ kein vollständiges Quadrat wird, weil $C$ und $C'$ nicht Curven einer Schaar von III, Nr. 3 sind. Daher umhüllen jene 6 Doppeltangenten einen Kegelschnitt $K$ (Hesse, Cr. J. 55); daraus folgt weiter nach einem bekannten Kegelschnittsatze, dass die drei Eckpunkte des Dreiecks $t_{\alpha_1} t_{\alpha_2} t_{\alpha_3}$ mit den drei Eckpunkten des Dreiecks $t_{\alpha_4} t_{\alpha_5} t_{\alpha_6}$ auf einem Kegelschnitt liegen.

1) De Paolis, a. c. O. Nr. 41.

Dasselbe schliesst man auch aus Nr. 5, III, indem man diese Eckpunkte je zu den 3 scheinbaren Doppelpunkten von zwei der dortigen rationalen Berührungscurven einer Schaar $\Phi^{(4)}$ nimmt. So wähle man etwa aus $a_I$) III, Nr. 5 die beiden Curven

$$C_4 = t_{83} t_{84} t_{85} \cdot t_{67}\,, \;\; C_4' = t_{86} t_{87} t_{12} \cdot t_{67}'\,;$$

wobei $t_{67}$ und $t_{67}'$ in beiden Blättern übereinanderlaufen; dann liegen die 3 Eckpunkte von $t_{83} t_{84} t_{85}$ mit denen von $t_{86} t_{87} t_{12}$ auf einem Kegelschnitt. Aber dieser Kegelschnitt geht auch durch die zwei wirklichen Schnittpunkte von $C_4$ mit $C_4'$, welche hier in die von $t_{67}$ mit $t_{67}'$ übergehen, d. h. in die beiden Berührungspunkte der Doppeltangente $t_{67}$. Verallgemeinert man dieses, so lässt sich also der obige Satz von II dahin ergänzen:

Theilt man ein Sechsersystem $(\alpha_1), \cdots (\alpha_6)$ von 6 ungeraden Charakteristiken, deren Summe $= o$ und deren Combinationen zu drei alle gerade sind, irgend wie in zwei Theile

$$(\alpha_1), (\alpha_2), (\alpha_3)\,; \;\; (\alpha_4), (\alpha_5), (\alpha_6)\,,$$

so gibt es nur eine ungerade Charakteristik $(\alpha)$, welche mit irgend zwei Charakteristiken des ersten Theils oder mit irgend zwei des zweiten Theils verbunden Gerades, mit irgend einer der Charakteristiken des ersten und irgend einer des zweiten Theils zugleich verbunden Ungerades liefert. Durch die 3 Eckpunkte von $t_{\alpha_1} t_{\alpha_2} t_{\alpha_3}$ und die 3 Eckpunkte von $t_{\alpha_4} t_{\alpha_5} t_{\alpha_6}$ geht ein Kegelschnitt, welcher auch durch die Berührungspunkte von $t_\alpha$ geht.

Durch dieselben 6 Punkte und durch die 12 Berührungspunkte der beiden Dreiecke geht auch eine Curve 4[ter] Ordnung, welche $\Omega_4$ in den beiden Berührungspunkten von $t_\alpha$ berührt und welche an jeder der 6 Ecken harmonisch läuft zu jenem Kegelschnitt und dem diese Ecke bildenden Doppeltangentenpaar.

Derselbe Satz ergibt sich endlich auch aus dem Satze von Nr. 6, I D, wenn man eine dortige $\Psi_{0,\alpha}^{(6)}$ in eines unserer Sechsersysteme zerfallen lässt; etwa aus einer dortigen Schaar b) die Curve

$$t_{83} t_{84} t_{85} \cdot t_{86} t_{87} t_{12}$$

herausnimmt, deren Bild wird:

$$\Psi_{0,67}^{(6)}: L_8(a_1^2 a_2^2 a_3^3 a_4^3 a_5^3 a_6^4 a_7^4) = a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot L_3(a_1 \cdots a_6 a_7^2) L_3(a_1 \cdots a_5 a_6^2 a_7) L_2(a_3 \cdots a_7).$$

III. Man lasse in III, Nr. 3 die gerade Curve $\Phi_\alpha^{(3)}$ in 3 Doppeltangenten zerfallen, so liefert der dortige Satz:

Nimmt man irgend 2 Paare von Doppeltangenten

$$t_\alpha, t_\beta;\ t_{\alpha_1}, t_{\beta_1},$$

derart, dass

$$(\alpha \beta \alpha_1),\ (\alpha \beta \beta_1)$$

gerade, aber

$$(\alpha \alpha_1 \beta_1),\ (\beta \alpha_1 \beta_1)$$

ungerade sind, so gehen die $\infty^1$ Curven 3ter Ordnung, welche man durch die 8 Berührungspunkte der 4 Doppeltangenten legen kann, auch durch den Schnittpunkt von $t_\alpha$ mit $t_\beta$.

Noch allgemeiner hat man nach dem Satze von Nr. 5, I:

Seien $t_\alpha$ und $t_\beta$ irgend zwei Doppeltangenten, und $\Phi_\gamma^{(2)}$ ein Berührungskegelschnitt, der zu irgend einer Gruppe $[\gamma]$ gehört, für welche

$$(\gamma \alpha) \text{ und } (\gamma \beta)$$

ungerade sind und $[\gamma \alpha \beta]$ verschieden von $o$; so gehen die $\infty^1$ Curven 3ter Ordnung, welche man durch die 8 Berührungspunkte von $t_\alpha$, $t_\beta$, $\Phi_\gamma^{(2)}$ legen kann, auch durch den Schnittpunkt von $t_\alpha$ mit $t_\beta$.

IV. Aus Nr. 3, III und Gleichung (6) von Nr. 1 folgt:

Sollen drei Gerade, $t_\alpha$, $t_\beta$, $t_{\alpha_1}$, eine gerade Berührungscurve an eine Curve 4ter Ordnung, $\Omega_4$, bilden, so können die $3 \cdot 2$ Berührungspunkte nicht willkürlich auf denselben angenommen werden; aber es genügt, durch den Schnittpunkt $S_{\alpha\beta}$ von $t_\alpha$ und $t_\beta$ und durch einen beliebigen Punkt $S_{\alpha_1}$ von $t_{\alpha_1}$ eine Curve 3ter Ordnung zu legen, welche in $S_{\alpha\beta}$ harmonisch läuft zur Geraden $(S_{\alpha\beta} S_{\alpha_1})$ und zum Paar $t_\alpha t_\beta$, und für die 6 Punkte den weiteren Schnitt dieser Curve 3ter Ordnung mit $t_\alpha t_\beta t_{\alpha_1}$ zu nehmen.

Der weitere Schnittpunkt von $(S_{\alpha\beta} S_{\alpha_1})$ mit dieser Curve 3ter Ordnung, $P = o$, ist dann der Doppelpunkt einer Curve 3ter Ordnung, welche $\Omega_4$ in den weiteren 6 Schnittpunkten von $\Omega_4$ und $P$ berührt.

V. Aus Nr. 5, III entnimmt man:

a) Man habe fünf Doppeltangenten

$$t_\alpha, t_\beta; \; t_\gamma, t_\delta; \; t_\varepsilon$$

derart, wie

$$t_{81}, t_{82}; \; t_{24}, t_{13}; \; t_{85},$$

nämlich so, dass

$$(\alpha\beta\gamma), \; (\alpha\beta\delta), \; (\alpha\delta\varepsilon), \; (\beta\gamma\varepsilon), \; (\gamma\delta\varepsilon)$$

ungerade,

$$(\alpha\beta\varepsilon), \; (\alpha\gamma\delta), \; (\beta\gamma\delta), \; (\alpha\gamma\varepsilon), \; (\beta\delta\varepsilon), \; (\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)$$

aber gerade sind; so gehen durch die 10 Berührungspunkte derselben und durch die 3 Schnittpunkte von $t_\alpha$ mit $t_\beta$, von $t_\alpha$ mit $t_\gamma$ und von $t_\beta$ mit $t_\delta$ $\infty^2$ Curven 4ter Ordnung. (Auch nach Nr. 5, V).

Ferner:

b) Sind 5 Doppeltangenten

$$t_{\alpha'}, \; t_{\beta'}, \; t_{\gamma'}; \; t_{\delta'}, \; t_{\varepsilon},$$

derart, dass

$$(\delta'\varepsilon'\alpha'), \; (\delta'\varepsilon'\beta'), \; (\delta'\varepsilon'\gamma')$$

ungerade, die übrigen Combinationen zu 3 und die zu 5 gerade sind (wie $t_{85}$, $t_{86}$, $t_{87}$; $t_{12}$, $t_{34}$), so gehen durch die 10 Berührungspunkte derselben und durch die Ecken des Dreiecks $(t_{\alpha'} t_{\beta'} t_{\gamma'})$ $\infty^2$ Curven 4ter Ordnung.

c) Nimmt man 2·4 Doppeltangenten

$$t_\alpha, t_\beta, t_\gamma, t_\delta; \; t_{\alpha'}, t_{\beta'}, t_{\gamma'}, t_{\delta'}$$

derart wie

$$(\alpha) = (81), \; (\beta) = (82), \; \gamma = (24), \; \delta = (13),$$
$$(\alpha') = (85), \; (\beta') = (86), \; \gamma' = (87), \; \delta' = (12),$$

so liegen deren 16 Berührungspunkte mit den 3 Schnittpunkten $(t_\alpha t_\beta)$, $(t_\alpha t_\gamma)$, $(t_\beta t_\delta)$ und den Ecken des Dreiecks $(t_{\alpha'} t_{\beta'} t_{\gamma'})$ auf einer Curve 4ter Ordnung. Die letzten 3 Ecken liegen

mit den 5 aufeinanderfolgenden Ecken des unvollständigen Fünfseits $(t_\gamma t_\alpha t_\beta t_\delta t_{\delta'} t_\gamma)$ auf einem Kegelschnitt.

Der letzte Theil des Satzes ergibt sich auch aus Nr. 5, V, VII oder X.

d) Nimmt man aber 2·4 Doppeltangenten jener ersten Art:

$$t_{81},\ t_{82},\ t_{24},\ t_{13};\ t_{86},\ t_{34},\ t_{83},\ t_{36},$$

so liegen deren 16 Berührungspunkte mit den 6 Schnittpunkten

$$(t_{81} t_{82}),\ (t_{81} t_{24}),\ (t_{82} t_{13});\ (t_{86} t_{34}),\ (t_{86} t_{83}),\ (t_{34} t_{36})$$

auf einer Curve 4ter Ordnung; und die 8 aufeinanderfolgenden Ecken des unvollständigen Achtseits

$$(t_{24} t_{81} t_{82} t_{13} t_{83} t_{86} t_{34} t_{36} t_{24})$$

auf einem Kegelschnitt (das Achtseit ist dadurch ausgezeichnet, dass je drei aufeinanderfolgende Linien zusammen eine ungerade Berührungscurve 3ter Ordnung bilden, zugehörig zu einer im Achtseit nicht vorkommenden Doppeltangente).

e) Von 6 Doppeltangenten der Art:

$$t_{81},\ t_{82},\ t_{24},\ t_{13};\ t_{85},\ t_{86}$$

liegen die 12 Berührungspunkte mit den 4 Schnittpunkten

$$(t_{81} t_{82}),\ (t_{81} t_{24}),\ (t_{82} t_{13}),\ (t_{85} t_{86})$$

auf $\infty^1$ Curven 4ter Ordnung. Ebenso liegen die 12 Berührungspunkte der 6 Doppeltangenten der Art

$$t_{85},\ t_{86},\ t_{87};\ t_{12};\ t_{81},\ t_{82}$$

mit den 4 Schnittpunkten

$$(t_{85} t_{86}),\ (t_{85} t_{87}),\ (t_{86} t_{87});\ (t_{81} t_{82})$$

auf $\infty^1$ Curven 4ter Ordnung (auch nach § 5, VI, zu schliessen).

VI. Aus Nr. 5, V folgt, indem man zwei Curven einer Schaar in je 5 Doppeltangenten zerfallen lässt:

10 Doppeltangenten der Art:

$$t_{81},\ t_{82},\ t_{24},\ t_{13},\ t_{34};\ t_{86},\ t_{87},\ t_{27},\ t_{16},\ t_{12}$$

haben die Eigenschaft, dass folgende 15 Schnittpunkte (je 3 auf einer derselben)

$$(t_{81}t_{82}),\ (t_{81}t_{24}),\ (t_{81}t_{16}),\ (t_{82}t_{13}),\ (t_{82}t_{27}),$$
$$(t_{24}t_{16}),\ (t_{24}t_{12}),\ (t_{16}t_{87}),\ (t_{13}t_{12}),\ (t_{13}t_{27}),$$
$$(t_{27}t_{86}),\ (t_{12}t_{34}),\ (t_{87}t_{34}),\ (t_{87}t_{86}),\ (t_{86}t_{34}),$$

auf einer Curve 3ter Ordnung liegen. Dieselben 15 Punkte liegen mit den 20 Berührungspunkten der 10 Doppeltangenten auf einer Curve 5ter Ordnung.

VII. Aus Nr. 5, VIII erhält man, indem man die beiden Curven einer Schaar

$$t_{81},\ t_{82},\ t_{83},\ t_{84},\ t_{67};\ t_{85},\ t_{86},\ t_{87},\ t_{56},\ t_{57}$$

betrachtet, folgenden sich auf 2 Aronhold'sche Systeme mit denselben 4 Doppeltangenten beziehenden Satz:

a) Die 6 Ecken des vollständigen Vierseits $(t_{81}t_{82}t_{83}t_{84})$ liegen mit den 6 Ecken der beiden Dreiecke $(t_{85}t_{86}t_{87})$ und $(t_{67}t_{57}t_{56})$ und mit den 3 Schnittpunkten

$$(t_{85}t_{67}),\ (t_{86}t_{57}),\ (t_{87}t_{56}),$$

auf einer Curve 3ter Ordnung; diese 15 Punkte mit den 20 Berührungspunkten der 10 Doppeltangenten auf einer Curve 5ter Ordnung.

(Die beiden Dreiecke und die genannten 3 Schnittpunkte begründen gerade eine bekannte Grassmann'sche Erzeugung der Curve 3ter Ordnung.)

b) Von den 8 Doppeltangenten

$$t_{81},\ t_{82},\ t_{83};\ t_{85},\ t_{86},\ t_{87};\ t_{56},\ t_{57}$$

liegen die 3 Ecken des ersten Dreiecks mit den 6 Schnittpunkten

$$(t_{85}t_{86}),\ (t_{85}t_{87}),\ (t_{86}t_{87}),\ (t_{86}t_{57}),\ (t_{87}t_{56}),\ (t_{56}t_{57})$$

auf $\infty^1$ Curven 3ter Ordnung; diese 9 Punkte mit den 16 Berührungspunkten der 8 Linien auf $\infty^1$ Curven 5ter Ordnung.

c) Derselbe Satz gilt, wenn man statt der Linie $t_{56}$ die Linie $t_{46}$ setzt und statt der letzten zwei Schnittpunkte:

$$(t_{85}t_{46}),\ (t_{87}t_{46}).$$

d) Derselbe Satz gilt auch für die 8 Doppeltangenten der Art:

$$t_{81},\ t_{82},\ t_{13},\ t_{12},\ t_{24};\ t_{86},\ t_{87};\ t_{67},$$

wenn man die 9 Schnittpunkte nimmt:

$$(t_{81}t_{82}),\ (t_{82}t_{13}),\ (t_{13}t_{12}),\ (t_{12}t_{24}),\ (t_{24}t_{81});\ (t_{86}t_{87});\ (t_{67}t_{13}),\ (t_{67}t_{12}),\ (t_{67}t_{24}),$$

wie auch aus V, c) dieser Nummer folgt.

e) Aus Nr. 5, XII oder XIV, als Ergänzung von a):

Derselbe Satz b) gibt auch für die 8 Doppeltangenten der Art:

$$t_{81},\ t_{82}.\ t_{83},\ t_{84};\ t_{85},\ t_{86},\ t_{57},\ t_{56},$$

wenn man als 9 Schnittpunkte die 6 Ecken des vollständigen Vierseits $(t_{81}t_{82}t_{83}t_{84})$ und die drei Punkte

$$(t_{85}t_{86}),\ (t_{86}t_{57}),\ (t_{57}t_{56})$$

nimmt.

Derselbe Satz liesse sich noch für verschiedene anderartige Combinationen von 8 Doppeltangenten, als b)..e). aussprechen, wie viele Fälle von Nr. 5 und Nr. 6 durch geeignete Spezialisirung zeigen.

VIII. Man lasse in Nr. 6, I, F. eine der Curven 6ter Ordnung $\Psi_0^{(6)}$ in eines der Sechsersysteme von Nr. 5, III:

$$t_{83},\ t_{84},\ t_{85},\ t_{86},\ t_{87},\ t'_{12}$$

zerfallen; eine zweite Curve derselben Schaar in

$$t_{81},\ t_{82},\ t_{12},$$

verbunden mit einer $\infty^2$-Schaar von $\Phi^{(3)}$ aus Nr. 3, III; so ergibt sich:

Die 10 Ecken des vollständigen Fünfseits $(t_{83}t_{84}\cdot\cdot t_{87})$ liegen mit dem Schnittpunkt $(t_{81}t_{82})$ und mit den beiden Berührungspunkten von $t_{12}$ mit $\Omega_4$ auf $\infty^2$ Curven 4ter Ordnung. Folglich gehen auch durch die 6 Ecken des vollständigen Vierseits $(t_{83}t_{84}t_{85}t_{86})$, durch den Schnittpunkt $(t_{81}t_{82})$ und durch die beiden Berührungspunkte von $t_{12}$ $\infty^1$ Curven 3ter Ordnung.

Diese Beispiele mögen genügen, um die leichte und noch weit auszudehnende Anwendbarkeit unserer Methode aufzuweisen.

---

Ueber die

# Conjugation der Infusorien.

Von

**Richard Hertwig.**

(Mit 4 Tafeln.)



# Einleitung.

Durch die Untersuchung von Seeigeleiern, bei welchen durch Einwirkung von Chloral der Abschluss der inneren Befruchtungsvorgänge verhindert worden war, sowie durch die Beobachtung, dass auch im unbefruchteten Ei der Eikern ein wenn auch beschränktes Maass von Theilungsfähigkeit unter Umständen gewinnen kann, war ich zu der Anschauung gekommen, dass zwischen Ei- und Sperma-Kern kein principieller Unterschied in der histologischen Zusammensetzung vorhanden ist, dass die Bestandtheile, welche dem Spermakern zukommen, chromatische Substanz oder Nuclein und achromatische Substanz oder Paranuclein, auch im Eikern nicht fehlen. Das Wesentliche der Befruchtung besteht nicht darin, dass ein Kern — oder um es allgemeiner auszudrücken — ein Befruchtungskörper mit einer specifischen Constitution, welche man die männliche nennen könnte, dem Ei eingeimpft wird; es genügt vielmehr, dass der befruchtende Kern in einer anderen Zelle entstanden ist. Dieser Anschauung zu Folge können die Kerne der Geschlechtszellen nicht die Ursache oder die Träger der geschlechtlichen Differenzirung sein; letztere vielmehr muss aus anderweitigen mehr nebensächlichen Momenten erklärt werden, dass nämlich die Eier die Aufgabe übernommen haben, das für jede Entwicklung nöthige Bildungsmaterial zu liefern und in Folge dessen gross und unbeweglich geworden sind, während die Spermatozoen umgekehrt geringe Grösse mit grosser Beweglichkeit verbinden, weil sie dafür zu sorgen haben, dass die Geschlechtszellen zum Zweck der Befruchtung sich treffen.

Diese auch von anderen Forschern getheilte Auffassungsweise führt zu bestimmten Consequenzen in der Beurtheilung des Zellenlebens. Wenn zur Erklärung der geschlechtlichen Differenzirung nicht ein bestimmter Zellentheil, sondern nur die gesammte Zelle herangezogen werden kann, so ist von vornherein die Möglichkeit ausgeschlossen, dass sich im Rahmen einer einzigen Zelle die Sonderung in männliche und weibliche Eigenschaften vollzogen hat; die Annahme, dass es hermaphrodite Zellen giebt, hat dann keine Berechtigung mehr, und so kommt denn auch eine von Engelmann und meinem Bruder fast gleichzeitig ausgesprochene, auch von mir lange Zeit getheilte Auffassung in Wegfall, dass die Infusorien solche hermaphrodite Zellen seien, dass ihr Hauptkern als weibliches Element, ihr Nebenkern als männlicher Theil gedeutet werden müsse.

Die hier kurz skizzirten Erwägungen liessen mir eine eigene Untersuchung der Infusorien und ihrer Copulationserscheinungen wünschenswerth erscheinen, zumal als mir die schönen Untersuchungen von Maupas sowohl in der vorläufigen Mittheilung als auch in dem von Bütschli gegebenen Referat unbekannt geblieben waren. Ich benutzte daher die Gelegenheit, als sich in den Zuchtgläsern des Münchener zoologischen Instituts grosse Mengen von Paramaecium Aurelia entwickelten und auch bald in Copulation übergingen, und legte in regelmässigen Zeiträumen reiches Untersuchungsmaterial in Picrinessigsäure, Chromsäure und Chromosmiumsäure ein. Bei der Wahl der ersten beiden Reagentien war für mich der Gesichtspunkt maassgebend, dass sie die am meisten gebräuchlichen Reagentien bei der Erforschung von Kernstructuren sind. Picrinessigsäure mit darauffolgender Färbung in Boraxcarmin hatte mir und meinem Bruder vornehmlich bei der Untersuchung der Seeigeleier gedient und war mir in seiner Wirkung auf Kernstructuren am besten bekannt. Ich habe sie daher auch in erster Linie benutzt, da ich mit der Untersuchung der Fortpflanzungserscheinungen noch den zweiten Gesichtspunkt verband, Klarheit über die feinere Structur der ruhenden und activen Haupt- und Nebenkerne der Infusorien zu gewinnen.

Die in der Wärme eines Brutofens gefärbten Paramaecien wurden bald schwächer bald stärker mit Salzsäure-Alkohol ausgezogen und entweder in Glycerin oder in Nelkenöl aufbewahrt. Letzteres hat vor dem Canadabalsam nicht nur den grossen Vorzug, dass die Faserung der

Spindeln deutlicher zu erkennen ist, sondern erleichtert auch die Untersuchung, weil es ein Drehen und Pressen des Objects jederzeit erlaubt. Ich muss Nelkenölpräparate auch noch aus einem weiteren Grunde empfehlen. Durch langes Liegen in Nelkenöl wird das Protoplasma, wie ich es schon früher bei Eiern in Erfahrung gebracht habe, spröde und splittert bei Druck oder bei kurzen mit der Präparirnadel ausgeführten Schlägen auf das Deckglas in viele Stücke. Durch Zertrümmern der Thiere kann man die Kerne und die aus ihnen hervorgegangenen Spindeln vollkommen isoliren und untersuchen, ohne dass anhaftendes Protoplasma das Bild trübe. Starke Aufhellung in Nelkenöl und Anwendung des Abbe'schen Beleuchtungsapparats sind ausserdem nöthig, um über die Vertheilung des Chromatins in den Kernspindeln und ihren Entwicklungsstadien Klarheit zu gewinnen. Denn gewöhnlich handelt es sich hier um so geringfügige Quantitäten, dass ich anfangs die vorbereitenden Stadien der Spindeln für achromatisch hielt.

Für die richtige Darstellung der achromatischen Kernfiguren ist das allzu sehr aufhellende Nelkenöl weniger geeignet und die Beobachtung in Glycerin oder Wasser vorzuziehen. Ich habe daher ein und dasselbe Präparat zuerst in Nelkenöl untersucht, dann zertrümmert, dann mit Alkohol ausgewaschen und schliesslich noch in Glycerin übertragen. Man gewinnt auf diesem Wege eine genaue Kenntniss auch der feinsten Kernstructuren, wie sie sonst gar nicht erreicht werden kann.

Selbstverständlich habe ich ab und zu auch lebende Thiere beobachtet und dabei die Dauer der Copulation bei einer Zimmertemperatur von 14—15° R auf 18—20 Stunden bestimmt. Für den Entscheid aller wichtigen Fragen ist die Beobachtungsweise aber nicht brauchbar. Wenn man die Kernspindeln sehen will, muss man die Infusorien so stark quetschen, dass ihre Lebensfähigkeit leidet. So werden manche normale Vorgänge, vor Allem der Austausch der Spindeln ganz unmöglich gemacht. Wir haben hier einen Fall vor uns, wo die Untersuchung des lebenden Thieres durch die damit verbundenen ungünstigen Existenzbedingungen viel unzuverlässiger ist, als Abtödten der einzelnen Stadien und Construction der Entwicklungsweise aus Combination der erhaltenen Bilder.

Auf den Tafeln I—III habe ich die wichtigsten Copulationsstadien abgebildet; ich habe dabei zumeist solche Copulae ausgewählt, bei denen

das eine Thier in der Entwicklung dem anderen etwas vorausgeeilt war, was im Allgemeinen seltener zutrifft. Maassgebend war hierbei für mich die Absicht, bei beschränktem Raum eine grössere Vollständigkeit der auf einander folgenden Stadien zu erzielen. Sämmtliche Figuren wurden bei Zeiss $^{1}/_{18}$ Ocular 2 mit Prisma gezeichnet, bei der Zusammenstellung der Tafel aber etwas verkleinert. Der Maassstab der Verkleinerung ist nicht für alle Figuren derselbe. Denn wenn auch bei Paramaecium Aurelia im Allgemeinen nur die kleineren Thiere copuliren, so sind doch die Dimensionen derselben nicht vollständig die gleichen, wie z. B. die Länge zwischen 0,1 und 0,13 Millimeter variirt. Im Interesse des Tafelarrangements habe ich die einzelnen Copulae annähernd auf dieselbe Grösse reducirt und dabei bald mehr bald minder verkleinert, indem ich nur die Grössenverhältnisse innerhalb einer Copula richtig wahrte. Ein derartiges Verfahren ist statthaft, da ein genaueres Studium lehrt, dass die geringfügigen Schwankungen in der Grösse, welche man beobachten kann, nach keiner Richtung hin von Wichtigkeit sind. Erstens sind sie nicht maassgebend für die Art, in welcher die Thiere sich zum Zweck der Copulation zusammenthuen. Denn wenn man auch häufig Paarlinge findet, bei denen der eine den anderen bedeutend an Grösse überragt, so sind doch ebenso häufig Päärchen, welche nur aus kleineren oder nur aus grösseren, unter sich gleichen Individuen bestehen. Zweitens kann man aus der Grösse der Copulae keinen Rückschluss auf die Dauer der Vereinigung machen. Grössere und kleinere Maasse ergeben sich sowohl auf frühen wie auf späten Stadien der Entwicklung, so dass man weder ein Wachsthum noch eine Verkleinerung der Thiere während der Copulation nachweisen kann.

Bei den Figuren der Tafeln I—III habe ich das Verhalten der verschiedenen Kernsubstanzen möglichst genau berücksichtigt; da ich aber auf diesen, von den meisten früheren Beobachtern vernachlässigten Punkt grosses Gewicht legte, habe ich namentlich von den Veränderungen der Nebenkerne noch besonders genaue, auf Isolationspräparate sich stützende Einzeldarstellungen bei stärkerer Vergrösserung auf Tafel IV gegeben.

Nach dem Verhalten der Nebenkerne kann man im Verlauf der Copulation 4 Perioden abgrenzen; während der ersten Periode wandeln sich die Nebenkerne in Spindeln um; die zweite Periode umfasst die Theilungen der Nebenkernspindeln; die dritte Periode kann man die Be-

fruchtungsperiode nennen, da während ihr Nebenkernspindeln ausgetauscht werden; in die vierte Periode fällt endlich die Neuanlage der Haupt- und Nebenkerne. So ergeben sich für unsere Darstellung 4 Abschnitte, zu denen sich noch 3 weitere hinzugesellen. Ich halte es für zweckmässig, bevor wir die Veränderungen während der Copulation erörtern, einige Bemerkungen über den gewöhnlichen Bau der Paramaecien in einem besonderen Kapitel voranzustellen; ein zweites Kapitel möge über den äusseren Verlauf der Conjugation und die während der Conjugation erfolgenden Umgestaltungen der Thiere handeln, ein drittes über die Theilungen, welche der Copulation folgen und vorangehen. Die Angaben früherer Forscher werde ich im Anschluss an jeden Abschnitt in einer besonderen Literaturübersicht besprechen.

Ich werde mich bei letzterer vorwiegend auf die Arbeiten, welche seit Bütschli's und Balbiani's grundlegenden Untersuchungen erschienen sind, beschränken; rücksichtlich der älteren Literatur verweise ich auf die Bearbeitung, welche die Infusorien in Bronn, Classen und Ordnungen des Thierreichs durch Bütschli erfahren haben.

---

## I. Bemerkungen zum Bau der Paramaecien.

Bei der Besprechung des Baues der Paramaecien beschränke ich mich auf die Theile, welche bei der Conjugation und Theilung hauptsächlich von Bedeutung sind, das sind die Kerne und das Cytostom.

Der Hauptkern (Nucleus der alten Autoren, Macronucleus Maupas', secundärer Kern Bütschli's) grenzt beim lebenden Thier unmittelbar an das Protoplasma und hat eine ovale Gestalt; in den meisten Reagentien schrumpft er etwas, so dass ein Zwischenraum zwischen ihm und dem Protoplasma entsteht; gleichzeitig verliert die Oberfläche ihr glattes Aussehen; Einkerbungen erstrecken sich mehr oder minder tief in das Innere hinein und zerlegen den Kern nicht selten in drei ungleich grosse Lappen (Taf. I Fig. 2) oder es werden an den Enden fingerförmige Fortsätze deutlich oder leisten- und riffartige Vorsprünge. Derartige Unebenheiten in der oberflächlichen Begrenzung des Kerns sind natürliche

Structurverhältnisse desselben, wenn sie auch im frischen Zustand nicht beobachtet werden. Denn sie treten in gleichförmiger Weise bei der Anwendung der verschiedensten Reagentien auf und fehlen constant zu bestimmten Zeiten: während der späteren Stadien der Theilung und im Lauf der ersten Periode der Copulation.

Bei der Schrumpfung der Kerne wird auch eine deutliche, fast doppelt contourirte Kernmembran in dem Zwischenraum zwischen Kern und Protoplasma sichtbar, sie greift in die tieferen Einkerbungen des Kerns ein und folgt somit im Wesentlichen den Contouren desselben, auch wenn sie durch Reagentienwirkung abgehoben ist.

Die Substanz des Kerns ist in frischem Zustand fein granulirt, wird bei der Gerinnung etwas grobkörniger und färbt sich bekanntlich intensiv in Carmin. Carminpräparate ergeben somit das Bild einer rothen Masse mit einer feinkörnigen Zeichnung im Innern. Sprengt man durch Zertrümmern kleine Kernstücke ab und untersucht dieselben mit Oelimmersion, indem man im Abbe'schen Beleuchtungsapparat die Diaphragmen ausschaltet, so erblickt man grössere und kleinere rothe Granula von unregelmässiger vielfach zackiger Gestalt, welche nach Art eines Reticulums zusammengefügt sind. (Taf. IV Fig. 12.) Das Reticulum wird deutlicher, wenn man den Diaphragmenapparat wieder einschaltet, weil dann ungefärbt gebliebene Theile sichtbar werden. So habe ich die Vorstellung gewonnen, dass im Kern von Paramaecium und wohl auch von den übrigen Infusorien zweierlei geformte Substanzen enthalten sind, eine chromatische und eine achromatische, dass erstere ein engmaschiges Gerüst bildet, in dessen Masse feinste Chromatinkörnchen eingelagert sind, zusammengeballt zu grösseren und kleineren Granula. Ich habe nämlich bei gewissen pathologischen Entwicklungszuständen der Seeigeleier Kerne aufgefunden, welche den Infusorienkernen äusserst ähnlich waren und bei denen die geschilderte Structur unzweifelhaft festgestellt werden konnte. Ferner kann ich meine Auffassungsweise noch stützen durch Beobachtungen über die Art, in welcher sich die Hauptkerne bei der Conjugation der Paramaecien und — noch schöner zu sehen — bei der Conjugation der Stylonychien aus den Theilstücken der Nebenkerne entwickeln. Ich werde später darauf zurückkommen und begnüge mich hier mit der Bemerkung, dass die sogenannten Placenten zuerst runde fast gänzlich

achromatische Körper von schwammiger Structur sind, dass sich diese zu homogenen Kugeln verdichten, in denen erst später das Chromatin in äusserst feiner Vertheilung abgelagert wird.

Die Zusammensetzung aus zweierlei geformten Substanzen ist nun sehr viel leichter zu erweisen bei den Nebenkernen.

Die Paramaeciumart, welche mir zur Untersuchung diente, besitzt constant zwei Nebenkerne, während bei allen übrigen Arten nur ein Nebenkern vorhanden ist. Ich nenne sie Paramaecium Aurelia, indem ich mich der Namengebung anschliesse, welche Maupas eingeführt hat und die auch von Bütschli angenommen worden ist. Die Form ist demgemäss nicht identisch mit den Paramaecien, welche den Untersuchungen Balbiani's, Bütschli's, Gruber's und Plate's gedient haben; für diese würde Maupas zu folge der Name P. caudatum anzuwenden sein.

Die Nebenkerne liegen meist dicht bei einander und dicht am Hauptkern, seltener als bei anderen Arten sind sie in eine Nische des letzteren eingeschlossen. Wenn sie sich vom Hauptkern und von einander entfernen, so hängt das wohl damit zusammen, dass die Thiere in Vorbereitung zur Theilung sind oder sich zur Conjugation anschicken.

Rücksichtlich der Structur ist als constant hervorzuheben, dass die Nebenkerne kugelige oder ovale Bläschen sind, umschlossen von einer zarten Membran. Die eigentlichen Kernbestandtheile, das Chromatin und das Achromatin, sind dagegen sehr verschieden angeordnet. Am häufigsten habe ich beobachtet, dass im Kernbläschen ein Nucleolus lagert, welcher in Reagentien zu einem homogenen stark lichtbrechenden Körper gerinnt, dass ferner der Zwischenraum zwischen ihm und der Kernmembran von einer feinkörnigen Masse, einem Kernreticulum, ausgefüllt wird. Das Kernreticulum färbt sich gar nicht, der Nucleolus nicht so intensiv als man seinem compacten Gefüge nach erwarten sollte; ich halte es daher für wahrscheinlich, dass er ausser dem Chromatin auch noch Achromatin enthält, welches somit nicht völlig in das Kernreticulum aufgegangen wäre.

Sehr häufig liegt der Nucleolus stark excentrisch in einem Kernende, während das andere vom achromatischen Reticulum eingenommen wird; zugleich ist er nicht kugelig, sondern calottenförmig, indem die nach der

Kernmitte schauende Seite von einer planen Fläche begrenzt wird. Dazu kann dann kommen, dass die achromatische Substanz sich der Kernmembran dicht anfügt, ebenfalls homogen wird und eine Verdickung in der Kernwand bildet (Taf. IV Fig. 13).

In manchen Kernen ist ausser der begrenzenden Kernmembran nur noch eine geformte Structur zu erkennen, ein einfacher homogener Nucleolus oder ein grösserer nucleolusartiger Körper, welcher Gerüststructur besitzt. Ich glaube, dass in beiden Fällen chromatische und achromatische Substanz sich gegenseitig durchdrungen haben. Namentlich den letzteren Fall erkläre ich mir durch die Annahme, dass die feinsten Theile des chromatischen Nucleolus sich im achromatischen Netzwerk vertheilt haben. Die Vertheilung scheint mir vorbereitet zu werden durch Zustände des Nucleolus, wie ich sie häufiger aufgefunden habe. Sein Centrum war lichter, als wäre es von einer Vacuole eingenommen, oder er bestand aus mehreren um eine lichte Mitte gruppirten Körpern oder er war in feine Körnchen ganz zerfallen.

Zu den Veränderungen in der feineren Structur gesellen sich erhebliche Unterschiede in der Grösse der Nebenkerne; aus zahlreichen Messungen ergiebt sich, dass die Grösse derselben zwischen 0.0037 und 0.0062 mm schwanken kann. Durch diese Wahrnehmung wurde ich veranlasst genauer festzustellen, in welchem Verhältnisse die Maasse zu einander stehen, welche 1) Länge und Breite des gesammten Paramaecium, 2) Länge und Breite des Kerns, 3) die Durchmesser des Nebenkerns und seines Nucleolus liefern.

Aus den in Tabelle I enthaltenen Maassen ergiebt sich, dass im Allgemeinen der Hauptkern beim Wachsthum des gesammten Thieres eine Vergrösserung erfährt, welche indessen demselben nicht vollkommen proportional verläuft. Grosse Paramaecien haben daher absolut genommen grössere Kerne als kleine Exemplare, im Verhältniss zur Körpergrösse sind dagegen ihre Kerne klein zu nennen.

Ganz anders verhalten sich die Nebenkerne; die Tabelle lehrt, dass dieselben im Grossen und Ganzen um so kleiner sind, je grösser die zugehörigen Thiere werden. So kann unter Umständen ein Paramaecium doppelt so grosse Nebenkerne besitzen als ein anderes, welches ihm fast um $^1/_3$ an Grösse überlegen ist.

Um nun zu ermitteln, in welchen Lebensperioden sich das auffallende Missverhältniss zwischen Grösse des Gesammtthiers und Grösse seiner Nebenkerne entwickelt, habe ich besondere Tabellen angefertigt 1) für die Paramaecien, welche im letzten Stadium der Theilung standen oder an ihrer Form noch erkennen liessen, dass sie sich kürzlich erst getheilt hatten; 2) für Paramaecien, welche nach aufgehobener Copulation in Regeneration ihrer Haupt- und Nebenkerne begriffen waren; 3) für Paramaecien, welche im Begriff standen zu copuliren.

Bei den Thieren der ersten Categorie sind durchgängig die Nebenkerne sehr klein, kleiner sogar als man sie sonst finden würde; sie messen noch nicht 0,003 mm. Aus Theilung hervorgegangene Thiere sind somit sowohl selbst klein, als auch haben sie kleine Nebenkerne.

Entcopulirte Paramaecien sind je nach der Zeit, welche seit der Copulation verflossen ist, sehr verschieden gross; sie wachsen rasch nach beendigter Vereinigung und ebenso vergrössern sich die Anlagen der Hauptkerne; nur die Maasse der Nebenkerne bleiben in dieser Zeit ziemlich constant.

Dagegen sind ausnahmslos bei Thieren, welche zur Vereinigung schreiten, die Nebenkerne von auffallender Grösse, sie können hier einen Durchmesser von 0.0075 mm haben. Man wird daher mit grosser Sicherheit den Satz aufstellen können, dass eine Vergrösserung der Nebenkerne eintritt, wenn sich die Zeit einer Copulationsperiode nähert. Daraus kann man weiter schliessen, dass Vergrösserung der Nebenkerne entweder selbst Ursache zur Copulation ist, oder äusserer Ausdruck von innerlich sich vollziehenden Structurveränderungen, welche die Thiere zur Copulation führen.

Grosse Nebenkerne sind nun gleichzeitig diejenigen, welche am deutlichsten das achromatische Reticulum zeigen. Während das Chromatin wahrscheinlich an Masse kaum Veränderungen erfährt, ist die Anhäufung der auch sonst in den Lebensprocessen der Zelle eine active Rolle spielenden achromatischen Substanz beim Herannahen einer Copulation unverkennbar.

Ueber den Bau des Cytostoms kann ich mich kurz fassen. Die Mundöffnung liegt an der Grenze des mittleren und hinteren Drittels am Ende einer Furche, welche von der ventralen Seite aus auf die rechte Seite des Thieres hinüberreicht; sie ist im Allgemeinen oval, zieht sich

aber rückwärts in eine feine Spitze aus. Im Umkreis der Mundöffnung schlägt sich die Cuticula in das Innere ein und begrenzt einen die Nahrung zuleitenden Schlund, an welchem wir zwei Abschnitte als Vestibulum und Oesophagus unterscheiden wollen. Die Grenze beider Abschnitte ist am deutlichsten während der ersten Copulationsstadien, weil dann die Thiere sich in reiner Profilstellung befinden.

Das Vestibulum ist ein Sack, der, doppelt so lang wie der Durchmesser der Mundöffnung, von dieser aus rückwärts in das Körperinnere hineinhängt. In Profilstellung gesehen zeigt es besonders schön eine Structur, bestehend aus einem breiten Bande, welches in der Nähe des oberen Randes der Mundöffnung beginnt, vorwiegend der linken Wand des Cytostoms angehört und bis an den Grund des Sackes reicht. Das Band ist fein längsgestreift, die Längsstreifen sind von Querstreifen gekreuzt, letztere geben den Ursprung ab für Flimmerbüschel oder Membranellen, die man an abgetödteten Thieren als dreieckige Figuren auf dem optischen Querschnitt erkennen kann. Ob das Cytostom ausser den Membranellen noch weitere Flimmern besitzt, lasse ich dahin gestellt, jedenfalls stellen jene den wichtigsten Theil der Beflimmerung dar. Im Folgenden werde ich das mit Membranellen bedeckte Band stets als Wimperstreifen bezeichnen; wir werden sehen, dass es bei Theilung und Conjugation eine wichtige Rolle spielt.

Der Wimperstreifen erstreckt sich ähnlich dem Peristomband eines Stentors, an das er im Bau erinnert, in das Innere des Oesophagus hinein, indem er eine schwach angedeutete Spirale beschreibt. Der Oesophagus ist ein kurzer Trichter, welcher an der tiefsten Stelle des Vestibularsackes beginnt und bis an sein hinteres Ende von der Cuticula ausgekleidet ist. Hier ist die Cuticula unterbrochen und kann die zugeführte Nahrung direct in das Protoplasma übertreten.

L i t e r a t u r. Ueber den Bau des Infusorienkerns stimmen die meisten Beobachter in so fern überein, als sie die eigentliche Kernsubstanz von einer besonderen Membran umgeben sein lassen; nur wenige, wie z. B. J i c k e l i (13; p. 468) stellen die Existenz einer besonderen Membran für die meisten Fälle in Abrede. In der Deutung der Kernsubstanz selbst gehen dagegen die Ansichten aus einander. G r u b e r, ähnlich wie es früher B a l b i a n i (1; 1861 p. 124) gethan hat, nimmt für Chilodon

curvidentis (9; p. 4 und 8) eine Zusammensetzung aus dicht zusammengedrängten kleinen, stark färbbaren Kügelchen an. Bütschli (6; p. 1508) spricht von einer wabigen Structur; die Wandungen der Waben seien von der färbbaren Kernsubstanz gebildet, die Zwischenräume von einer leicht flüssigen Masse, dem Nucleochylema, erfüllt. Am complicirtesten lautet die Schilderung Jickeli's, welcher nicht weniger als vier Bestandtheile aufstellt. 1. Eine Grundsubstanz von Achromatin; 2. eine Gerüstsubstanz, d. h. eine besondere Substanz, welche das Kerngerüst bildet; 3. „die Substanz, welche Farbstoffe am klarsten widergiebt“ und die, wenn ich Jickeli recht verstehe, hauptsächlich im Gerüst, spärlicher in der Grundsubstanz vertheilt ist; 4. Protoplasma, welches von aussen in den Kern eintritt.

Wie leicht ersichtlich liefert jede dieser Darstellungen Anknüpfungspunkte an die Auffassung, welche ich oben vom Bau des Infusorienkerns gegeben habe.

Am nächsten aber kommt ihr die Ansicht, welche sich Maupas (21; p. 225) auf Grund von Degenerationserscheinungen des Kerns bei Oxytricha sp.? gebildet hat; derselbe sagt: il semble que la substance fondamentale du nucléus à l'état normal se compose de deux matières intimement unies et mélangées, dont l'une possède l'affinité pour les teintures, tandis que l'autre y est absolument indifférente. Dans la dégénérescence la première s'altère et disparaît peu à peu.

Während mit Ausnahme Jickeli's und Maupas' die neueren Autoren im Hauptkerne nur eine geformte Substanz, das Chromatin, annehmen, liegen für die Nebenkerne zahlreiche Beobachtungen vor, welche darauf hinauslaufen, dass abgesehen von der Kernmembran eine besondere achromatische und eine chromatische Kernsubstanz unterschieden werden können. Eine Zusammensetzung des Nucleolus aus 2 Substanzen, Chromatin und Achromatin, fand Plate bei den Nebenkernen von Spirochona gemmipara (26; p. 202) und Paramaecium Aurelia (richtiger wohl P. caudatum) (28; p. 183). Bütschli bei den Nebenkernen zahlreicher anderer Infusorien (6; p. 1523). Letzterer scheint hierin aber keine durchgreifende Erscheinung zu erblicken, da er Thiere aufführt, deren Nebenkerne ohne diese Differenzirung sind. Verschiedenes Verhalten der Nebenkerne nimmt auch

Jickeli an, welcher 3 Formen unterscheidet, 1. stark färbbare Nebenkerne; 2. Nebenkerne, welche fast farblos bleiben; 3. Nebenkerne mit deutlicher Sonderung in eine tingirbare und nicht tingirbare Substanz (p. 468). Speziell für die 2 Nebenkerne von Paramaecium Aurelia giebt Maupas (p. 231) eine Schilderung, welche ich hier wörtlich folgen lasse: Ils étaient de forme sphérique et composés d'un corpuscule central opaque vivement coloré par les teintures et ne mésurant que $3\mu$, enveloppé d'une couche corticale mésurante en diamètre $3\mu$, claire et ne se colorante pas.

Von Maupas (15; Taf. XXI Fig. 14) rührt auch die einzig genauere Abbildung, welche meines Wissens vom Bau des Paramaeciencytostoms existirt, her. Dieselbe wurde später von Schewiakoff bestätigt und von Bütschli auch in seine Bearbeitung der Infusorien aufgenommen.

## II. Aeusserer Verlauf der Copulation.

Eine jede Copulation beginnt damit, dass 2, seltener 3 oder 4 Paramaecien sich an einander drängen und lebhaft schwimmend sich eine Zeit lang um einander herumtummeln. Später kommt es dann zu einer innigeren Vereinigung, an welcher aber stets nur 2 Thiere betheiligt sind. Obwohl mir bei meinen Untersuchungen mehrere Tausend von Paarlingen zu Gesicht gekommen sind, habe ich doch kein einziges Mal feststellen können, dass 3 oder gar 4 Thiere zu derselben Copula zusammengetreten wären; ich nehme daher an, dass in den Fällen, wo 3 oder mehr Infusorien zusammenschwimmen, die spätere Vereinigung paarweis erfolgt, dass die überzähligen Individuen leer ausgehen und sich anderweitig umthuen müssen.

Die Vereinigung erfolgt immer mit dem vorderen Ende. Dasselbe wird von jedem Thier ein wenig ventralwärts eingebogen und fest gegen die rechte Seite des anderen Paarlings gedrückt (Taf. I Fig. 2). Die Umbiegung ist so sehr ausgesprochen, dass sie sich auch an abgetödteten Thieren erhält.

Eine zweite Vereinigung vollzieht sich, indem die Mundöffnungen, welche zunächst ja auf der rechten Seite der Thiere liegen und etwas

ventralwärts gerichtet sind, fest gegen einander gepresst werden. Dadurch wird eine gekreuzte Stellung beider Thiere herbeigeführt, welche sich am besten beobachten lässt, wenn man ein Päärchen auf die Kante stellt, welche aber in späteren Stadien weniger auffällig ist, wenn die Vereinigung eine innigere wird und sich auf die zwischen Mundöffnung und Vorderende gelegene Strecke ausdehnt. Immerhin ist lange Zeit noch zu sehen, dass das vordere Ende eines jeden Thieres etwas auf die linke Seite des anderen übergreift.

Wenn auch die Mundöffnungen bei der Copulation geschlossen werden, und bis längere Zeit nach der Trennung jede Nahrungsaufnahme unterbleibt, so ist doch der Raum des Vestibulums zunächst noch auffallend weit geöffnet und bildet einen Sack, der sich am unteren Ende in den kurzen Oesophagus verjüngt. Erst spät, etwa 5—6 Stunden vor dem Ende der Copulation, ändert sich das Aussehen und zwar, wie die Untersuchung mittelst Reagentien lehrt, in Folge des Andringens einer der aus den Nebenkernen hervorgegangenen Spindeln. Das die Spindel begleitende Protoplasma ruft nämlich 2 Umgestaltungen an dem Infusor hervor; erstens treibt es dicht vor der Mundöffnung und auf der rechten Seite des Thieres einen kleinen Höcker hervor, welcher sich ein wenig in die angrenzende Körperwand des Nachbarthiers einbohrt; zweitens aber drängt es auch gegen das Vestibulum an; es presst die linke Seite und den Grund einwärts, so dass sie die rechte Seite berühren und dass das bis dahin vorhandene Lumen zum grössten Theil verschwindet; nur das untere Ende klafft dann noch als ein kleiner, unregelmässiger Spalt, welcher an einer Ecke in den Oesophagus sich verlängert. War bisher die Flimmerung im Cytostom sehr deutlich und lebhaft, so wird sie von jetzt ab kaum wahrnehmbar. Nur in dem engen Spalt sieht man noch langsam die Wimpern schlagen.

Copulirte Paramaecien halten im lebenden Zustand und auch nach der Abtödtung fest zusammen. Ich habe versucht, durch Quetschen mit dem Deckgläschen oder indem ich die Thiere in ein zugespitztes Röhrchen einsaugte und mit grosser Heftigkeit auf den Objectträger herausblies, lebende Copulae zu sprengen, habe aber immer nur in den ersten Stunden der Conjugation Erfolge erzielt und häufig auch dann nur, indem das eine Thier dabei zu Grunde ging. Gleichwohl muss auf das

Bestimmteste betont werden, dass bis zur Zeit, um welche das Vestibulum theilweise sich schliesst, noch keine Verschmelzung erfolgt ist; die Cuticulae beider Thiere sind im Gegensatz zu anderen Infusorien, wie den Stylonychien, bei welchen die Protoplasmakörper frühzeitig zusammenfliessen, vollkommen intact. Die Vereinigung der beiden Thiere kann nur durch ein klebriges Secret oder durch Ineinandergreifen der Wimpern bedingt sein.

In den letzten Stunden der Copulation bildet sich jedoch eine schmale Verwachsungsbrücke dicht vor der Stelle, wo die Mundöffnung durch das Einpressen der convexen Vestibularwand geschlossen wurde. Die Brücke geht schräg von der rechten Seite des einen Thiers zur rechten des anderen und ist daher in der gewöhnlichen Seitenlage der Thiere nicht klar zu sehen. Man kann sie erkennen, wenn man die Thiere auf ihre Enden stellt; am schönsten aber bekommt man sie zu Gesicht, wenn man Copulae unter dem Deckgläschen stark abplattet und durch Zufliessen von Picrinessigsäure abtödtet. Dann habe ich mehrfach gesehen, dass beide Thiere sich von einander zurückziehen und nur durch die Protoplasmabrücke vereint bleiben. Die Brücke ist, wie ich später noch genauer zeigen werde, von grosser Bedeutung; sie verbindet die beiden hügelartigen Vorwölbungen, welche durch die Einstellung einer Nebenkernspindel hervorgerufen werden, und dient einem Theilproduct dieser Spindel zur Ueberwanderung in das benachbarte Thier.

Die Verbindungsbrücke wird einige Zeit, bevor die Paramaecien auseinandergehen, wieder eingezogen; die Cuticula schliesst sich und auch das Vestibulum des Cytostoms wird wieder wegsam. An letzterem haben sich aber inzwischen wichtige Veränderungen vollzogen; durch das Andrängen des Protoplasma ist der Wimperstreifen desorganisirt und die er hauptsächlich die scharfe Contour des Vestibulums verursacht, ist letzteres nur undeutlich zu erkennen mit Ausnahme seines unteren Endes und des angrenzenden Oesophagus, welche während der ganzen Dauer der Copulation und auch einige Zeit nach Lösung derselben deutliche Abgrenzung zeigen. Da ich lebende Thiere nicht daraufhin untersucht habe, kann ich über das Fehlen oder Vorhandensein von Flimmerung nichts aussagen; feine Streifung und Körnelung im Cytostom abgetödteter Thiere deute ich jedoch als Reste von Wimpern, die vielleicht nicht mehr thätig

sind; sie sind auch in dem vorderen Theil des Cytostoms nachweisbar. (Taf. III Fig. 1 u. 2.)

Der hier in seinen ersten Anfängen geschilderte Rückbildungsprocess des Cytostoms macht nach Lösung der Copula rasche Fortschritte und dehnt sich auf die hinteren Partieen des Vestibulums und den Oesophagus aus. Zur Zeit, wo sich die Anlagen der Haupt- und Nebenkerne aus Theilung gemeinsamer Spindeln hervorbilden, ist das Cytostom ganz geschwunden oder nur noch als ein kleiner Körnerhaufen zu erkennen, welcher am linken oberen Eck einer inzwischen neu entstandenen Mundöffnung liegt.

Die Anlage des neuen Cytostoms habe ich auf das genaueste verfolgt; sie beginnt ebenfalls schon vor dem Ende der Copulation und im Anschluss an den alten in Rückbildung begriffenen Apparat. Wo an demselben Oesophagus und Vestibulum in einander übergehen, bildet sich aus letzterem ein kleiner Blindsack; die Lage desselben ist constant auf der rechten Seite, was besondere Betonung verdient, da auch bei den gewöhnlichen Theilungen der Paramaecien das zweite Cytostom an gleicher Stelle und in vollkommen gleicher Weise vom ersten aus angelegt wird. Der Blindsack ist scharf begrenzt und besitzt an seinem Grund einen hakenartig gebogenen Wimperstreifen, von dem ich es für wahrscheinlich halte, dass er sich von den letzten Resten des früheren Wimperstreifens ableitet. (Taf. III Fig. 2.)

An Thieren, welche sich wieder getrennt haben, kann man die weitere Entwicklung der Cytostomanlage verfolgen (Taf. III Fig. 4—9, und 13—15). Dieselbe besteht nicht allein in einer Vergrösserung, sondern auch einer Streckung des hakenartig gekrümmten Wimperstreifs; ferner in einer allmähligen Ablösung des neuen Cytostoms von dem alten in beständiger Rückbildung begriffenen. Man kann die Sonderung am besten verfolgen, wenn man die Thiere durch Rollen so legt, dass man genau auf die Mundöffnung herabsieht. Stellt man dann etwas tiefer ein, so bekommt man schöne Querschnittsbilder, welche zeigen, dass vordringendes Protoplasma das anfangs einheitliche Lumen in zwei Hohlräume zerlegt, von denen der eine dem neuen, der andere dem alten Cytostom angehört. Fast einheitlich sind beide Räume noch in Figur 13; das alte Cytostom ist hier noch ansehnlicher als die neue Anlage, wenn auch weniger deutlich contourirt; an der Grenze beider entspringt der Oesophagus.

Figur 15 gibt die Ansicht der Mundöffnung eines in der Entwicklung schon weiter vorgeschrittenen Thiers und daneben das Querschnittsbild des Cytostoms in 2 Einstellungen. Die Mundöffnung ist ein an beiden Enden ausgeweiteter Schlitz, das Cytostom ist ein Längsspalt, dessen grösste Ausdehnung dem neuen Cytostom angehört, dessen erweitertes oberes Ende der Rest vom Lumen des stark rückgebildeten alten Cytostoms ist; bei noch tieferer Einstellung sieht man beiderlei Lumina von einander getrennt. Aehnlich liegen die Verhältnisse bei einem anderen Exemplar, auf welches sich Figur 14 bezieht. In einigen weiteren Abbildungen sieht man die Anlage des neuen Cytostoms in sich abgeschlossen, das alte entweder noch als kleinen sackförmigen Anhang am linken oberen Ende oder an gleicher Stelle nur noch eine undeutliche körnige Masse. Schliesslich geht auch diese verloren, das allein zurückbleibende neue Cytostom verlängert sich an seinem hinteren Ende in den Oesophagus und damit schwinden die letzten Anzeichen, dass das Cytostom des aus der Copulation hervorgegangenen Thiers nicht dasselbe Organ ist, welches beim Anfang der Conjugation vorhanden war.

Die geschilderten merkwürdigen Vorgänge, welche zur Neubildung der Mundöffnung führen, fallen in die Zeit nach dem Spindelaustausch oder der Befruchtung; sie beginnen selten um die Zeit, in welcher die erste Theilspindel sich zu strecken beginnt (Taf. III Fig. 6), gewöhnlich erst dann, wenn diese sich getheilt hat und die aus ihr hervorgegangenen secundären Theilspindeln von Neuem Vorbereitungen zur Theilung treffen. Der Neubildungsprocess ist abgelaufen, wenn die Anlagen der Haupt- und Nebenkerne sich aus den Enden der secundären Theilspindeln zu entwickeln beginnen. Im Grossen und Ganzen verläuft somit die Bildung des neuen Cytostoms parallel dem Theilungsprocess, welcher die Anlagen der Neben- und Hauptkerne liefert, und verhält sich zu ihm, wie die Anlage des hinteren Cytostoms zur Theilung der Nebenkerne bei der später zu beschreibenden gewöhnlichen Vermehrung der Paramaecien.

Suchen wir die Vorgänge zu deuten, so müssen wir sagen, dass das neue Cytostom vom alten her als eine Knospe, welche sich allmählig abschnürt, gebildet wird. Hierin ergeben sich weitere Vergleichspunkte zu den Vorgängen bei der Vermehrung der Paramaecien durch Theilung. Bei letzterer entsteht das Cytostom des hinteren Theilsprösslings an voll-

kommen gleicher Stelle als eine Knospe vom alten Cytostom, welches selbst in den vorderen Theilsprössling übergeht. Während aber bei der Theilung beide Cytostome erhalten bleiben, geht bei der Conjugation das ursprünglich vorhandene, nach vorn und links gelegene zu Grunde.

Literatur. In seiner Bearbeitung der Infusorien hat Bütschli (p. 1609) die Fälle zusammengestellt, in denen eine Conjugation von mehr als 2 Individuen beobachtet wurde. Von diesen scheinen mir nur die Angaben über die totale Conjugation der Vorticellinen beweiskräftig zu sein. Diese multiplen Conjugationen der Microgonidien sind wahrscheinlich nach Analogie der Polyspermie bei Eiern als pathologische Erscheinungen zu beurtheilen. Bei der partiellen Conjugation, in welcher beide Individuen einander gleichwerthig sind, sind die Bedingungen etwas andere und scheint es mir von vornherein zweifelhaft, ob es hier zu einer Vereinigung von mehreren Thieren kommen kann. Die Literaturangaben hierüber sind nach meiner Ansicht nicht beweiskräftig genug, da aus einigen derselben nicht ersichtlich ist, ob sie sich auf die Zeit des losen Herumschwimmens oder auf die Zeit der innigeren Vereinigung beziehen, andere wiederum eine abweichende Deutung gestatten. Wenn z. B. Plate (28; p. 191) Copulae beschreibt, bei welchen 2 Thiere in normaler Weise verbunden waren, das dritte sich dem hinteren Körperende eines derselben angefügt hatte, so werde ich dadurch an Bilder erinnert, welche ich ebenfalls gesehen habe und in einem späteren Aufsatz noch behandeln werde. Hier begnüge ich mich mit folgenden Bemerkungen.

Jeder Copulationsperiode gehen lebhafte Theilungen voraus; letztere sind bei Paramaecium gar nicht selten unvollständig, so dass beide Theilsprösslinge in Verbindung bleiben. Ich habe nun beobachtet, dass solche monströse Individuen mit normalen copuliren können und dann Bilder erzeugen, wie sie Plate beschrieben hat.

Ein strittiger Punkt bei der Conjugation der Infusorien ist die Art ihrer Vereinigung; da in dieser Hinsicht die einzelnen Arten sich ganz verschieden verhalten, die Paramaecien, um nur selbstbeobachtete Thiere aufzuführen, ganz anders wie die Stylonychien, Stentoren oder gar die Vorticellinen, so beschränke ich mich auf eine Besprechung der Angaben, welche die Paramaecien behandeln. Hier stehen sich am schroffsten

Balbiani und Bütschli gegenüber. Ersterer läugnet eine Protoplasmaverschmelzung für alle Infusorien mit Ausnahme der Vorticellinen (3; 1882 p. 265) und lässt den Zusammenhalt durch die Ausscheidung einer klebrigen Substanz unterstützt werden (1; 1861 p. 435). Bütschli (6; 1605) nimmt dagegen auch für die Paramaecien eine ausgedehnte Verwachsung an, welche die ganze Mundnaht, d. h. die Strecke zwischen Mund und Vorderende ergreift. Gruber (p. 51) scheint sich mehr auf die Seite Balbiani's zu stellen; denn um einen Stoffaustausch zwischen den copulirten Paramaecien als möglich hinzustellen, macht er die Annahme: es könne sich die Cuticula zum Zweck des Substanzaustausches öffnen und sofort wieder schliessen, wozu sie bekanntlich bei Infusorien befähigt sei, oder es könne auch durch die Mundöffnungen ein Austausch erfolgen.

Plate hat in seinen ersten Publicationen (27; p. 36) jede Verschmelzung in Abrede gestellt; später hat er sich von der Existenz einer Verwachsungsstelle dicht vor der Mundöffnung überzeugt (29; p. 183); hier sollen beide Individuen durch einen kleinen Canal in offener Communication stehen. Seine Angaben sind richtig, nur lässt Plate unerwähnt, dass die Verbindungsbrücke erst in späten Stadien der Conjugation auftritt.

Die Umgestaltungen der Mundöffnung scheinen bei Paramaecium allen Beobachtern entgangen zu sein. Nur Maupas erwähnt die Rückbildung des Schlundes während der Conjugation. Bei Stylonychien und anderen Infusorien dagegen sind Umformungen des Cytostoms und der Bewimperung, die sogenannten „Mauserungen“, wiederholt beschrieben worden.

## III. Ueber die Veränderungen der Haupt- und Nebenkerne während der Copulation.

### a. Erste Periode. Umwandlung der Nerbenkerne in Spindeln.

Am Anfang der Copulation ist der Hauptkern noch von unregelmässiger Gestalt, häufig hie und da eingekerbt oder in eine feine Spitze verlängert; bald aber rundet er sich wurstförmig ab oder er wird gedrungener und nähert sich der Gestalt eines Eies oder einer Kugel. Allmählig gewinnt er dann eine sehr charakteristische Form, welche nur während der Copulation auftritt und offenbar sehr lange anhält, da

sie bei wohl $^2/_3$ aller Copulae angetroffen wird. Der ovale Kern ist in einer Richtung abgeplattet, so dass er von der Kante gesehen etwa $^1/_3$ so breit erscheint wie bei der Flächenansicht. Bei der gewöhnlichen Lage der Copulae bekommt man die Kantenansicht, da die Abplattung des Kerns parallel zur Conjugationsebene erfolgt ist.

Die Ränder der Scheibe sind verdickt, besonders in den Seitentheilen, wo sie bei längerer Dauer der Copulation zu ansehnlichen Lappen auswachsen, welche zwischen sich eine tiefe Längsrinne fassen. Letztere ist dem andern Paarling zugewandt und beherbergt häufig in sich einen oder beide Nebenkerne während ihrer Umwandlung zur Spindel. Oefters habe ich schon während dieses Stadiums beobachten können, dass der Rinnengrund sich zu einer niedrigen Leiste erhebt, womit der Anfang zum Auswachsen des Kerns in lappige Fortsätze gegeben ist.

Die Nebenkerne sind gleich von Anfang der Copulation von ansehnlicher Grösse, wie ein Blick auf die Tabelle IV lehrt. Der Nucleolus ist selten noch ein homogener Körper, gewöhnlich ist er in einige wenige grössere oder zahlreiche kleinere Körner zerfallen; er liegt auf einer Seite des Kerns und überlässt der achromatischen Substanz das andere Ende. Der Uebergang zur Spindel beginnt mit einer Streckung des bis dahin kugeligen Kerns in eine ausgesprochene Eiform, deren stumpfes Ende den Nucleolus beherbergt; weiterhin gewinnt die achromatische Substanz eine undeutlich streifige Anordnung, welche nach der Spitze des Ovals orientirt ist.

Die scharfe Grenze beider Kernsubstanzen verwischt sich, indem die Chromatinkörnchen auseinanderweichen und auf die Bahnen der achromatischen Substanz übertreten. (Taf. I Fig. 3, Taf. IV Fig. 14.)

Eine weitere bedeutende Grössenzunahme des Kerns führt zu einem sehr auffälligen Stadium, welches wir das Sichelstadium nennen wollen, weil der Kern in einer bestimmten Lage grosse Aehnlichkeit mit einer Mondsichel hat. (Taf. I Fig. 3). Die Entfernung der beiden Sichelenden ist mehr als 3 mal so gross als der Durchmesser des Kerns am Anfang der Copulation; auch die Entfernung der concaven und convexen Seite ist bedeutender, als dieser Durchmesser war, dagegen ist in der dritten Richtung eine Abplattung eingetreten. So gewinnt der Kern ein ganz verschiedenes Ansehen, je nachdem man ihn in Flächenansicht oder in

Kantenstellung betrachtet, eine Verschiedenartigkeit, welche noch dadurch gesteigert wird, dass bei ersterer die Contourirung des Kerns ausserordentlich zart ist, während er bei der zweiten von einer scharf gezogenen, doppelt contourirten, etwas faltigen Membran eingefasst ist. (Taf. IV Fig. 15 u. 16). Der Inhalt des Kerns ist von Fasern gebildet, welche von einer Spitze zur andern ziehen und so zart sind, dass sie bei Aufhellung in Nelkenöl vollkommen unscheinbar werden. Auch die färbbaren Bestandtheile des Kerns können auf dem vorliegenden Stadium leicht übersehen werden und treten nur bei gutgeglückter Carminfärbung im Farbenbild klarer hervor. Sie bilden einen Haufen feinster Stäubchen, welcher entweder ganz auf das eine Ende des Kerns beschränkt ist oder sich in einen Körnchenstrang längs der concaven Seite der Sichel verlängert.

Wenn man dann den Kern von einem der Sichelenden aus betrachtet, so bekommt man ein charakteristisches Querschnittsbild; auf der convexen Seite der Sichel ist der Querschnitt abgerundet, auf der concaven zu einer Spitzea usgezogen. Hier liegt ferner ein nucleolusartiger Fleck, der optische Querschnitt des Chromatinfadens.

Zwischen Sichelkern und Kernspindel schieben sich noch einige weitere Zwischenformen ein. welche in der Figur 17 Taf. IV abgebildet sind. Der Kern hat schon eine typische Spindelfigur angenommen; seine Faserung ist aber noch undeutlich wie bisher; die äusserst feinen Chromatinkörnchen liegen diffus im Kern verbreitet oder bilden einen rundlichen Haufen im Centrum des Kerns. Die Spindel (Fig. 18) vervollkommnet sich, indem die Faserung so deutlich wird, dass man auf dem Querschnittsbild jede Faser als besonderes Körnchen wahrnimmt, dass man ferner die Zahl der Spindelfasern in der grössten Breite des Kerns auf 8—9 bestimmen kann. Auch die Aequatorialplatte kommt zur Ausbildung, indem die Körnchen sich erst zu einer diffus ausgebreiteten bandartigen Zone anhäufen, später sich den Spindelfasern anschliessen. Ein Studium der vollkommen fertiggestellten Aequatorialplatte ist bei der Feinheit der Elemente sehr schwierig. Ich habe mich nicht davon überzeugen können, dass jeder Spindelfaser ein einziges stäbchenförmiges chromatisches Körperchen entsprochen habe. Vielmehr schien mir die Aequatorialplatte dadurch gebildet zu sein, dass in der Mitte jeder Spindelfaser d. h. nahezu gleich weit von beiden Enden entfernt mehrere Körnchen

in der Längsrichtung der Spindel hinter einander lagerten. Da die Körnchen sehr fein, schwach gefärbt und nicht sehr zahlreich sind, bilden sie in ihrer Gesammtheit eine verwaschen rothe Stelle im Verlauf der Spindelfasern.

Dem Gesagten zu Folge können wir uns von der Umbildung der Nebenkerne zu Spindeln in Kürze folgendes Bild machen. Der Process beginnt mit einer Streckung des Kerns zunächst zu einem Oval, dann zu einer Sichel, endlich zu einer typischen Spindel. Die achromatischen Theile des Kerns beginnen frühzeitig sich faserig anzuordnen, bilden auf dem Sichelstadium äusserst zarte und feine Fäden, später werden die Fäden wieder weniger, in gleichem Maasse aber deutlicher, wahrscheinlich indem mehrere der ursprünglichen Fäden sich zu einer derberen Faser vereinigen.

Das Chromatin bewahrt lange eine endständige Lage, erst am stumpfen Ende des Ovals später in einer Spitze der Kernsichel. Die Verlängerung in einen Faden leitet eine Umlagerung des Chromatins in einen Körnerhaufen ein, welcher von beiden Enden des nunmehr spindelig gewordenen Kerns gleich weit entfernt ist, dessen feinste Theilchen sich auf die Spindelfassern vertheilen und so die Aequatorialplatte erzeugen.

Literatur. Zahlreiche der Entwicklungsformen, welche die Umbildung des Nebenkerns zur Spindel charakterisiren, wurden schon von Balbiani (1; 1861 p. 502—505) bei Paramaecium caudatum (vom französischen Forscher P. Aurelia genannt) beschrieben und auf Tafel III abgebildet; sie wurden aber in irrthümlicher Weise combinirt, was weiter zur Folge hatte, dass Balbiani eine doppelte Bildungsweise der Spindeln (seiner Samenkapseln) annahm; in seltenen Fällen wandele sich das „männliche Ei“ direct in eine „Samenkapsel“ um; gewöhnlich soll zuvor eine Theilung eintreten. Als vorbereitende Stadien werden die Kernsicheln dargestellt und an diese unmittelbar und ohne Dazwischentreten einer Spindel die später zu beschreibenden Theilungsfiguren angeschlossen.

Mit seinen früheren Beobachtungen steht in einem merkwürdigen Contrast die Darstellung, welche Balbiani in seinen neueren Veröffentlichungen gegeben hat (1882 p. 111). Hier lässt er die so auffallenden und von ihm selbst früher beobachteten Sichelkerne ganz unberücksichtigt und behauptet eine vollständige Uebereinstimmung in der Theilung der

Nebenkerne und der Zellkerne: formation des deux pôles, des filaments bipolaires, de la couche des bâtonnets représentant la plaque équitoriale se divisant en deux démiplaques etc.

Die Erkenntniss, dass der Sichelkern eine Vorbereitung der Spindel ist, verdanken wir Bütschli, welcher schon in seiner grundlegenden Arbeit über die Copulation der Infusorien für die Entwicklung der auffallend grossen Spindeln von Paramaecium putrinum eine wenn auch nicht vollständige, so doch in der Combination der Stadien richtige Darstellung gegeben hat; er hat dieselbe später in Bronn: Classen und Ordnungen des Thierreichs reproducirt. Ihm schliessen sich Maupas und Jickeli an. Maupas, dessen ausführliche Mittheilungen noch ausstehen, begnügt sich mit der Bemerkung, dass die Micronuclei zunächst die Gestalt von Hörnern und Halbmonden annehmen, was eine besondere Art des Wachsthums des Nucleolus sei, welche durch einfache Zweitheilung ersetzt werden könne (16; p. 1571). Jickeli (13; p. 491) lässt ebenfalls die Nebenkerne erst die Gestalt halbmondförmiger Körper annehmen, bevor sie zu Spindeln werden, fügt dem aber die schon von Bütschli mit Recht bekämpfte Angabe hinzu, dass am Aufbau der Spindel Protoplasma, welches von aussen eindringt, betheiligt sei.

Da die Sichelkerne schon von mehreren Forschern richtig beurtheilt worden waren, ist es nicht recht verständlich, dass Gruber (10; p. 13) sie für abnorme Gestaltungen erklären konnte, welche sich nur vereinzelt vorfinden.

### b. Zweite Periode. Theilungen der Nebenkernspindeln.

In die zweite Copulationsperiode fallen die complicirtesten Vorgänge, so dass der Beobachter einer grossen Menge von Bildern sich gegenüber gestellt findet. Ich hätte daher gern den Zeitabschnitt weiter abgetheilt und eine Periode der ersten und eine solche der zweiten Theilungen unterschieden, allein es erwies sich praktisch undurchführbar, weil die Veränderungen des Haupt- und Nebenkerns nicht mehr so eng in einander greifen, dass ein bestimmter Zustand des ersteren auch einem bestimmten Zustand des letzteren entspräche. Ebenso lehrt ein Blick auf die Tafeln, dass zwischen den beiden Individuen einer Copula erhebliche Unterschiede vorhanden sein können. Indem beide Erscheinungen sich combiniren,

kann es vorkommen, dass in dem einen Thier die Veränderungen des Hauptkerns, im anderen die Veränderungen der Nebenkerne weiter gediehen sind.

Ich beginne auch hier wieder mit den Metamorphosen des Hauptkerns. Die schon früher erwähnte Dreitheilung desselben in einen mittleren und zwei seitliche Theile prägt sich zunächst noch deutlicher aus. Die Seitentheile wachsen wie zwei Klappen hervor und umschliessen einen mittleren im Rinnengrund gelegenen Theil, dessen Aussehen wechselt. In Fig. 4 Taf. I besteht er aus zwei hervorsprossenden Höckern oder er ist ein mittlerer Lappen, welcher nach dem vorderen oder nach dem hinteren Ende des Thieres gewandt ist. Der Lappen ist häufig hakenartig eingebogen und an seinem Ende einfach oder doppelt eingekerbt. Endlich variiren auch das Grössenverhältniss und die Lagebeziehungen der drei Kernabschnitte (Taf. I Fig. 5).

Jeder der letzteren fängt im weiteren Verlauf abermals an, sich unterzutheilen, wie das am Mittellappen meist schon früh ausgesprochen ist. Sie wachsen in Fortsätze aus, welche sich auf Kosten des Hauptkerns vergrössern und einen vielfach gewundenen Verlauf einhalten. So lehrt z. B. Figur 1 Taf. II, wie derselbe Fortsatz erst aufwärts steigt, dann umkehrt, im Bogen wieder nach vorwärts sich bewegt, dabei einige Ausbuchtungen bildet, am vorderen Ende zum dritten Mal umwendet, um mit einem nach rückwärts gebogenen Haken abzuschliessen. Anfänglich sind die Kernausläufer mit Ausnahme einer kolbigen Endanschwellung überall ungefähr von gleicher Dicke, später aber werden manche Stellen fadenartig ausgezogen, so dass ein Ausläufer mehrfach sein Caliber wechseln kann. Damit wird eine Auflösung in einzelne Stücke vorbereitet, indem die verdünnten Stellen schliesslich durchschneiden. Indessen erfolgt die Durchschneidung nicht so bald, als man bei oberflächlicher Betrachtung wohl annehmen möchte. Häufig gelingt es noch bei einem Kern, welcher aus zahlreichen Stücken zu bestehen scheint, den Zusammenhang derselben nachzuweisen. So habe ich es zum Beispiel noch bei einem Thiere gefunden, welches am Ende der zweiten Copulationsperiode stand. Fünf künstlich verschlungene Ausläufer gingen hier sämmtlich von einer gemeinsamen dreieckigen Hauptplatte aus (Taf. IV Fig. 24). Freilich waren die Verbindungen zumeist auf sehr dünne Brücken reducirt. Die drei-

eckige Gestalt der Mittelplatte, welche ich wiederholt beobachtet habe, erklärt sich aus der ursprünglichen Dreitheilung des Kerns. Auch in der Figur 6 Taf. I ist die Dreitheilung noch deutlich zu erkennen, insofern von einem kleinen nach vorn gewandten Stück drei geschlängelte Kernfäden ausgehen, welche stellenweise namentlich am unteren Ende der Kernmasse so verdünnt sind, dass die vollkommene Abschnürung der angeschwollenen Kernenden offenbar unmittelbar bevorsteht. Beim Paarling der anderen Seite ist der Zerfall denn auch schon eingetreten.

Wenn die Theilung der Nebenkernspindeln ihrem Ende sich nähert, ist meist ein einheitlicher Hauptkern nicht mehr vorhanden. Am frühesten lösen sich einige Stücke an dem nach rückwärts gewandten Ende ab. Dann schreitet der Ablösungsprocess von aussen nach den inneren Partien vor. Die Kernbruchstücke haben meist kolbige Formen und sind am einen Ende in Fäden ausgezogen; oder es sind spindelige Stücke oder die dünnen Verbindungsfäden sind bei dem Abschnürungsprocess isolirt worden und haben sich zu kleinen runden Bruchstücken zusammengeballt.

Im Allgemeinen bekommt man den Eindruck, dass mit dem Auswachsen und Zerklüften eine Massenzunahme des Kerns eintritt. Denn während ursprünglich der Hauptkern auf das mittlere Drittel beschränkt ist und dies nur zum kleinsten Theil erfüllt, durchsetzen seine Bruchstücke später den grössten Theil des Paramaecium. Diese weite Ausdehnung kann wohl nur aus einer Volumzunahme erklärt werden, auch wenn man in Anrechnung zieht, dass jetzt zwischen die Kerntheile Protoplasma eingedrungen ist. Ich will hier gleich erwähnen, dass auch in der nächsten Periode der Copulation, in welcher sich eine weitere Parcellirung vollzieht, die Substanz des Hauptkerns mir nach wie vor zuzunehmen scheint.

Wichtiger als die Umwandlungen des Hauptkerns sind diejenigen der Nebenkerne. Diese theilen sich zwei- zum Theil sogar dreimal. Da der Theilungsprocess stets nach demselben Princip verläuft, schicke ich einige allgemeine Bemerkungen über ihn voraus. (Taf. IV Fig. 22 u. 23. Taf. I Fig. 4. 5. Taf. II Fig. 1—3.)

Das erste bei der Spindeltheilung ist eine Verbreiterung der Aequatorialplatte, die zu einer Theilung in die Seitenplatten führt. Die

Theilung selbst habe ich nicht beobachtet, nur das Resultat derselben: zwei Seitenplatten mehr oder minder den Spindelpolen genähert. Die Schwierigkeit, den Theilungsvorgang selbst zu beobachten, führe ich darauf zurück, dass um diese Zeit die regelmässige Anordnung der Spindelfasern getrübt wird, indem sie sich schlängeln und dabei sich kreuzen. Die Elemente der chromatischen Figur der Spindel werden dabei in unregelmässige Lagerung gebracht und in Folge dessen undeutlich; man sieht hie und da auf den Spindelfasern bei Anwendung des Farbenbildes undeutliche matt rothe Stellen; die ganze Spindel sieht wie gefleckt aus. (Taf. II Fig. 2, Taf. IV Fig. 22. 23.)

Ich habe die Möglichkeit erwogen, dass vielleicht eine Theilung der Aequatorialplatte überhaupt unterbleibt und dass ein Theil der Elemente nach dem einen, ein Theil nach dem andern Kernpole wandert; ich bin aber von dieser Vermuthung zurückgekommen, da auch auf dem Stadium der Seitenplatten die Spindelfasern von einem Pol zum anderen ziehen und eine jede von ihnen Chromatinkörnchen trägt. Wenn man den optischen Längsschnitt prüft, so sind ebensoviel Elemente in der Seitenplatte vorhanden, wie früher in der Aequatorialplatte, während die oben gemachte Annahme die Hälfte voraussetzen würde.

Nach dem in Fig. 23 Taf. IV gegebenen Bild zu schliessen, scheinen nun die zur Theilung führenden Bewegungen der Kernmasse nicht nur in Schlängelungen der Spindelfasern, sondern auch in Biegungen des Gesammtkerns zum Ausdruck zu kommen. Letztere führen zu einer äquatorialen Einschnürung der Spindel, welche mit einer Verlängerung derselben sich combinirt. Indem nun die eingeschnürte Kernpartie immer mehr verdünnt wird und sich fadenförmig auszieht, entsteht eine typische Hantelform, zwei ovale Endanschwellungen durch ein Mittelstück verbunden. Die Hantelköpfe bewahren die faserige Spindelstructur und haben auch anfangs eine deutliche Chromatinplatte, welche später in einen Haufen feinster Körnchen sich auflöst. Das Mittelstück dagegen verändert seine Structur in gleichem Maasse, als es zum Zweck der Theilung sich in die Länge streckt und dünner wird. So lange es noch kurz und gedrungen ist, setzt es die Faserung der Hantelköpfe fort; bei mittlerer Streckung sieht man nur zwei seitliche Contouren und einen feinen axialen Faden, welcher die Faserung der Hantelköpfe in sich vereint. Kurz vor der Durchschnürung kann man auch diesen

Unterschied nicht mehr machen und das Verbindungsstück ist ein einziger structurloser feiner Faden.

In der geschilderten Weise bilden sich die zwei aus den Nebenkernen hervorgegangenen Spindeln zunächst in 4, und diese wieder in 8 Spindeln um. (Taf. I Fig. 4, 5 und 6.)

Von diesen 8 Spindeln nimmt eine, welche wir die Hauptspindel nennen wollen, eine besondere Stellung an und unterscheidet sich dadurch von den übrigen, den Nebenspindeln, welche beliebig im Protoplasma des Paramaecium vertheilt sind. (Taf. I Fig. 6.) Sie kommt auf die rechte Seite des Thieres dicht vor die Mundöffnung zu liegen, richtet ihre Axe senkrecht zur Körperoberfläche und befestigt sich mit einer Spitze an der Cuticula. Da mit dem Vordringen der Spindel zugleich auch reichliches Protoplasma nach der Umgebung der Mundöffnung hinströmt, buchtet sich die Oberfläche hervor in Form eines flachen Höckers, welcher den Körper des Nachbarthiers etwas eindrückt; ausserdem aber wird auch das Vestibulum des Cytostoms durch die Protoplasmaanhäufung beengt und es beginnt jetzt der oben schon beschriebene Verschluss der Mundöffnung.

Kurze Zeit nach beendigter Theilung haben alle 8 Spindeln dieselbe Structur. In der Axe liegt ein ovaler mattroth sich färbender Körper oder Strang, in welchem alle unter einander verschmolzenen chromatischen Theile enthalten sind; er ist umhüllt von einem Mantel von Spindelfasern, die durch grössere Dicke und körnige Beschaffenheit darauf hinweisen, dass sie aus Verklebung mehrerer primitiver Fasern entstanden sind. (Taf. I Fig. 6. Taf. IV Fig. 24.) Auf dem optischen Querschnitt giebt die Spindel um diese Zeit ein äusserst charakteristisches Bild; im Centrum ein mattrosa gefärbter Körper und um denselben herum ein Kranz dicht gefügter Körnchen, die Querschnitte der Spindelfasern.

Von diesem Stadium aus entwickeln sich Haupt- und Nebenspindeln nach verschiedener Richtung. Die Hauptspindel nimmt an Grösse zu und gewinnt wieder die Gestalt einer normalen Theilspindel, indem die Fasern reichlicher werden, sich durch das ganze Kerninnere vertheilen, indem ferner die Chromatinkörnchen zur Bildung einer Aequatorialplatte zusammentreten. (Taf. I Fig. 7.) Bei den Nebenspindeln beginnt dagegen ein Rückbildungsprocess (Fig. 6. 7. Taf. IV Fig. 24); sie werden kleiner und zugleich homogener, eine Zeit lang kann man noch zwei Bestand-

theile auseinanderhalten, einen chromatischen Körper und eine achromatische Rinde, welche an beiden Enden zugespitzt ist oder auch nur an einer Seite in einen spitzen schnabelartigen Fortsatz ausläuft. Später sieht man nur einen chromatischen Körper, der durch seine Gestalt noch seine Beziehungen zu den Nebenkernspindeln erkennen lässt. Als letzte Stadien der Rückbildung endlich sind feine rothe Körnchen zu betrachten, die abseits vom Bruchstückhaufen des Hauptkerns lagern. Endlich kann man auch nicht die geringsten Spuren von Nebenkernspindeln auffinden und ist so zur Annahme gezwungen, dass sie sich aufgelöst haben.

Ich beobachtete sie noch bei Thieren, welche am Anfang der nächsten Periode sich befanden, einige noch von messbarer Grösse, andere so fein, dass man sie nur mit Rücksicht auf die beobachteten Mittelformen mit einiger Wahrscheinlichkeit als Derivate von Nebenkernen deuten konnte.

Die Rückbildung erfolgt nicht für alle Nebenspindeln in gleicher Geschwindigkeit; so kann es kommen, dass in einem und demselben Präparat verschiedene Stadien neben einander vorkommen wie Figur 24 Taf. IV lehrt.

Während die Nebenspindeln sich rückbilden, hat die allein zurückgebliebene Hauptspindel eine wichtige Weiterentwicklung erfahren. Die Aequatorialplatte hat sich in die Seitenplatten getheilt, (Taf. 1 Fig. 8) zwischen beiden schnürt sich die Spindel ein zu einer Brücke, welche als ein dünner Faden ausserordentlich in die Länge wächst und sich unter einem Winkel bald nach dem oberen bald nach dem unteren Ende knickt (Fig. 9). Die kolbig verdickten Enden verlieren bald jegliche faserige Structur und liegen nach Durchschnürung des Verbindungsfadens als 2 homogene Kerne weit aus einander (Taf. II Fig. 4). Da beide äusserst spärliche Chromatinkörnchen enthalten und auch bei sehr starker Imbibition sich fast gar nicht färben, sind sie vom angrenzenden Protoplasma weniger unterschieden, als alle bisher betrachteten Kernstadien. Dies gilt besonders von dem einen der beiden Kerne; wie sich aus der Lage der Hauptspindel mit Nothwendigkeit ergiebt, ist ein Theilproduct dicht unter der Cuticula in dem hervorgetriebenen Höcker der rechten Seite gelegen, das andere dagegen rückt tief in das Innere und kann sogar in den Haufen von Kernbruchstücken, welche aus dem Hauptkern hervorgegangen sind, hineingerathen. Das letztere ist dann schwieriger aufzufinden.

Da die Theilstücke der Hauptspindel sich nicht nur durch ihre verschiedene Lagerung unterscheiden, sondern auch durch ihr weiteres Schicksal, so wollen wir hier gleich besondere Namen einführen und den tief gelegenen Kern den stationären, den oberflächlichen den Wander- oder Befruchtungskern nennen.

In zahlreichen Fällen kommen einige Abweichungen von dem hier geschilderten Verlaufe vor (Taf. II Fig. 1—3). Sehr häufig habe ich auf dem Viertheilungsstadium beobachtet, dass eine Spindel sich auf der rechten Seite des Thiers unter die Cuticula nahe der Mundöffnung eingestellt hatte.

Dann fanden sich auch die Veränderungen schon vor, welche sonst erst später einzutreten pflegen, Verschluss der Mundöffnung und Hervorwölbung des angrenzenden Körperbezirks. Letztere schien mir in einigen Fällen besonders auffällig; ja ich gewann sogar den Eindruck, dass die Spitze der Spindel in den Körper des Nachbarthiers mit einem spitzen Fortsatz eingedrungen sei. Wenn es nun zur Theilung kommt, eilen die übrigen Spindel der eingestellten häufig voraus, sie sind schon sämmtlich oder zum Theil zweigetheilt oder in das Hantelstadium getreten oder ihre Theilproducte sogar schon in Rückbildung begriffen, wenn die eingestellte Spindel erst die Einleitung zur Theilung trifft.

Die Beobachtung derartiger Präparate hat mich früher zu der Ansicht geführt, dass die Differenzirung in Haupt- und Nebenspindeln sich schon auf dem Vierspindelstadium vollzieht; ich habe auch diese Ansicht in einer kurzen Mittheilung, welche in den Sitzungsberichten der Münchener Gesellschaft für Morphologie und Physiologie erschienen ist, vertreten. Danach würden nur die Theilproducte von 3 Spindeln zu Grunde gehen, die Theilproducte der vierten Spindel dagegen beide erhalten bleiben und direct sich in stationären und Wanderkern umwandeln. Die Fälle, wo nur eine Spindel vorhanden ist, welche bestimmt ist, sich später in die bleibenden Kerne zu theilen, während die Nebenspindeln schon geschwunden sind, suchte ich mir durch die Annahme zu erklären, dass die Theilung der vierten eingestellten Spindel, für welche ich wiederholt eine Verzögerung habe feststellen können, aussergewöhnlich spät eingetreten sei.

Meine jetzige Ansicht, welche sich auf genaue Untersuchung eines sehr umfangreichen Materials stützt, geht nun dahin, dass bei Paramaecien

sicherlich erst von den 8 durch zweimalige Theilung entstandenen Spindeln eine sich zur Hauptspindel entwickelt und die 2 Befruchtungskerne liefert und dass demgemäss nicht 6, sondern 7 Spindeln zu Grunde gehen. Denn ich habe 8 Spindeln öfters aufgefunden, bevor die Veränderung in der Gegend der Mundöffnung zu sehen war, und habe ausserdem Thiere beobachtet, bei welchen neben einer unzweifelhaften Hauptspindel, welche sich noch nicht in die Geschlechtskerne getheilt hatte, 7 in Rückbildung begriffene Nebenspindeln existirten.

Ich halte sogar den hier beschriebenen Modus für das normale Verhalten, namentlich auf Grund von Beobachtungen an Paramaecium caudatum. Dieses Thier, welches nur einen Nebenkern hat, besitzt naturgemäss auf allen entsprechenden Theilungsstadien nur die Hälfte der Spindeln von Paramaecium Aurelia. Den 8 Spindeln von Paramaecium Aurelia entsprechen somit 4 bei Paramaecium caudatum. Von den 4 durch zweimalige Theilung entstandenen Spindeln gehen 3 zu Grunde, die vierte erhält sich und liefert die beiden Geschlechtskerne.

Es frägt sich nun, ob die Entwicklung bei allen Exemplaren einer Paramaecienart in ganz derselben Weise verläuft, oder ob nicht vielmehr Variationen möglich sind, ob nicht speciell bei Paramaecium Aurelia die Variation vorkommen kann, dass auf dem Stadium der 4 Spindeln in der oben erläuterten Weise die eine als Hauptspindel die beiden Geschlechtskerne, die andern 3 die 6 zur Rückbildung begriffenen Nebenspindeln liefern. Sollte diese Variation vorkommen, so könnte sie vielleicht mit einer anderen Abänderung im Zusammenhang stehen, welche sich auf die Anlage der ersten Spindel bezieht, deren Besprechung ich bis an diese Stelle verschoben habe. Obwohl ich niemals ein Paramaecium Aurelia mit verschmolzenen Nebenkernen gesehen habe, so kömmt es doch vor, dass die 2 Kernsicheln dicht bei einander lagern und dass diese später eine einzige Kernspindel liefern. Die Kernspindel ist von ganz aussergewöhnlicher Grösse und enthält auf dem optischen Längsschnitt sehr viel mehr Spindelfasern, als man sonst zu Gesichte bekommt. (Taf. IV Fig. 20. 22.) Damit sind Verhältnisse geschaffen, wie sie für P. caudatum charakteristisch sind; es wäre daher nicht zu verwundern, wenn die Differenzirung in Haupt- und Nebenkerne dort schon auf dem Vierspindelstadium zu Stande käme.

### c. Dritte Periode der Conjugation. Austausch der Wanderkerne (Befruchtungsprocess).

Das Paramaecium, wie wir es am Ende der letzten Periode verlassen haben, besitzt einen in zahlreiche Stücke aufgelösten Hauptkern. Die meisten Stücke sind ziemlich gross, kugelig, oval oder wurstförmig; viele haben noch angeschwollene Enden oder sind sogar hantelförmig eingeschnürt; ab und zu hängen auch grössere Stücke mittelst eines feinen Verbindungsfadens zusammen. Reste von Nebenkernspindeln sind zuweilen als kleine Körner noch sichtbar. Die aus der Theilung der Hauptspindel hervorgegangenen letzten Abkömmlinge der Nebenkerne, die Geschlechtskerne sind homogene oder schwach körnige Körper mit einem centralen Haufen chromatischer Körnchen; der tiefer gelegene stationäre Kern ist vollkommen kugelig, der subcuticulare Wanderkern etwas eckig.

Die Veränderungen des Hauptkerns während der 3. Periode sind unbedeutend und beschränken sich auf eine langsam fortschreitende Zerlegung seiner Theile in kleinere Stücke.

Dagegen fangen die Geschlechtskerne an sich zu vergrössern, wahrscheinlich nur durch Imbibition mit Kernsaft; dabei wird das Chromatin wieder deutlicher als ein ovaler Körper, der umgeben ist von achromatischen Fäden, eine Kernform, wie wir sie früher schon kennen gelernt haben, endlich werden die Kerne wieder zu Spindeln mit deutlicher Aequatorialplatte. Zählt man jetzt die Fasern auf dem optischen Längsschnitt, so findet man nur 4—6 und entsprechend so viel Chromatinelemente; im Vergleich zu früher hat somit eine Reduction der Spindelfasern etwa auf die Hälfte stattgefunden.

Während der Erneuerung der Spindelstructur erfahren beide Kerne Lageveränderungen. Dieselben sind beim stationären Kern unbedeutend und beschränken sich darauf, dass er wieder oberflächlicher auf die rechte Seite des Thieres in einige Entfernung vom geschlossenen Cytostom zu liegen kommt.

Die Lageveränderungen der Wanderkerne sind nicht nur viel erheblicher, sondern zugleich auch von viel grösserer Bedeutung. Sie lassen sich kurz dahin zusammenfassen, dass die Kerne, die inzwischen ent-

standene Protoplasmabrücke zwischen beiden Paarlingen benutzen, um in das Nachbarthier hinüber zu wandern und dort mit dem zurückgebliebenen stationären Kern zu verschmelzen. Da der Austausch meist nahezu gleichzeitig erfolgt, müssen sich beide Spindeln auf der Protoplasmabrücke begegnen und sich an einander vorbeischieben.

Den Austausch der Wanderkerne kann man nicht am lebenden Thier beobachten, sondern nur aus einem sorgfältigen Studium zahlreicher abgetödteter Entwicklungsstadien erschliessen; man kann aber hiebei eine grosse Sicherheit und Genauigkeit der Untersuchung erreichen, wenn man das ausserordentlich gesetzmässige gegenseitige Lageverhältniss der Kerne gut im Auge behält.

Aus der Theilung der Hauptspindel hervorgegangen, liegen die Wanderkerne bei seitlicher Ansicht der Copula genau über einander, aber durch einen weiten Zwischenraum getrennt; ein weiteres Stadium zeigt sie genähert, indem sie sich in der Copulationsebene, man möchte fast sagen auf der Grenze beider Thiere, aus der rein seitlichen Lagerung rechts mehr in eine mediane Lagerung begeben haben. Sie haben inzwischen wieder Spindelstructur gewonnen und die Spindelaxe in die Längsaxe der Copulationsebene eingestellt. (Taf. II Fig. 6, Taf. IV Fig. 27.)

Auf weiteren Präparaten sieht man das hintere Spindelende in eine Spitze ausgezogen und dem Nachbarthiere zugekehrt. Die Spindel befindet sich dann in einer schrägen Stellung; mit dem vorderen Ende liegt sie noch in der Nähe ihres Ausgangspunktes, d. h. in der rechten Seite des zugehörigen Thieres, mit ihrem hinteren Ende ist sie in die Tiefe — also nach der linken Seite zu — vorgedrungen. Dieses hintere Ende bohrt sich in das Nachbarthier ein und zwar in die rechte Seite desselben. In wie weit jedesmal der Uebertritt schon bewerkstelligt ist, lässt sich schwer ermessen, da die Grenzen beider Thiere verwischt, wenn nicht ganz geschwunden sind.

Sehr häufig habe ich gesehen, dass dem eingedrungenen Ende des Wanderkerns ein Ende des stationären Kerns bis zu gegenseitiger Berührung entgegengewachsen ist; es ist mir wahrscheinlich, dass eine derartige Berührung sich frühzeitig und constant vollzieht. (Fig. 6 u. 9, Taf. IV Fig. 26.)

Aus den Bildern 7 und 8 schliesse ich nun, dass unter dem Andrängen des Wanderkerns der stationäre Kern eine Drehung erfährt, so

dass sein der Copulationsebene zugewandtes Ende, welches die Verbindung mit dem Wanderkerne vermittelt, nunmehr abgekehrt ist. Vom gemeinsamen Pol aus divergiren beide Spindeln mit ihren nicht vereinigten Enden, die Wanderspindel in der Weise, dass ihr Ende noch in der rechten Seite des Mutterthiers nahe dem Ausgangspunkt der Wanderung festgeheftet ist. Die Figuren 7, 8, 9 zeigen verschiedene Grade dieser Divergenz; wenn dieselbe ganz aufgehört hat, dann haben sich auch die zweiten Spindelpole unter einander vereinigt; die Spindelfasern haben sich im wesentlichen parallel zu einander gestellt; aus Vereinigung zweier Elemente hat sich eine einzige grössere Spindel mit einheitlicher Aequatorialplatte entwickelt. Die ursprünglich vorhandene Verbindung mit dem Nachbarthier, welche sich aus der Entwicklungsweise mit Nothwendigkeit ergiebt, wird allmählig jetzt aufgehoben.

Sucht man sich von der Menge der Spindelfasern eine Vorstellung zu verschaffen, indem man ihre Zahl auf dem optischen Längsschnitt bestimmt, so bekommt man ungefähr ebenso viel Elemente, als sie den aus den Sichelkernen hervorgegangenen Spindeln zukommen, etwa 10. Wir sehen somit, dass durch Vereinigung von zwei Spindeln, bei welchen eine Reduction der Spindelfasern stattgefunden hatte, die für Paramaecium Aurelia normale Zahl der letzteren wieder hergestellt ist.

Die Figuren 7 und 8 lehren, dass die beiden Paarlinge sich rücksichtlich der Geschwindigkeit, mit welcher die Kernvereinigung zu Stande kommt, nicht gleich verhalten; in beiden Fällen ist das rechte Thier gegenüber dem linken im Vorsprung. Wird dieser Unterschied ein sehr erheblicher, so entsteht ein interessantes Bild, welches ich zweimal erhalten und in Figur 9 Tafel II abgebildet habe. In beiden Fällen war im rechten Thier die Vereinigung beider Spindeln schon vollzogen, in dem einen Fall so vollständig, dass man zwischen den Fasern beider nicht mehr unterscheiden konnte, während im andern Fall dieser Unterschied noch gemacht werden konnte. Im linken Thier befand sich eine sehr viel kleinere Spindel, die stationäre Spindel, welche durch Conjugation noch keinen Zuwachs erhalten hatte. Endlich sehen wir in der Abbildung noch eine 3. Spindel von der Grösse der zuletzt beschriebenen; sie liegt beidesmal unzweifelhaft noch im rechten Thier; es ist die von letzterem gebildete Wanderspindel, welche bestimmt ist, nach links hin-

überzutreten — Figur 9 zeigt den Beginn dieses Uebertritts — und sich dort mit der stationären Spindel zu vereinigen. Solche Fälle, in denen auf der einen Seite die „Befruchtung“ verlangsamt ist, sind besonders geeignet um zu beweisen, dass ein Austausch der Spindeln eintritt.

Zum Schluss sei hier noch die theoretisch wichtige Beobachtung nachgetragen, dass sich schon vor der Vereinigung oder selbst vor dem Austausch der Spindeln die Theilung der Aequatorialplatte vollzogen haben kann (Taf. IV Fig. 26).

### d. Vierte Periode der Conjugation. Bildung der Haupt- und Neben-Kernanlagen.

Durch dichte Aneinanderfügung von 2 Spindeln ist eine ansehnliche Spindel entstanden, welche wir mit Rücksicht auf ihr weiteres Schicksal die primäre Theilspindel nennen wollen. Sie liegt entsprechend ihrer Entstehung auf der rechten Seite des Thieres dicht neben dem Cytostom, welches sich in ganzer Ausdehnung wieder geöffnet hat. Die Theilspindel theilt sich in der oben schon für die Nebenkerne im Allgemeinen geschilderten Weise; sie wächst in die Länge und in die Breite; die Spindelfasern schlängeln und krümmen sich, während die chromatischen Körnchen der Aequatorialplatte sich spalten und die Seitenplatten erzeugen. Unter fortgesetzter Streckung des Kerns weichen die Seitenplatten aus einander (Tafel III Fig. 1) und bildet sich zwischen denselben eine Einschnürung aus, welche zur Hantelform des Kerns führt. Die Hantelköpfe behalten (Tafel III Fig. 3) sehr lange die faserige Structur, oder büssen sie vielleicht überhaupt nicht vollständig ein; das Verbindungsstück dagegen verliert die Faserung immer mehr, je mehr es in die Länge wächst, und wird schliesslich ein feiner Faden, welcher zumeist einen ansehnlichen Bogen zwischen beiden Hantelköpfen beschreibt (Tafel III Fig. 2). Mit dem Durchschneiden des Verbindungsfadens erhalten wir zwei undeutliche faserige Körper, welche aber bald wieder zu zwei normalen Spindeln werden, den secundären Theilspindeln.

Die secundären Theilspindeln verbleiben in dem Thiere, in welchem sie entstanden sind, obwohl zumeist das Fortbestehen der Protoplasmabrücke einen Austausch der Spindeln noch ermöglicht. Ein Befund, den ich nur

einmal gemacht und in Figur 2 dargestellt habe, muss als ein abnormes Vorkommen gedeutet werden. Wenn hier die Theilungsfigur der ersten Theilspindel in der Verbindungsbrücke der 2 Paarlinge liegt, so dass die eine Spindel im linken, die andere im rechten untergebracht ist, so erklärt sich das wohl aus einer verlangsamten Ueberwanderung des einen Wanderkerns. Wahrscheinlich wurde dadurch die Vereinigungsstelle der Geschlechtskerne auf die Verbindungsbrücke verschoben.

Die Lösung der Copulation erfolgt nach meinen Erfahrungen meist nach Trennung der Theilspindeln, seltener noch vor derselben. Ein längeres Andauern der Vereinigung habe ich dagegen nie beobachtet, so dass die nun zu beschreibenden Vorgänge, welche sich an den secundären Theilspindeln vollziehen, immer nur an Einzelthieren beobachtet werden können.

Zunächst nähern sich die Theilspindeln, so dass man von einem bestimmten Stadium an sie stets dicht bei einander findet, die Pole der der einen Seite fest vereinigt, die der andern Seite schwach divergirend (Fig. 5 u. 7); zugleich nehmen sie an Grösse zu und es lockern sich die Spindelfasern, welche zwischen beiden Polen in schwach spiraliger Anordnung verlaufen (Fig. 4). Auch hier führt die Schlängelung der Spindelfasern zur Theilung der Aequatorialplatte; denn wenig vergrösserte Kerne zeigen dieselbe vollzogen (Fig. 5). Nach der Spaltung der Aequatorialplatte wachsen die Spindeln zum Unterschied von früher betrachteten Theilungen ohne eingeschnürt zu werden erheblich in die Länge; zugleich rücken die Seitenplatten fast bis zu den äussersten Enden der Kerne.

Im weiteren Verlauf mehren sich die Unterschiede zur gewöhnlichen Theilung der Nebenkernspindeln. Eine äquatoriale Einschnürung unterbleibt, dagegen bilden sich zwei Einschnürungen beiderseits dicht hinter den Seitenplatten aus, so dass man am Kern nunmehr 3 Abschnitte unterscheiden kann, eine mittlere ansehnliche Anschwellung und 2 die Seitenplatten enthaltende Endknöpfe; alle 3 Abschnitte sind noch faserig gestreift. (Taf. III Fig. 16.)

Die secundären Theilspindeln sind anfänglich schräg oder gar senkrecht zur Längsaxe des Thieres gestellt. Dies ändert sich nun, indem die Spindeln sich parallel zu einander und zur Längsaxe des Thieres lagern. Da ihnen hierdurch die Möglichkeit zu bedeutender Streckung gegeben ist, verlängern sie sich so sehr, dass ihre Enden bis in die

beiderseitigen Spitzen des Paramaecium hineingerathen und sogar ein Stück weit wieder umbiegen können (Taf. III Fig. 9).

Die Streckung geschieht, indem die 3 Kernabschnitte sich in lange Verbindungsfäden ausziehen; namentlich wird das mittlere Kernstück hierbei zum grossen Theil aufgebraucht bis auf eine kleine Anschwellung, welche noch lange genau in der Mitte zwischen beiden Kernenden liegt. Man kann jetzt an jedem Kern 5 Abschnitte unterscheiden, in der Mitte eine spindelige Verbreiterung, dann auf beiden Seiten lange Fäden, endlich an den Enden 2 kleine Köpfchen (Fig. 8).

Die Verbindungsfäden sind zur Zeit ihres Auftretens doppelt contourirt, durch Auseinanderweichen der Contouren entstehen sowohl die spindelige Verbreiterung als auch die Endköpfchen. In ersterer sieht man nur noch 2 leicht gewellte Kernfasern, letztere sind anfangs noch faserig, später werden sie feinkörnig, indem wahrscheinlich die achromatische Substanz zu einem Reticulum zusammenfliesst. Die chromatischen Körnchen sind zu einer undeutlichen Seitenplatte gruppirt, später legen sie sich an einander und bilden einen nucleolusartigen Körper.

Die Art, in welcher die Theilung zu Ende geführt wird, habe ich nicht näher verfolgt. Ich kann daher nicht entscheiden, ob die beiden Enden sich von einander trennen, indem die intermediäre Strecke gleichsam von ihnen aufgesogen wird, oder indem sie eine Auflösung durch das umgebende Protoplasma erfährt; am wahrscheinlichsten ist, dass die Substanz der spindeligen Anschwellung und der Verbindungsfäden sich auflöst. Denn ich habe Fälle beobachtet, in denen die Endkörperchen und Verbindungsstücke noch deutlich zu erkennen waren, ein Zusammenhang aber nicht mehr wahrgenommen werden konnte. Ich vermuthe daher, dass die Endkörperchen sich ablösen und allein erhalten bleiben.

So lange beide Kernenden noch fest unter einander verbunden sind, lässt sich kein Unterschied zwischen ihnen wahrnehmen. Einige Zeit nach vollzogener Theilung ist dagegen auf's deutlichste erkennbar, dass aus den secundären Theilspindeln 2 verschiedene Kernpaare entstanden sind, kleinere und grössere; die kleineren sind die Anlagen der bleibenden Nebenkerne, die grösseren die Anlagen zu dem neu entstehenden Hauptkern, die sogenannten Placenten. Beide gemeinsam sind von den rundlichen Stücken, welche aus Zerfall des Hauptkerns entstanden sind, leicht

zu unterscheiden, indem sie den Charakter von Kernbläschen haben, eine deutliche Membran besitzen und sich sehr wenig färben. Die Unterschiede zwischen Nebenkernanlagen und Placenten beruhen nun vor Allem auf der Art, wie die spärlichen Chromatinbestandtheile auf das achromatische Gerüst vertheilt sind. Bei den Nebenkernen besteht der Zustand wie er sich aus der Theilung ergiebt, fort; das Bläschen ist vom achromatischen Gerüst gleichmässig durchsetzt, so dass sogar der Unterschied zwischen ihm und der Kernmembran verwischt ist, und in dem Gerüst liegt ein chromatischer Nucleolus entweder in Form eines rundlichen Körpers oder in Form eines gewundenen Stabes oder endlich als ein Complex weniger Körnchen. Bei den Hauptkernanlagen sind dagegen beide Kernsubstanzen innig vermengt. Im Innern der Kernblase liegt ein rundlicher Körnerhaufen, der sich schwach färbt, wahrscheinlich ein beide Kernbestandtheile in sich vereinigendes Reticulum. (Taf. III Fig. 9 u. 10.)

Die Folge ist, dass bei Betrachtung gefärbter Canadabalsampräparate und Benützung des Farbenbildes die Nebenkerne mit ihren intensiv rothen Nucleoli hervorleuchten, dass dagegen die Hauptkernanlagen fast gar nicht oder nur als matt rosa Flecke auffallen.

Begreiflicherweise war es mir nun von grossem Interesse zu entscheiden, in welcher Weise aus den Theilspindeln die zweierlei Kernanlagen hervorgehen. Von vornherein waren 2 Möglichkeiten gegeben, entweder die eine Theilspindel liefert nur Nebenkernanlagen, die andere nur Placenten, oder jede Spindel liefert auf der einen Seite einen Nebenkern, auf der andern die Anlage zu einem Hauptkern.

Mit Aufwendung vieler Mühe bin ich zu dem Resultat gelangt, dass das letztere zutrifft. Der Unterschied zwischen beiderlei Kernen tritt sehr bald nach vollzogener Theilung auf; dann kann noch die Lagerung bestehen, wie sie aus der Theilung unmittelbar sich ergiebt: in jedem Ende des Thieres 1 Paar von Kernen. In mehreren Fällen habe ich deutlich gesehen, dass das eine Kernpaar schon zweifellos die Charaktere von Placenten trug, das andere das Aussehen von Nebenkernen bewahrt hatte.

Wir können somit den Satz aufstellen, dass jede primäre Theilspindel sich in zwei gleichwerthige Stücke, die secundären Theilspindeln, theilt, dass jede secundäre Theilspindel dagegen bei der Theilung ungleichwerthige Elemente liefert, auf der einen Seite die Anlage zu einer

Placenta, auf der andern die Anlage zu einem Nebenkern. Wir haben ferner gesehen, dass auch im Theilungsprocess zwischen beiden Fällen erhebliche Unterschiede bestehen. Die primäre Theilspindel zeigt denselben Theilmodus wie die Nebenkerne in der Copulationsperiode vor der Befruchtung; die secundären Theilspindeln bilden dagegen dieselben Figuren, wie sie bei der gewöhnlichen Theilung der Paramaecien aus den Nebenkernen hervorgehen.

Für meine Auffassung, dass jede Theilspindel eine „Placenta“ und einen Nebenkern erzeugt, kann ich als weiteren Beweis den Umstand anführen, dass stets gleichviel Nebenkerne wie Placenten vorhanden sind. Es kann nämlich vorkommen, dass Thiere, welche aus der Copulation hervorgegangen sind, 4 anstatt 2 Nebenkerne besitzen; dann haben sie auch die gleiche Anzahl von Placenten. Ich erkläre mir dieses mehrfach beobachtete Vorkommniss durch die Annahme, dass die Theilungsspindel, welche aus der Vereinigung der Geschlechtskerne entstanden ist, sich zweimal hintereinader theilt und so vier Spindeln liefert, welche sich nun erst in Haupt- und Nebenkernanlagen theilen. (Taf. III Fig. 11.)

Auf die Copulation folgt eine jedenfalls Tage lang dauernde Periode, in welcher allmählig die normale Structur des Paramaecium wieder hergestellt wird, indem die Theilproducte des Hauptkerns schwinden und die sogenannten Placenten den neuen Hauptkern liefern. Die bis dahin kleinen Paramaecien wachsen lebhaft und können sogar eine Grösse erreichen, wie ich sie sonst nie beobachtet habe. In dieser Zeit bleiben die Nebenkerne im wesentlichen so wie sie aus der Theilung der secundären Theilspindeln hervorgegangen sind, mit einziger Ausnahme vielleicht, dass die Chromatinkörner einen rundlichen Nucleolus erzeugen. Die Anlagen der Hauptkerne erfahren dagegen ein langsam fortschreitendes Wachsthum und eine Aenderung ihrer Structur, wobei von dem bisherigen Charakter der Kerne nur die scharfe Umgrenzung durch eine weit abstehende Kernmembran lange Zeit erhalten bleibt. Der Körnerhaufen im Innern der Kernblase wird zu einem homogenen Nucleolus, welcher sich so gut wie gar nicht färbt. Nur undeutlich verwaschene rothe Flecke deuten an, dass im Kern noch Chromatin enthalten ist. Dieselben nehmen allmählig an Menge und Intensität der Färbung zu, so dass die anfangs fast farblose Hauptkernanlage bei Färbungen ein immer tieferes Colorit gewinnt; von den Bruchstücken des Hauptkerns ist sie aber auch dann noch zu unter-

scheiden, einmal weil sie nach wie vor homogen und später äusserst fein gekörnelt erscheint, zweitens aber auch weil sie von einer weit abstehenden Kernmembran umgeben ist, welche den Kernbruchstücken fehlt (Fig. 12 u. 17).

In gleichem Maasse als die beiden Hauptkernanlagen an Grösse zunehmen, in gleichem Maasse schwinden die Reste des alten Hauptkerns. Dieselben haben während des in Rede stehenden Zeitabschnitts eine fortgesetzte Verkleinerung erfahren und sind zu rundlichen oder polyedrischen Körpern geworden, zwischen denen nur geringfügige Grössenunterschiede bestehen. Während sie früher dicht zu einem Haufen zusammengedrängt waren, verbreiten sie sich jetzt gleichmässig durch das in lebhaftem Wachsthum begriffene Thier. Dabei geben sie Erscheinungen zu erkennen, welche eine allmählige Degeneration wahrscheinlich machen (Taf. IV Fig. 25). Sie werden lichter, die Körnelung ihrer Substanz wird gröber und lockerer, nicht selten bildet sich im Centrum eine helle Stelle aus. Häufig liegen sie den Hauptkernanlagen dicht angefügt; da sie dann aber immer durch die Kernmembran getrennt bleiben, halte ich eine directe Verschmelzung mit denselben für ausgeschlossen; dagegen scheint es mir sehr wahrscheinlich, dass ihre Substanzen gelöst und von den Kernanlagen zum eigenen Wachsthum verbraucht werden.

Noch sind aber 2 Kernanlagen vorhanden, während ein normales Paramaecium nur 1 Hauptkern besitzt. Von vornherein sind 2 Möglichkeiten gegeben, in welchen sich diese letzte Umbildung vollziehen könnte. Einmal könnten die beiden Kernanlagen verschmelzen, zweitens könnten sie durch einen Theilungsact auf 2 Thiere vertheilt werden. Bilder, welche einen Verschmelzungsvorgang ausser Zweifel stellen würden, habe ich nicht gefunden, wohl aber habe ich häufig gesehen, dass die Hauptkernanlagen an der Grenze des hinteren und mittleren Drittels sich fest an einander pressen. Wenn wir berücksichtigen, dass Verschmelzungen ruhender Kerne wohl schnell ablaufen, so sprechen diese Beobachtungen zu Gunsten der ersten der beiden oben aufgestellten Möglichkeiten. (Taf. III Fig. 12 u. 17.)

Andererseits habe ich keine Anzeichen aufgefunden, dass, so lange als die Hauptkernanlagen getrennt bestehen, eine Theilung des Paramaecium zu Stande kömmt. Ich habe zu dem Zweck die Vorgänge der Theilung bei Paramaecien, welche noch vor der Copulationsperiode standen, geprüft und die bisher noch ungenügend oder gar nicht bekannten com-

plicirten und jedenfalls langdauernden Umwandlungen der Nebenkerne und der Cytostome genauer verfolgt.

Ich werde darüber in einem besonderen Abschnitt berichten und beschränke mich hier auf die Bemerkung, dass selbst bei abnorm grossen Paramaecien mit doppelter Kernanlage keine Vorbereitungen zur Theilung aufzufinden waren. Dieser negative Befund macht die Annahme unwahrscheinlich, dass ein Theilungsprocess zur einfachen Beschaffenheit des Hauptkerns führt.

Literatur: Da in den meisten früheren Arbeiten die einzelnen Phasen der Copulation nicht auseinander gehalten worden sind, ist es mir zweckmässiger erschienen, die Angaben über die Schicksale der Nebenkernspindeln im Zusammenhang zu besprechen.

Der Theilungsprocess der Spindeln wurde zuerst von Bütschli (5; Taf. VII, VIII u. XII) bei Paramaecium Bursaria, P. putrinum und Stylonychia Mytilus beschrieben, mit Abbildungen erläutert und als eine Form der Kernvermehrung richtig gedeutet. In Bronn Classen und Ordnungen des Thierreichs hat er zum Theil seine früheren Abbildungen wieder abgedruckt und auch seine frühere Schilderung im Wesentlichen beibehalten und nur in so fern ergänzt, als er die inzwischen in die Histologie eingeführte Unterscheidung von Chromatin und Achromatin anwandte (6; p. 1535). Ich hebe aus Bütchli's Darstellung die wichtigsten Sätze heraus. „Unter fortgesetzter Streckung des Kerns wird die Kernplatte getheilt und ihre Hälften wandern nach den Polen, welche sie schon erreichen, bevor eine Einschnürung in der mittleren Region eintritt. Stets bleiben die achromatischen Verbindungsfasern zwischen den auseinander gerückten Kernplattenhälften sehr deutlich und klar. Sie sind die früheren Spindelfasern, an welchen sich die Kernplattenelemente verschieben, was nicht ausschliesst, dass sie gleichzeitig von ihnen bewegt werden. Indem der Kern fortgesetzt in die Länge wächst, runden sich seine beiden Enden allmählich kugelig bis ellipsoidisch ab, so dass sie sich durch eine Einschnürung von dem strangartigen Mitteltheil deutlich absetzen. Den Inhalt der abgerundeten Enden bilden wesentlich die Kernplattenhälften, den Verbindungsstrang dagegen die achromatischen Verbindungsfasern, welche jedoch jederseits noch eine kleine Strecke in die Enden eindringen. Der Verbindungsstrang wächst nun sehr stark

aus, wobei er zunächst lang spindelförmig wird, da er in der Mitte am dicksten bleibt. Diese Anschwellung erhält sich lang, wird jedoch natürlich immer unmerklicher, je mehr der Strang auswächst; schliesslich schwindet sie."

Der Verbindungsstrang „erscheint im Maximum seiner Streckung als ein ganz feiner in der Mitte nicht mehr angeschwollener Faden." „Dass dieser Faden schliesslich mitten durchreisst und seine Reste eingezogen werden, scheint zweifellos."

In der beschriebenen Weise sollen sich die Nucleoli sowohl bei der Conjugation als auch bei der Vermehrung der Infusorien durch Quertheilung in Tochterkerne verwandeln; nur die Tochterkerne sollen sich in beiden Fällen verschieden verhalten. Bei der Quertheilung soll „bald meist schon vor der vollen Ausbildung des Verbindungsstranges die Rückbildung der Kernplattenhälften in jedem Tochterkern eintreten," d. h. ihre Umwandlung in den Zustand des ruhenden Nebenkerns. „Bei der Vermehrung während der Conjugation kehren die Tochterkerne nicht in den Ruhezustand zurück," weil sie sofort von Neuem zur Theilung schreiten. Dabei sollen die am Pol einseitig gelagerten Kernplatten zunächst zur Bildung der Kernplatte wieder in die Mitte rücken.

Zu diesen Angaben habe ich zu bemerken, dass Bütschli die nicht unwichtigen Unterschiede zwischen den Nebenkerntheilungen, welche vor der Befruchtung stattfinden, und denen, welche nach der Befruchtung zur Bildung der Neben- und Hauptkernanlagen führen, übersehen hat. Seine Darstellung combinirt Bilder, welche verschiedenen Reihen angehören; so gehören die terminale Lagerung der Seitenplatten und die spindelige Anschwellung des Verbindungsstrangs in den zweiten Theilungsmodus hinein; die meisten übrigen Angaben beziehen sich dagegen auf die erste Theilweise. Ferner lässt Bütschli die eigenthümliche Schlängelung der Spindelfasern unerwähnt, welche in die Zeit der Theilung der Aequatorialplatte fällt und die bei der Erklärung des Mechanismus der Kerntheilung Berücksichtigung verdient, obwohl er die betreffende Spindelform einmal selbst abgebildet hat. (5; Taf. VIII Fig. 7.)

In einer Reihe principiell wichtiger Fragen bin ich dagegen mit Bütschli in voller Uebereinstimmung: „dass das Material zum Aufbau der achromatischen Spindelfasern schon im ruhenden Kern enthalten ist

und nicht von eindringendem Protoplasma der Umgebung geliefert wird", dass die Kernmembran erhalten bleibt, dass die Nebenkernspindeln stets Chromatin enthalten und dass sie dieses Chromatin im Nebenkern vorfinden und nicht erst vom Hauptkern entlehnen müssen. Hiermit ist schon gesagt, dass ich die kurze Darstellung, welche Jickeli von den Theilstadien der Nebenkerne gegeben hat, nicht für richtig halte (13; p. 491).

Mit den Untersuchungen, welche Bütschli über die Spindeltheilung von Paramaecium bursaria veröffentlicht hat (5), erklärt sich Balbiani (3; 1882 p. 110) vollkommen einverstanden; damit ist nun schwer vereinbar, wenn er auf der folgenden Seite eine vollständige Uebereinstimmung der Theilung der „Nucleoli" bei Conjugation und Theilung der Infusorien mit der Theilung der Zellkerne behauptet und diese Uebereinstimmung bis in die Einzelheiten durchzuführen sucht. Denn wie aus meinen und Bütschli's Beschreibungen ersichtlich ist, bestehen zwischen der Theilung der Nebenkerne der Infusorien und derjenigen der Gewebskerne bei grosser Aehnlichkeit doch immer noch sehr erhebliche Unterschiede; so trifft es z. B. gar nicht zu, dass „les bâtonnets fusiformes (der Seitenplatten) se transforment graduellement en petits noyaux vésiculeux, qui fusionnent pour former les deux jeunes noyaux."

Da Gruber und Plate auf die Structur der Kernspindeln und ihrer Theilungsphasen nicht näher eingegangen sind, so bleiben uns hier nur noch die Arbeiten Maupas' (15—22) zu erwähnen übrig; bei ihrem Charakter als vorläufiger Mittheilungen kann man von ihnen keine ausführlicheren Angaben erwarten. Immerhin ist wichtig, dass Maupas ebenfalls eine vollkommene Uebereinstimmung in der Theilung der Nebenkerne bei Conjugation und Theilung behauptet; ferner giebt er eine genauere Beschreibung des aus der Theilung hervorgegangenen ruhenden Kerns. (16; p. 1571) „L'état le plus important à connaître est celui de forme sphérique granuleuse, mais qu'il est plus exacte d'appeller peletonné. La substance fondamentale du nucléole y est, en effet, organisé en un mince filament finement enchevêtré et peletonné sur lui même. Cette forme représente l'état primitif par lequel le nucléole et ses produits reviennent constamment au début de chaque nouvelle division".

Ob in der That die chromatische Substanz im Ruhezustand der Kerne

die Form eines verknäuelten Bandes besitzt oder, wie ich es dargestellt habe, aus gröberen und feineren Körnchen besteht, lässt sich bei Paramaecium Aurelia wegen der Kleinheit der Kerne mit voller Sicherheit kaum entscheiden; ich lege auf diesen Punkt keinen Werth.

Wir kommen jetzt zu einer Frage, welche bei allen Untersuchungen über Copulation der Infusorien im Brennpunkt gestanden hat: Vollzieht sich ein der Befruchtung analoger Vorgang, ein Austausch von Nebenkernen oder von Theilproducten von Nebenkernen? Bütschli (5; p. 443) äusserte sich in seiner Hauptarbeit darüber folgendermaassen. „Eine wirkliche Gleichstellung des Nucleolus und eines Spermakerns wäre meiner Ansicht nach nur dann festzuhalten, wenn sich nachweisen liesse, dass die Nucleoli der in gewöhnlicher Weise conjugirten Infusorien während der Conjugation ausgetauscht würden, denn das wesentliche Kriterium, das wir bis jetzt für einen Spermakern haben, ist doch das, dass er in einer anderen Zelle (der Eizelle) zur Weiterbildung gelangt. Ich habe es daher auch nicht versäumt, genauer auf die wenigen Fälle bei P. Bursaria und putrinum hinzuweisen, wo ich einen derartigen Austausch der Nucleoli mit Sicherheit glaube annehmen zu dürfen; dennoch haben sich diese Fälle bis jetzt so selten gezeigt, dass ich sie nicht für regelmässig halten darf."

Die hier angezogenen, auf Seite 295 beschriebenen Fälle sind sehr problematisch; die Copula von Paramaecium Bursaria (ein Thier mit 1 Spindel, das andere mit 3) könnte man allenfalls so deuten, dass wie ich es in Figur 9 Taf. I für Paramaecium Aurelia abgebildet habe, der eine Wanderkern beim Uebertritt eine Verzögerung erfahren habe; doch ist eine solche Deutung nicht gerade wahrscheinlich, da Bütschli nichts davon erwähnt, dass in dem Thier mit 3 Spindeln 2 mit einander vereinigt gewesen seien. Das zweite Beispiel (eine Copula von Paramaecium putrinum), bei welcher das eine Thier gar keine, das andere Thier 4 Spindeln enthält (4; Taf. XXV Fig. 2) kann dagegen mit keinem der oben von mir dargestellten Befruchtungsstadien in Beziehung gebracht werden.

Bütschli (6; p. 1622) hat sich daher später auch rücksichtlich des Austausches von Samenkapseln zweifelnd ausgesprochen; indem er über die sogleich zu referirenden Beobachtungen Maupas' äusserte: „Leider gestatten Maupas' vorläufige Berichte über den Austausch und

die Copulation der Micronuclei bis jetzt noch keine genügende Kritik.“ Immerhin glaubt er dem Verfasser als gutem Beobachter Vertrauen schenken zu dürfen, zumal als seine Angaben unsern allgemeinen Erfahrungen über Copulations- und Befruchtungserscheinungen am besten entsprechen würden.

Mit grosser Bestimmtheit sind für die Lehre vom Austausch der Nebenkernspindeln Engelmann und Balbiani eingetreten. Engelmann (7; p. 609) stellt den Satz auf, dass „vor oder nach der ersten oder zweiten Theilung des Nucleolus die Nucleoli ausgetauscht werden“, und spricht ferner die Vermuthung aus, „dass die Reconstruction des Nucleus die Folge einer von der Substanz der Nucleoli auf die Kernfragmente ausgeübten Wirkung sei,“ ohne aber für das eine oder andere triftige Gründe in das Feld zu führen; ihm genügt schon zum Beweis die Beobachtung „gekreuzter Spindeln an der Grenze beider Thiere, etwas nach vorn von den Mundöffnungen, halb im einen halb im anderen Individuum“ (p. 611). Balbiani, welcher in seinen ersten Arbeiten lehrte, dass die Samenkapseln des einen Thiers zur Befruchtung der Eier des zweiten Thiers dienten und zu dem Zweck durch eine besondere Geschlechtsöffnung übertragen würden, deutete später seine Beobachtungen um und behauptete nun, dass von den Nebenkernspindeln eine in das Nachbarthier hinüberwandere. Er habe häufig sowohl bei Paramaecium Aurelia (-caudatum), P. bursaria und P. putrinum die betreffende Spindel in der Mundöffnung beobachtet. (3; 1882 p. 110, p. 116.) Indessen kann man sowohl aus den Angaben wie aus den Abbildungen Balbiani's mit Sicherheit entnehmen, dass er den Befruchtungsprocess selbst nicht beobachtet hat. Was er gesehen hat, ist nach meiner Ansicht die zur Theilung eingestellte Hauptspindel, vielleicht auch der aus der Theilung hervorgegangene Wanderkern, bevor er in das Nachbarthier hinübergetreten ist.

Dass Balbiani's und Engelmann's Beobachtungen einen Uebertritt von Nebenkernspindeln nicht beweisen, ist auch die Ansicht Gruber's und Plate's (10 u. 26—28). Beide bestreiten übereinstimmend diesen Vorgang; in der Gegend der Mundöffnung sollen die Spindeln zweier Thiere auf einander zu rücken, eine gekreuzte Stellung einnehmen und in einen Substanzaustausch treten (Gruber) oder vielleicht auch nur „einen

energischen Plasmaaustausch zwischen beiden Conjugirenden befördern.“ (Plate.) Dieses allerdings wichtige Stadium der Spindelkreuzung habe Balbiani fälschlich auf einen Uebertritt der Spindeln bezogen; indessen sollen die Spindeln wieder in das zugehörige Thier zurückgleiten und anderen heranrückenden Spindeln Platz machen, welche vielleicht ebenfalls derartige Austauschprocesse unterhalten. Das Stadium der Spindelkreuzung nach Plate soll gleich häufig bei Anwesenheit von 1, 2 oder 4 normal gebauten Spindeln auftreten und wurde von Gruber am häufigsten bei 2 Spindeln, seltener bei 1, 3 und 4 Spindeln jederseits angetroffen. Ich kenne nun alle die verschiedenen Bilder, welche Gruber und Plate beschrieben und gezeichnet haben, von Paramaecium caudatum, welches unter dem Namen Paramaecium Aurelia beiden Forschern gedient hatte, und kann sie daher auf Grund genauer Untersuchung einer lückenlosen Entwicklungsreihe in richtiger Weise deuten. Es wurden beobachtet:

1. Copulae mit eingestellter Hauptspindel, bei welchen die 3 Nebenspindeln vollkommen intact waren (Stadium mit 4 Spindeln), bei welchen eine Spindel, in Rückbildung begriffen, einen homogenen Körper gebildet hatte und daher nicht mehr als Spindel gerechnet wurde (Stadium mit 3 Spindeln), bei welchen 2 und 3 Nebenspindeln rückgebildet waren (Stadium mit 2 und 1 Spindel).

2. Copulae mit getheilter Hauptspindel, bei welchen die Theilproducte schon wieder Spindelstructur angenommen hatten (das gewöhnliche Stadium (mit 2 Spindeln) und ferner solche bei denen sie den Charakter von fast homogenen Kernen besassen. (Gruber Taf. I Fig. 11. 12. 13., welche etwa in folgende Reihenfolge zu bringen sind 12. 13. 11. und denen Fig. 8. 9. 10 nicht voran, sondern nachzustellen sind.)

In eine neue Phase trat die Lehre vom Austausch der Spindeln durch die bisher leider nur in vorläufigen Mittheilungen niedergelegten ausgezeichneten Untersuchungen Maupas'. Maupas fand bei dem auch von mir zur Beobachtung benutzten Infusor Paramaecium Aurelia im Wesentlichen dasselbe, was ich oben geschildert habe, dass die beiden „Micronuclei“ eines Thiers sich zweimal theilen, dass von den 8 Spindeln 7 zu Grunde gehen, die achte sich in einen „männlichen und einen weiblichen Vorkern“ theilt. „Darauf hin tauschen die conjugirten Thiere

ihren männlichen Vorkern aus, welcher sich mit dem weiblichen Vorkern seines neuen Wirths vereinigt und verschmilzt, indem er so einen neuen Kern von gemischtem Ursprung erzeugt. Damit endigt der wesentlichste Theil der geschlechtlichen Befruchtung." (20; p. 356.) Der Austausch der Kerne wurde in principiell übereinstimmender Weise bei Paramaecium caudatum, Stylonychia pustulata, Onychodromus grandis, Spirostomum teres, Leucophrys patula und später auch bei Vorticellen beobachtet. Eine genauere Schilderung des Vorganges wurde für Paramaecium caudatum mit folgenden Worten gegeben. „Pendant le stade D un seul des corpuscules nucléolaires, issu des divisions antérieures, continue à evoluer et se divise de nouveau en deux. De ces deux l'un demeure en place près de la bouche; le second corpuscule au contraire va se placer parallèlement au grand axe de l'Infusoire dans la large ouverture du vestibule prébuccal. A ce moment cet ouverture est libre, le tube pharyngien ayant disparu. Arrivés à ce point les corpuscules d'échange ont la forme de fuseaux striés."

„Ainsi disposés ces fuseaux nucléolaires s'enfoncent peu à peu dans le corps du conjoint opposé, en glissant obliquement l'extremité postérieure dévançant un peu l'antérieure. A peine engagés dans le corps de leur nouvel hôte, ils se trouvent immédiatement attirés vers le corpuscule conservé par chacun conjoint. Comme ce dernier a également une forme oblongue, son extremité postérieure entre d'abord en contact avec l'extremité postérieure du nouveau venu, puis ils s'accolent longitudinalement et finalement se fusionnent."

Aehnliches wie Maupas hat vielleicht noch früher Jickeli beobachtet. Doch lässt sich aus den kurzen Sätzen, in welchen er seine Beobachtungen zusammenfasst, und die ich hier folgen lasse, nicht entnehmen, in wie weit seine Untersuchungen beweiskräftig sind. „Den schon oft behaupteten, aber immer noch zweifelhaften Austausch von Theilsprösslingen der Nebenkerne während der Conjugation kann ich für Paramaecium mit voller Sicherheit bestätigen. Es liegen mir in Dauerpräparaten alle Stadien vom Vorstülpen der Bauchwandungen durch den andringenden Nebenkern bis zum fast vollzogenen Uebertritt vor." „Der gleiche Rhythmus in den beiden Individuen eines Conjugationspäärchens ist auch hier zu erkennen, indem der Uebertritt in beiden Individuen gleichzeitig erfolgt. Dadurch erhält man nicht selten Zustände dieses

Processes, wo die wechselnden Nebenkerne kreuzweise über einander gelegt erscheinen.“ (13; p. 495.)

Auch nach dem Erscheinen der Arbeiten Maupas' haben Plate und Gruber (11; p. 6) an der Ansicht festgehalten, dass bei der Copulation kein Ueberwandern von Spindeln in das Nachbarthier Statt hat.

Schliesslich mögen hier noch einige Bemerkungen Platz finden, welche sich auf alle früheren Autoren mit Ausnahme von Maupas beziehen.

Während der Conjugationszustände kommen bei Par. aurelia zweimal Zustände mit 1 und 2 Spindeln (bei Par. caudatum sogar mit 1, 2 und 4 Spindeln) sammt den zugehörigen Theilungsstadien vor; das eine Mal vor, das andere Mal nach der Befruchtung. Bei Paramaecium Aurelia haben wir vor der Befruchtung die direct aus dem Nebenkern entstandene Spindel und später ihre beiden Theilproducte, nach der Befruchtung die primäre Theilspindel und die secundären Theilspindeln. Diese Zustände von ganz verschiedener morphologischer Bedeutung sind nur von Maupas richtig unterschieden worden, von allen übrigen Forschern wurden sie mit einander verwechselt oder richtiger gesagt für gleichwerthig gehalten. Das kommt nun hauptsächlich daher, dass bei den meisten Infusorien der „Zerfall“ des Hauptkerns entweder gar nicht (P. bursaria) oder erst nach aufgehobener Copulation eintritt. (P. caudatum; P. putrinum). In Folge dessen fehlen vor Lösung der Copula die sicheren Kriterien der Zeitbestimmung, wie sie uns bei P. aurelia durch die gesetzmässig fortschreitende Umbildung des Hauptkerns an die Hand gegeben werden. Ein Thier mit Ausgangsspindel (Taf. I Fig. 3) hat bei P. Aurelia einen einheitlichen scheibenförmigen Kern, ein Thier mit primärer Theilspindel einen Haufen von Kernstücken. Bei Paramaecium caudatum finde ich dagegen auf den correspondirenden Stadien stets einen einheitlichen Kern, welcher nur in seinem Oberflächen-Relief geringe Unterschiede aufweist, die leicht übersehen werden können. Par. Aurelia ist daher ein zum Studium der Copulation vorzüglich geeignetes Object, obwohl es durch die ausserordentliche Kleinheit und die schwach chromatische Beschaffenheit seiner Spindeln, sowie durch den Haufen der Kernbruchstücke der Beobachtung viel grössere Schwierigkeiten bereitet als P. caudatum mit seinen auffallend grossen Kernfiguren. Das späte Auftreten des Kernzerfalls bei ihren Unter-

suchungsobjecten ist wahrscheinlich auch der Grund gewesen, weshalb die früheren Autoren von demselben keine so genaue Darstellung gegeben haben, wie es hier geschehen ist.

Von der Art, in welcher nach aufgehobener Conjugation die Kerne des Infusors sich reconstruiren, hat schon Bütschli in seinem Hauptwerk eine im Wesentlichen richtige Darstellung gegeben, welche die noch von Engelmann (7; p. 604) angenommene Lehre von der Genese der Placenten aus dem alten Hauptkern beseitigte. Aus den Spindeln des Nebenkerns sollen nach ihm sowohl die bleibenden Nebenkerne als auch die Anlagen der Hauptkerne, die Placenten Stein's, hervorgehen; der alte Hauptkern soll entweder zum Aufbau des neuen mit verwandt werden, oder ausgestossen oder aufgelöst werden. Dieser Auffassung sind fast sämmtliche spätere Forscher beigetreten, nur dass sie zumeist in Abrede stellten, dass Theile des alten Hauptkerns ausgestossen werden. Balbiani suchte Bütschli's Darstellung zu ergänzen mit der auf keinerlei Beobachtung sich stützenden Angabe, der Hauptkern entstehe aus den vom Thier selbst entwickelten Spindeln, der Nebenkern aus einer bei der Befruchtung eingedrungenen Spindel des Nebenpaarlings; die Aneinanderlagerung von Hauptkern und Nebenkern entspreche der Verschmelzung von Ei- und Spermakern bei den Metazoen (3; 1882 p. 269, p. 320—321). Meine und Maupas' Beobachtungen sind ein sicherer Beweis, dass diese Angaben ganz haltlos sind, ebenso wie die Vermuthung Plate's (28; p. 185—188), dass nur die Hauptkerne aus den Nebenkernspindeln entstehen, die Nebenkerne dagegen aus Bruchstücken des alten Hauptkerns.

Der Umstand, dass beim Abschluss der Nebenkerntheilungen (richtiger gesagt der Theilungen der befruchteten Nebenkernspindeln) mehrere Placenten und mehrere Nebenkernanlagen vorhanden sind, hat zu einer Controverse geführt, welche ich auch jetzt noch nicht für völlig entschieden halte. Bütschli nimmt als Regel an, dass die Nebenkernanlagen sich bis auf die für das Thier typische Zahl rückbilden, dass die Placenten je einen Hauptkern liefern und daher durch Theilung auf ebenso viel Theilsprösslinge vertheilt werden, als ihre Zahl beträgt. Im Wesentlichen schliessen sich ihm Balbiani und Maupas an. Balbiani räumt aber die Möglichkeit ein, dass mehrere Placenten zu einem Haupt-

kern verschmelzen; doch solle das nur unter schlechten Ernährungsbedingungen eintreten, wenn man die Copulae ohne neue Nahrungszufuhr in ihrem alten Behälter belasse. Gruber und Plate halten das Verschmelzen der Placenten für die Norm, ebenso wie ich es gethan habe. Bei meinen Untersuchungen traf allerdings zu, was Balbiani für ein ungünstiges, die normale Entwicklung störendes Moment hält; die entcopulirten Thiere wurden nicht mit neuem Nährmaterial versehen.

## IV. Ueber die Theilung der Paramaecien.

Eines der ersten Stadien der Theilung, welches zur Beobachtung kam, wurde mir von einem 0,147 mm langen und 0,056 mm breiten Thier geliefert, bei welchem das Cytostom nahezu in die Mitte des Körpers gerückt war. Dasselbe (Taf. IV Fig. 4) war fast ganz geschlossen, so dass man in der Cuticula der Körperoberfläche nur einen schrägen Spalt erkennen konnte, welcher in einen engen, schlitzförmigen Schlund führte. Erhebliche Veränderungen waren an ihm keinenfalls vorhanden; nur schien es mir, als ob das Wimperband mehr, als es sonst der Fall ist, in die Symmetrieebene des Cytostoms gerückt und somit aus seiner gewöhnlichen Stellung mehr nach rechts verschoben wäre. Auch der Kern hatte noch das Aussehen, wie man es sonst bei Paramaecien findet, und war im Grossen und Ganzen von ovaler Gestalt, unregelmässig ausgezackt und in riffartige Vorsprünge erhoben. Einen sicheren Beweis, dass die Verlagerung und die geringfügigen Veränderungen des Cytostoms Vorbereitungen zur Theilung waren, lieferte die Untersuchung der Nebenkerne. (Taf. IV Fig. 4.) Beide lagen dicht neben dem Hauptkern, waren oval und nach einem Ende birnförmig ausgezogen und in Umwandlung zur Kernspindel begriffen. Der in der Metamorphose weiter vorgerückte Kern enthielt im Innern einer vollkommen intacten Kernmembran deutliche Spindelfasern, welche den chromatischen Nucleolus allseitig umgaben. Letzterer war schon in einen Körnerhaufen aufgelöst und lag dem stumpfen Kernende wesentlich genähert. Beim zweiten Nebenkern bildete das Chromatin noch einen einheitlichen ovalen Körper; das Achromatin war zum Theil schon in Spindelfasern verwandelt, welche aber noch nicht regelmässig angeordnet waren.

Die Orientirung nach den Kernpolen war am spitzen Ende des Kerns deutlicher als am entgegengesetzten stumpfen. Das Präparat deutet somit darauf hin, dass die Umbildung zur Spindel an einem Pole beginnt und nach dem andern fortschreitet.

Bei 2 weiteren Exemplaren (Fig. 1 u. 5) waren die Veränderungen der Nebenkerne kaum weiter gediehen; die Spindelfasern waren ein wenig deutlicher, die chromatische Substanz war als ein länglicher Körper in die Mitte der Spindel getreten und noch mehr in feine Körnchen vertheilt. Wichtigere Resultate ergab die Untersuchung des Cytostoms. Die Mundspalte war geöffnet und klaffte bei dem einen Thier an beiden Enden weiter als in der dazwischen liegenden Partie; sie bestand somit aus einer grösseren vorderen und hinteren kleinen Oeffnung, welche beide durch einen schmalen Spalt zusammenhingen.

Das Vestibulum besass dicht unter der Körperoberfläche eine kleine Aussackung, wie etwa der Oesophagus eines Vogels oder eines Insects mit einem Kropf ausgerüstet ist. Die Aussackung, bei dem einen Thier etwas ansehnlicher als bei dem anderen, besass ihren eigenen Wimperstreifen und ist die Anlage eines neuen Vestibulums; das erweiterte hintere Ende der Mundspalte deutet vielleicht jetzt schon die Sonderung einer neuen Mundöffnung an.

Die Untersuchung der 3 soeben geschilderten Stadien lässt uns nur über einen Punkt im Unklaren: Wie entsteht der Wimperstreifen der neuen Cytostomknospe? Ich vermuthe, dass er sich vom Wimperstreifen des alten Cytostoms abspaltet und dass die mediane Einstellung des letzteren nur den Zweck hat, diese Abspaltung vorzubereiten. Durch genaues Prüfen zahlreicher Paramaecien, deren Körpergrösse das Bevorstehen einer Theilung wahrscheinlich machte, habe ich auch einige Bilder gewonnen, welche zu Gunsten meiner Vermuthung sprachen; ich habe Cytostome beobachtet, bei denen der Wimperstreifen auf der rechten Seite schwache Einkerbungen nahe dem hinteren und dem vorderen Ende zeigte; indessen halte ich selbst die Bilder nicht für beweisend. Wir nähern uns hier den Grenzen dessen, was beobachtet werden kann; wir müssen ferner an die Möglichkeit denken, dass solche Einkerbungen zufällige Bildungen sind; zu Vorsicht im Urtheilen werde ich ferner durch

den Umstand bestimmt, dass ich an den Nebenkernen keine auf Theilung hindeutenden Veränderungen habe wahrnehmen können.

Für die vorgerückteren Stadien habe ich dagegen ein durchaus zuverlässiges und umfangreiches Beobachtungsmaterial.

Zunächst die Veränderungen des Cytostoms! Die Mundöffnung selbst ergiebt wechselnde Bilder, bald ein einheitliches Oval bald mehr eine Achterfigur; letztere bereitet eine Sonderung vor, wie sie in Figur 8 dargestellt ist, in welcher die kleinere Oeffnung, welche für das neue Cytostom bestimmt ist, eben noch mit der alten Mundöffnung in Verbindung steht, eine Verbindung, welche später, z. B. in Figur 2 gelöst ist.

Der Wimperstreifen (Fig. 6—8) der Vestibularknospe wächst, indem er aus seiner gekrümmten Gestalt heraus sich mehr und mehr streckt. Sein Aussehen wechselt daher, wobei aber zu beachten ist, dass auch die verschiedene Lagerung des Thiers, ob es dem Beobachter mehr seine ventrale oder laterale Seite zuwendet, dazu beiträgt, das Bild der Cytostomanlage zu verändern.

Je grösser der neue Wimperstreif wird, um so mehr entfernt er sich vom Wimperstreifen des Muttercytostoms; zunächst weichen die oberen Enden aus einander, später auch die unteren. Das Auseinanderweichen erfolgt dabei in der Weise, dass die neue Cytostomanlage nicht nur nach rechts, sondern gleichzeitig auch nach rückwärts von ihrem Ausgangspunkt wandert; so dass sehr bald ihr vorderes Ende auf gleiche Höhe mit der Mitte des Muttercytostoms zu liegen kommt, ihr hinteres Ende dagegen das hintere Ende des letzteren überragt.

Bis zu diesem Zeitpunkt haben beide Cytostome noch einen gemeinsamen Hohlraum. Derselbe ist anfänglich weit und wird begrenzt von den beiden Wimperstreifen und den dünnwandigen Partieen des Vestibulums, welche zwischen den Enden der Wimperstreifen ausgespannt sind. Indem die verbindenden Wände einander entgegen wachsen und den zwischen ihnen gelegenen Hohlraum sanduhrförmig einschnüren, wird dieser in 2 Räume zerlegt, von denen der eine dem Vestibulum des alten, der andere dem Vestibulum des neuen Cytostoms angehört. Die Art, wie die dünnwandigen Partieen zur Begrenzung herangezogen werden, bringt es ferner mit sich, dass die schmale Verbindung zwischen den Cytostomen

nahe dem vorderen Ende des neuen Cytostoms beginnt und hinter der Mitte des alten endigt.

Während der Zeit, in welche die beschriebenen Neubildungen fallen, erfährt der Hauptkern keine Veränderungen, welche man mit der Theilung des Paramaecium in directen Zusammenhang bringen könnte. In Fig. 1 Taf. IV z. B. ist er noch dreilappig, wie er auch zu Anfang der Conjugation (Fig. 1 Taf. I) sein kann. Gleichwohl glaube ich nicht, dass er gänzlich unbetheiligt den die Theilung einleitenden Vorgängen gegenüber steht. Dass er im allgemeinen eine mehr concentrirte, rundliche Gestalt angenommen hat und seine Oberfläche mannichfaltiger als sonst — auch mannichfaltiger als es die Figuren 6 und 8 zeigen — in Spitzen und Riffe erhoben ist, deutet auf Verlagerungen im Innern hin, welche die Theilung vorbereiten.

Dagegen haben wir für die Nebenkerne erhebliche Umwandlungen nachzutragen, deren zeitliches Zusammenfallen mit den Cytostomveränderungen aus der Tafel erhellt, indem in die Figuren 6 und 8 zu den Cytostomen die zugehörigen Nebenkerne eingezeichnet sind.

Bei der Theilung sind lange Zeit über die Spindeln ganz auffallend klein; die neugebildete Spindel hat eine Länge von 0.007 und eine Breite von 0.003$^{mm}$, während bei der Conjugation die Maasse auf dem entsprechenden Stadium 0.016 und 0.005$^{mm}$ betragen. Dies sowie der Umstand, dass sehr wenig Chromatin vorhanden ist, erschwert die Untersuchung. So habe ich auf frühen Spindelstadien das Chromatin gar nicht wahrgenommen, wahrscheinlich weil es in feinen Körnchen zu diffus zwischen den vollkommen entwickelten Spindelfasern vertheilt ist. Auf späteren Stadien ist eine deutliche Aequatorialplatte vorhanden. Bei der Spaltung derselben treten dieselben Unregelmässigkeiten sowie die Schlängelungen der Spindelfasern ein, auf welche ich schon bei den Copulationsspindeln hingewiesen habe; sie sind in Figur 8 zu sehen; die eine der betreffenden Spindeln zeigt auch, wie die Seitenplatten fast bis an die Enden der Spindeln auseinanderrücken.

Jetzt erfolgt die Dreitheilung der Spindel in ein mittleres bauchiges Stück und 2 köpfchenartige Anschwellungen; bei einem Thier habe ich gesehen, dass die Faserung durch alle 3 Abschnitte reichte und dass in den Köpfchen deutliche Seitenplatten lagen; da dies aber wahrscheinlich

ein rasch vorübergehendes Stadium ist, trifft man viel häufiger auf Kerne, deren Enden halb körnige, halb streifige Körper mit undeutlicher Chromatinvertheilung sind, während das Mittelstück von wenigen achromatischen Fäden oder nur einem einzigen solchen durchsetzt ist.

Wir haben jetzt einen Zeitpunkt der Entwicklung erreicht, von dem ab die Theilung nicht nur am Cytostom und den Nebenkernen, sondern auch an der Körperoberfläche und an dem Hauptkern zum Ausdruck kommt.

In Figur 2 ist der Hauptkern zum ersten Male etwas nach dem vorderen Ende des Thieres in die Länge gestreckt und hat eine glatte Oberflächencontour angenommen. Bei anderen Thieren gleichen Stadiums ist die Streckung noch bedeutender, während die lappige Beschaffenheit der Oberfläche des Kerns noch nicht so vollkommen ausgeglichen ist. Stets liegt der Kern von beiden Enden ungefähr gleichweit entfernt und in dem dorsalen, von der Cytostomgegend abgewandten Abschnitt des Thieres. Die Cytostome haben sich von einander abgeschnürt und sind auseinander gerückt; das neugebildete hintere liegt von der Medianebene des Thieres noch etwas nach rechts, eine nothwendige Folge seiner Entstehung; bis auf den mangelnden Oesophagus gleicht es dem vorderen alten. Die Nebenkerne sind gestreckt und verschmächtigt und bestehen aus 5 Theilen, indem das Mittelstück sich spindelig ausgezogen und in feine an die Endköpfchen herantretende Verbindungsfäden verlängert hat. Die Nebenkerne können noch eine gekreuzte Stellung einnehmen wie in Figur 2, sind aber häufig schon zu der Hauptaxe des Paramaecium mehr oder minder vollständig parallel angeordnet. Endlich sieht man den Anfang der Theilfurche als eine kleine Kerbe auf der ventralen, vom Hauptkern abgewandten Seite.

Ueber den weiteren Verlauf der Theilung kann ich mich kurz fassen. Die Cytostome rücken auseinander und stellen sich beide in die ventrale Mittellinie des Paramaecium ein, wobei das hintere durch Ausbildung des Oesophagus sich vervollständigt. Zwischen beiden schneidet die Theilfurche, die sich ringsum ausgebreitet hat, von allen Seiten gleichmässig vordringend durch. Der Hauptkern nimmt Stabform an; anfänglich ist er in der Gegend der Theilfurche am dicksten, später schwellen die Enden keulenförmig an und verjüngt sich die mittlere

Partie allmählig zu einem dünnen Fädchen, welches durchreisst, einige Zeit bevor die Theilfurche den Thierkörper durchschnitten hat.

Während der Theilung ist der Hauptkern sehr feinkörnig, niemals aber längs gefasert, wie er bei anderen Infusorien sein kann. Nur einmal habe ich auf einem frühen Stadium der Kernstreckung wahrgenommen, dass die Körnchen der chromatischen Substanz eine regelmässige Anordnung in Längs- und Querreihen angenommen hatten und so den Eindruck von undeutlicher Längsstreifung hervorriefen. (Taf. IV Fig. 11.)

Noch früher als am Hauptkern, vollzieht sich an den Nebenkernen die Theilung. Dieselben erfahren aber zuvor ein bedeutendes Wachsthum. Zunächst schwillt das spindelige Mittelstück an, indem es von Neuem eine feinstreifige Beschaffenheit annimmt. In der Streifung fallen am meisten die Randcontouren und ein in der Mitte verlaufender Strang auf, welche beide scheinbar an den Spindelspitzen zusammenfliessen und den Verbindungsfaden herstellen, der sich in die Endköpfchen der Kernfigur verbreitert. Wie das geschieht, lehrt besser als jede Beschreibung die Figur 9a.

Durch starke Vergrösserung der Verbindungsfäden wachsen die Theilfiguren der Nebenkerne zu bedeutender Länge heran; die Endköpfchen werden durch Sonderung ihrer chromatischen und achromatischen Bestandtheile zu homogenen farblosen Körpern, in welchen ein chromatischer Nucleolus lagert.

Die damit fertiggestellten Nebenkerne rücken in die Enden der beiden Theilsprösslinge und werden durch Verschwinden der Verbindungsstücke vollkommen selbständig. Ob hierbei die Substanz der Verbindungsstücke vom Protoplasma resorbirt oder auf die beiden Nebenkerne vertheilt wird, habe ich nicht durch Beobachtung entscheiden können. Ersteres hat mehr Wahrscheinlichkeit für sich, da die Nebenkerne nach der Trennung nicht grösser sind als die Endköpfchen der Kerntheilungsfigur vor der Trennung.

In Figur 3 liegen die Kerntheilungsfiguren dicht nebeneinander; ebenso häufig kommt es aber vor, dass sie getrennt sind und die eine mehr dem vorderen, die andere mehr dem hinteren Thiere angehört. Aber auch dann lässt sich stets feststellen, dass die Enden eines Kernes in verschiedenen Thieren enthalten sind.

Aus der Darstellung, welche ich von der Theilung der Paramaecien

gegeben habe, ist ersichtlich, dass dieselbe mit Veränderungen der Nebenkerne und des Cytostoms beginnt, zu denen erst spät Einschnürung der Körperoberfläche und Streckung und Theilung des Hauptkerns hinzutreten. Erstere Erscheinungen kommen daher auch früher zum Abschluss als letztere. Ob die Veränderungen sich zuerst an den Nebenkernen oder am Cytostom äussern, habe ich zwar nicht mit aller Bestimmtheit feststellen können, indessen spricht die grössere Wahrscheinlichkeit zunächst zu Gunsten der Nebenkerne und so halte ich es für sehr wahrscheinlich, dass diese den Anstoss zur Theilung geben, welcher sich zunächst auf das Protoplasma und die von demselben abhängigen Theile überträgt, dass der Hauptkern erst später in Mitleidenschaft gezogen wird und somit eine mehr passive Rolle spielt.

Die Theilung der Nebenkerne ist wesentlich von der Spindeltheilung bei der Conjugation verschieden, gleicht aber in der Entwicklung der dort fehlenden mittleren Spindelanschwellung der Theilung der Nebenkernelemente nach aufgehobener Conjugation.

Das Cytostom des Mutterthiers bleibt erhalten und geht in das Cytostom des vorderen Sprösslings über; das hintere Cytostom ist keine Neubildung, sondern ein Abkömmling des Muttercytostoms; indem es sich von diesem wie eine Knospe abschnürt, erhält die Theilung des Paramaecium einige Aehnlichkeit mit Knospungsprocessen.

Literatur. Seit den classischen Untersuchungen Trembley's ist der Theilungsprocess der Infusorien so häufig beschrieben worden, dass ich unmöglich hier auf alle einschlägigen Literaturangaben eingehen kann. Dies ist auch nicht nöthig, da rücksichtlich der meisten Fragen zwischen den Forschern grosse Uebereinstimmung herrscht.

Sämmtliche Beobachter lehren, dass das Cytostom des vorderen Thieres vom Mutterthier übernommen, das Cytostom für das hintere Thier dagegen neu gebildet werde. Speciell wurde eine solche Neubildung für die Paramaecien behauptet, so noch von Bütschli in seinen neuesten Publicationen (6; p. 1566). Nur Balbiani, welcher anfänglich auch diese Lehre vertreten hatte (1; p. 81), sprach später (3; 1881 p. 322) ohne sich auf Beobachtungen zu stützen die Vermuthung aus, dass das hintere Cytostom sich vielleicht im Anschluss an das vordere präexistirende entwickele.

Für eine derartige Vermuthung war schon ein fester Anhaltspunkt gegeben durch meine Untersuchungen über die Knospung von Spirochona gemmipara (12; p. 162), welche später von Plate (26; p. 200) bestätigt worden sind. Ich zeigte, dass die Peristomanlage der Knospe als Ausstülpung vom Peristom der Mutter angelegt, aber ziemlich früh abgeschnürt werde. Wenn ich die damals gegebenen Abbildungen überblicke, so ergiebt sich mir eine principielle Uebereinstimmung in den Vorgängen zwischen Paramaecium und Spirochona, die so weit geht, dass auch der Ort der Ausstülpung an der Grenze von Oesophagus und Peristommulde liegt und zwar, wie die Abbildungen späterer Stadien äusserst wahrscheinlich machen, nach rechts von der Uebergangsstelle.

Für mich unterliegt es überhaupt keinem Zweifel, dass bei allen Infusorien das hintere Cytostom während der Theilung als eine Ausstülpung des vorderen entsteht. In den Arbeiten, welche über die Fortpflanzung namentlich von heterotrichen Infusorien handeln, findet man vielfach Abbildungen, welche zeigen, dass das hintere Cytostom zunächst kleiner ist als das vordere und wie bei Paramaecium an dessen hinterem Ende und auf seiner rechten Seite liegt, um erst später sich nach rückwärts in die Medianebene einzustellen. Solche Abbildungen haben ferner Sterki (30; Taf. IV Fig. 9) für Stylonychia Mytilus, Nussbaum (24; Taf. XXI, Fig. 1, 2) für St. histrio gegeben. Sie erklären sich aus meinen Beobachtungen bei Paramaecium, wo ja die gleichen Verlagerungen vorkommen. Ferner erklärt sich aus ihnen die Angabe Schuberg's (29; p. 409), dass das neue Peristom bei Entodinium bursa sich innerlich anlege; wahrscheinlich verliert hier die Peristomknospe ähnlich wie bei Spirochona während der Abschnürung die Beziehung zur Körperoberfläche.

Die faserige Differenzirung der Nebenkerne bei der Theilung wurde zuerst von Balbiani (1; p. 81) beobachtet und später vielfach von anderen Forschern bestätigt. Eine ausführliche Darstellung des Processes wurde aber bisher noch nicht geliefert; denn die Schilderung, welche Bütschli von Theilungen der Nebenkerne giebt, bezieht sich, wie er selbst mittheilt, auf die Vorgänge bei der Conjugation. Was Balbiani (3; 1881 p. 327) darüber sagt, ist unvollständig und stark schematisirt, wie der Leser aus der hier abgedruckten Schilderung entnehmen kann. „Les quatre nucléoles (von Stylonychia mytilus) augmentent de volume et

prennent un aspect strié; ils deviennent pâles et se dérobent à l'observation sur le vivant. Il faut pour les voire employer des réactifs et particulièrement l'acide acétique. Bientôt chacun s'allonge, se divise en deux moitiés, qui restent réunies par leur membrane d'enveloppe; il en résulte huit corps réunis d'abord par paires par l'intermédiaire de la membrane. Puis la membrane qui rélie chaque paire, continue à s'allonger et entraine les articles postérieures au delà de la constriction médiane du corps de l'Infusoire, les plaçant ainsi dans la moitié postérieure etc. Quand ces nouveaux corps se sont distribués, ils restent encore unis pendant un certain temps par la membrane d'enveloppe étirée en une sorte de filament. Mais bientôt celle-ci se résorbe et les nucléoles deviennent complètement indépendants."

Was von anderen Beobachtern gesehen worden ist, bezieht sich fast auschliesslich auf vorgerückte Theilstadien, nur Nussbaum (24; p. 506 und 507) hat bei Stylonychia histrio und Gastrostyla vorax frühe Zustände beobachtet.

Für die Theilung des Hauptkerns wurde nach Vorgang Bütschli's eine gleichmässige faserige Differenzirung der Kernsubstanz von vielen Seiten beschrieben. Bei Paramaecium aurelia wurde dieselbe anfänglich von Bütschli (5; p. 282) vermisst, später aber (6; p. 1529) auf Grund neuerer Untersuchungen angenommen.

Vielfach ist die Frage erörtert worden, von welcher Seite der Anstoss zur Theilung ausgeht, ob vom Protoplasma oder den Kernen. Bütschli (6; p. 1564) fasst die herrschende Auffassungsweise dahin zusammen, „dass die Anzeichen der Theilung zuerst am plasmatischen Leib hervortreten", „dass in vielen Fällen unzweifelhafte Neubildungen am Plasma (Anlage neuer Wimpergebilde, eines Mundes und contractiler Vacuolen) auftreten bevor am Macronucleus und den Micronuclei Veränderungen bemerkt werden."

Ich selbst habe mich bei Gelegenheit meiner Untersuchungen über Spirochona gemmipara (12; p. 183) unentschieden ausgesprochen, zugleich aber darauf aufmerksam gemacht, dass bei der Streitfrage nicht nur der Zustand des Hauptkerns — wie man es bis dahin gethan hatte — sondern auch die sehr früh beginnenden Umwandlungen der Nebenkerne in Berücksichtigung gezogen werden müssten. Ich hatte die Nebenkerne

in Spindelform schon bei Thieren gefunden, bei welchen eben erst die Ausstülpung zur Peristomanlage erfolgt war. Noch bevor die Anlage sich abgeschnürt hatte, waren schon die Spindelenden zu Köpfchen angeschwollen; die Theilung der Nebenkerne endlich muss erfolgen, kurz bevor oder zur Zeit wo die Peristomanlage selbständig wird.

Etwas später als ich ist auch Nussbaum (p. 506) darauf aufmerksam geworden, wie frühzeitig die Nebenkerne Anstalten zur Theilung treffen. Er erwägt die Möglichkeit, „dass vielleicht in den Nebenkernen die ersten sichtbaren Zeichen der beginnenden Theilung gefunden werden,“ freilich nachdem er einige Seiten vorher sich mit Entschiedenheit dafür erklärt hat, dass dem Zellplasma die active Rolle bei der Zelltheilung zuzusprechen sei.

Die Beobachtungen Nussbaum's und meine eigenen Erfahrungen an Spirochona und Paramaecium beweisen, dass der oben citirte Satz Bütschli's, wonach die Veränderungen des Nebenkerns später als die Veränderungen des Plasmaleibs eintreten sollen, unrichtig ist; er konnte nur aufgestellt werden, so lange als man die frühesten Stadien der Theilung gar nicht kannte.

## V. Bemerkungen zur Conjugation der Infusorien.

Die vorstehenden Untersuchungen haben zu dem Resultat geführt, dass die Conjugation der Infusorien ein geschlechtlicher Vorgang ist, welcher zu einer wechselseitigen Befruchtung beider Paarlinge führt. Wir haben gesehen, dass die Nebenkerne sich wiederholt theilen, dass von den Theilproducten die meisten zu Grunde gehen, eine Spindel dagegen, die Hauptspindel, erhalten bleibt, welche durch weitere Theilung 2 Kerne liefert. Der eine dieser Kerne bleibt in dem Thier, in welchem er entstanden war, zurück, der andere Kern wandert in den anliegenden Paarling über; er wird, da gleiche Processe auch in dem zweiten Thier ablaufen, gegen einen gleichwerthigen Kern ausgetauscht. So haben wir nach ihrem Schicksal die Theilproducte der Hauptspindel zu unterscheiden und haben sie in Hinsicht hierauf auch im speciellen Theil schon mit besonderen Namen als stationären Kern und Wanderkern bezeichnet. In

ihrem weiteren Schicksal erinnern beide an die Geschlechtskerne der Metazoen. Wie der Eikern sich mit einem von aussen eingedrungenen, einer andern Zelle entstammenden Spermakern vereinigt, so vereinigt sich der stationäre Kern mit dem von einem anderen Thiere gelieferten Wanderkern. Ei- und Spermakern erzeugen einen in einheitlichem Rhythmus sich weiter theilenden Kern, den Furchungskern; in analoger Weise treten die beiden Infusorienkerne zum Theilkern zusammen. An letzterem kann man eine Erscheinung, welche auch für den Furchungskern vieler Metazoen festgestellt worden ist, wahrnehmen, sogar noch schöner als wie bei diesem, dass nämlich die Substanzen beider Kerne und zwar nicht nur das Chromatin, sondern auch die achromatischen Spindelfasern eine Zeit lang unabhängig neben einander fortgeführt werden.

Es frägt sich, ob man diesen Uebereinstimmungen nicht bei der Nomenclatur Rechnung tragen sollte. — Die Namen „Eikern“ und „Spermakern“ sind von vornherein ausgeschlossen, da sie die Begriffe Ei und Spermatozoon voraussetzen, welche bei kritischer Anwendung nur für vielzellige Organismen passen. Aber man könnte an die Bezeichnungen „weiblicher Kern“ und „männlicher Kern“ oder an die von v. Beneden eingeführte und von zahlreichen Forschern angenommene Bezeichnungsweise „Pronucléus mâle“ und „Pronucléus femel,“ „männlicher und weiblicher Vorkern“ denken.

Diese Ausdrücke basiren auf einer Auffassungweise der Befruchtung, welche durch v. Beneden eine bestimmte Fassung erhalten hat. Ein Vorkern, oder wie er auch genannt wird, ein Halbkern ist ein Gebilde, welches nicht alle Eigenschaften eines gewöhnlichen Zellkerns in sich vereinigt, welches in Folge bestimmter Entwicklungsvorgänge einen Defect erlitten hat und somit unvollständig geworden ist; so würde der weibliche Vorkern nur die besonderen Eigenschaften, welche man die weiblichen nennen könnte, besitzen, der männliche Vorkern umgekehrt nur die specifisch männlichen Qualitäten; erst die Vereinigung beider liefert einen completen, d. h. einen männlich-weiblichen oder hermaphroditen Kern. Consequente Verfolgung dieses Ideengangs führt zu dem Resultat, dass die Kerne der Geschlechtsproducte Träger der geschlechtlichen Differenzirung sind.

Wie ich schon in der Einleitung zu dieser Untersuchung hervorgehoben habe, theile ich die hier kurz skizzirte Auffassungsweise nicht; für die Metazoen habe ich dieselbe bei einer früheren Gelegenheit schon bekämpft und ihr gegenüber die Ansicht ausgesprochen, welche auch von Weismann, Nussbaum, Kölliker, Hatschek, meinem Bruder u. A. vertreten wird, dass Ursachen von minder fundamentaler Bedeutung zur geschlechtlichen Differenzirung geführt haben. Zwischen den gesammten Geschlechtszellen, dagegen nicht zwischen ihren Kernen, ist eine Arbeitstheilung eingetreten der Art, dass die einen, die Spermatozoen, bedeutende Beweglichkeit bei geringer Körpergrösse entwickelten, die anderen, die Eier, sich mit reichem Nährmaterial versahen und unbeweglich wurden.

Wir haben nun an der Hand der Beobachtung zu prüfen, in welcher Weise sich bei den Infusorien die geschlechtliche Entwicklung vollzogen hat, und ob man überhaupt ein Recht hat, von einer geschlechtlichen Differenzirung zu sprechen. Maupas, welchem das Verdienst zukommt die Lehre von der Befruchtung der Infusorien zuerst auf eine sichere Beobachtungsbasis gestellt zu haben, hat den Satz vertheidigt, dass der Nebenkern oder der Micronucleus das wesentliche Organ der Geschlechtsthätigkeit der Infusorien sei; er sei ein hermaphroditer sexueller Apparat, welcher durch Theilung einen männlichen und einen weiblichen Vorkern liefere (20; p. 356); dagegen soll er keine Rolle bei den vegetativen Erscheinungen, bei Theilung und Ernährung, spielen (21; p. 259 u. f.).

Von diesen Sätzen ist nach meiner Ansicht nur der erste unanfechtbar; dagegen bestreite ich, 1. dass der Nebenkern ausschliesslich Fortpflanzungskern ist und auf die Theilung keinen Einfluss habe; 2. dass die Begriffe „männlich“ und „weiblich“ und der damit zusammenhängende Begriff „Hermaphroditismus“ auf die Mehrzahl der Infusorien schon anwendbar sind.

Wie ich gezeigt habe, treten die ersten Veränderungen, welche die beginnende Theilung ankündigen, am Nebenkern und an dem Cytostom auf, am ersteren wahrscheinlich früher als am letzteren. Ich habe daher die Vermuthung geäussert, dass der Anstoss zur Theilung geradezu vom Nebenkern ausgehe, dass das Protoplasma erst von ihm angeregt werde. Ich will diesen Punkt hier nicht zu sehr betonen und auch nicht die Frage

erörtern, ob im Allgemeinen bei der Zelltheilung dem Kern oder dem Protoplasma der Vorrang zukomme. Jedenfalls steht aber fest, dass bei allen Theilungsprocessen in thierischen und pflanzlichen Geweben frühzeitig Veränderungen des Kerns und des übrigen Zellkörpers in einander greifen und dass bei den Vermehrungen der Infusorien ein ähnliches Wechselverhältniss zwischen Körper und Nebenkern besteht.

In die Zeit, in welcher das ursprünglich vorhandene Cytostom durch Ausstülpung die Anlage zu einem zweiten liefert, fällt die Umwandlung des Nebenkerns zur Spindel (Taf. IV Fig. 1 u. 4—6) und die Ausbildung der Aequatorialplatte. Während die Aequatorialplatte sich in die Seitenplatten spaltet (Fig. 6—8), schnürt sich die Cytostomanlage ab; während die Kernenden auseinander weichen, entfernen sich auch die beiden Cytostome von einander und beginnt die Theilfurche, den Körper des Thiers einzuschnüren; wie bei der Zelltheilung endlich geht dem Durchschneiden der Theilfurche die Theilung der Kerne wesentlich voraus (Fig. 2, 3, 9—11).

Einen gleichen Parallelismus kann man für die Veränderungen des Hauptkerns nicht erweisen. Dieser beginnt sich erst zu strecken, wenn die Cytostome seit langem getrennt sind und auch die Theilfurche schon gebildet ist. Seine Theilung erfolgt so spät, dass man fast annehmen möchte, sie werde durch die vordringende Einschnürung der Körperoberfläche herbeigeführt, wie etwa auch irgend ein anderes Organ durchschnürt werden würde; mit anderen Worten, der Hauptkern zeigt einen Modus der Theilung, den man für den Nebenkern erwarten müsste, wenn dieser thatsächlich nur ein Geschlechtsapparat sein sollte. Wenn man daher bei den Infusorien nach einem Theil sucht, welcher die Rolle des Zellkerns bei der Theilung spielt, so kann das nur der Nebenkern sein.

Schwierigkeiten erheben sich bei dieser Auffassung nur aus der Angabe Maupas', dass degenerirte Stylonychien sich auch nach Verlust der Nebenkerne theilen; ich möchte aber hier zur Vorsicht in der Benutzung derartiger Beobachtungen rathen. So sehr ich auch Maupas als einen ausgezeichneten Beobachter schätze, so halte ich es doch für möglich, dass er Nebenkerne, welche in Folge der Degeneration des Gesammtthiers hochgradig verändert waren und vielleicht ihr Chromatin eingebüsst hatten, übersehen habe. (21; p. 208.) Ich habe bei degenerirten Paramaecien oft Stunden lang nach den Nebenkernen suchen müssen und

auch dann manchmal nur einen gefunden, ohne desshalb an der Existenz des zweiten Nebenkerns zu zweifeln.

Wir kommen zur zweiten Frage: Kann man bei Paramaecium und überhaupt bei allen Infusorien mit partieller Conjugation die Ausdrücke Hermaphroditismus, männlich und weiblich schon anwenden?

Zwischen den copuliernden Thieren sind keine Unterschiede vorhanden, welche die Bezeichnungweise rechtfertigen würden; ihre Gleichwerthigkeit drückt sich schon darin aus, dass eine gekreuzte Befruchtung stattfindet. Unterschiede, welche als sexuelle Differenzirung gedeutet werden können, beginnen erst bei den Peritrichen und hier fast ausnahmslos bei den zumeist Colonie bildenden, festsitzenden oder doch wenig beweglichen Formen (Vorticellinen und Trichodinen). Analog den Metazoen kommt es hier zur Unterscheidung von plasmareichen, schwer oder wenigstens minder beweglichen Macrogonidien und plasmaarmen ausserordentlich lebendigen Microgonidien; gleichzeitig tritt an die Stelle der partiellen Conjugation, welche eine ausschliessliche Kernbefruchtung ist, die totale Conjugation, die vollkommene Verschmelzung der Thiere. So entwickelt sich bei den Infusorien aus einer geschlechtlichen Entwicklung ohne Differenzirung der Geschlechter eine geschlechtliche Entwicklung mit Unterscheidung männlicher und weiblicher Befruchtungskörper. Der Fortschritt erfolgt unter sehr ähnlichen äusseren Bedingungen, wie wir sie bei den Metazoen ganz allgemein finden, unter Bedingungen, welche die Vereinigung der Befruchtungskörper erschweren. Die Bedeutung dieser Wahrnehmung wird erhöht durch den Umstand, dass die Befruchtungskörper in beiden Fällen völlig verschiedene morphologische Bedeutung haben, bei den Infusorien ganze Thiere sind, bei den Metazoen Theile von Thieren, dass in beiden Gruppen daher die geschlechtliche Fortpflanzung selbständig erworben sein muss. Wir haben hier gleichsam ein von der Natur angestelltes Experiment vor uns, welches lehrt, dass unter gewissen äusseren Einflüssen die geschlechtliche Fortpflanzung zum Dimorphismus der Geschlechter führt.

Wir haben daher Veranlassung, diese äusseren Verhältnisse für die geschlechtliche Differenzirung ausschliesslich verantwortlieh zu machen, wenn nicht der Nachweis gelingt, dass ausserdem noch Momente von tiefgreifender Bedeutung wirksam gewesen sind.

Ich halte es nun bei den Infusorien noch weniger als bei den Metazoen für möglich, die Ursachen des Geschlechts in den Kernen zu finden, weil diese bei der Beobachtung keinerlei Unterschiede erkennen lassen. Stationärer Kern und Wanderkern sind Theilproducte eines und desselben Mutterkerns; während aller Entwicklungsphasen haben sie dieselbe Structur; aus der Theilung hervorgegangen sind sie zunächst schwach körnige, fast homogene farblose Körper mit eingestreuten Chromatinkörnchen, ungefähr gleichzeitig werden sie zu Spindeln mit Aequatorialplatte, ja sie können schon die Spaltung der Aequatorialplatte in die Seitenplatten erfahren haben (Taf. IV. Fig. 27), ehe ein Austausch der Wanderkerne und damit der einer Befruchtung vergleichbare Act sich vollzieht. Keinem der Kerne wird bei diesem etwas zugefügt, was er nicht schon vorher hatte; selbst die Fähigkeit zur Theilung hat ein jeder unabhängig für sich, wie die Bildung der Seitenplatten lehrt. (Taf. IV Fig. 26.) Bei den meisten Infusorien copuliren weder sexuell differenzirte Kerne, noch auch Kerne sexuell differenzirter Thiere, sondern gleichwerthige Kerne, welche in gleichwerthigen, aber getrennt und unabhängig von einander entwickelten Thieren entstanden sind. Damit fehlt aber die Basis für die Begriffe männlich und weiblich, vollends aber für den Begriff Hermaphroditismus.

Wir haben bei unseren Erörterungen den Hauptkern bisher ganz unberücksichtigt gelassen. In Folge der Copulation wird derselbe rückgebildet und ohne irgend ein morphologisches Element zu hinterlassen, aufgelöst. Die Rückbildung kann nicht, wie es vielfach geschehen ist, ohne Weiteres als Zerfall aufgefasst werden, denn sie erfolgt in einer den Degenerationserscheinungen nicht zukommenden gesetzmässigen Weise. Der Hauptkern wächst in 3 Fortsätze aus, welche sich an den Enden verästeln; ferner scheint er an Masse zuzunehmen, ehe er in kleine, der Resorption anheimfallende Stücke zerlegt wird. Der Zweck dieser complicirten Vorgänge kann unmöglich allein die Entfernung des alten Hauptkerns sein, sondern es müssen sich damit noch weitere Aufgaben verbinden, die sich zwar noch nicht genauer fassen lassen, die man aber im Allgemeinen dahin bestimmen kann, dass eine Umwandlung des Protoplasma herbeigeführt werden soll.

Wie dem auch sei, jedenfalls kann als feststehend angesehen werden, dass der Hauptkern an den Befruchtungsvorgängen selbst keinen unmittelbaren Antheil hat, zumal da seine Veränderungen bei den meisten Infusorien, z. B. bei Paramaecium caudatum erst nach Beendigung der Befruchtung beginnen. An seiner Natur als Zellkern kann aber bei seiner gesammten Structur nicht gezweifelt werden; zur Sicherstellung dieser Auffassung hätte es nicht einmal des zuerst von Bütschli erbrachten und stark betonten Nachweises bedurft, dass er durch Theilung von einem unzweifelhaften Zellkern, dem Nebenkern, abstammt. Auch kann der Hauptkern nicht als ein rudimentärer Zellkern angesehen werden, da er bei jeder Copulation aus kleinen Anfängen zu einer Grösse, wie sie rudimentären Organen nicht zukommt, heranwächst. Er muss somit wichtige Functionen des Kerns erfüllen, welche der Nebenkern dem Infusor nicht leistet.

Von den Functionen des Kerns im Allgemeinen kennen wir nun sicher die Rolle, welche er bei Befruchtung und Theilung spielt; ausserdem ist es durch zahlreiche Untersuchungen fast zur Gewissheit erhoben, dass der Kern auch die übrigen Lebensäusserungen der Zelle beherrscht, dass Bewegung, Assimilation, Wachsthum, histoplastische und secretorische Thätigkeit, mit kurzen Worten die gesammten Stoffwechselprocesse der Zelle unter seinem Einfluss erfolgen. Da nun der Nebenkern zweifellos ein Geschlechtskern ist und höchst wahrscheinlich auch bei der Theilung von Wichtigkeit ist, so können nur die Stoffwechselprocesse dem Einfluss des Hauptkerns unterliegen. Demnach wäre der Dualismus der Kerne bei den Infusorien, wie schon Bütschli und Gruber vermutheten, aus einer Arbeitstheilung zu erklären, welche zur Bildung eines Geschlechtskerns (Nebenkern) und eines Stoffwechselkerns (Hauptkern) geführt hat. Eine solche Erklärungsweise findet auch schon ihre Stütze in den Maassen, welche beide Kerne während der verschiedenen Lebensperioden eines Infusors ergeben. Zur Zeit der gewöhnlichen Lebensprocesse tritt der Hauptkern durch seine bedeutende Grösse in den Vordergrund, während der Nebenkern ausserordentlich klein ist; zur Zeit der Conjugation erfährt umgekehrt letzterer eine bedeutende Zunahme, und beginnt der Hauptkern sich rückzubilden.

Das Auftreten von zwei functionell verschiedenen Kernen in einer

einzigen Zelle kann auf zweierlei Weise erklärt werden, entweder durch Loslösung bestimmter Kerntheile vom vorhandenen Kern oder durch einen Theilungsprocess, welcher unvollständig geworden ist und zu einer Trennung der Kerne, aber nicht der Zellleiber geführt hat. Für letztere Annahme hat sich Bütschli ausgesprochen und zwar mit vollem Recht. Denn thatsächlich bilden sich im Laufe der Conjugation je eine Nebenkernanlage und eine Hauptkernanlage aus der Theilung einer gemeinsamen Spindel. Ausserdem ist es mir geglückt noch weitere Hinweise zu finden, dass der Infusorienkörper gleichsam zweien Thieren entspricht, die anstatt sich zu trennen einheitlich geblieben sind. Solche Hinweise erblicke ich in der überraschenden Aehnlichkeit, welche die Reorganisationsvorgänge der Paramaecien und wahrscheinlich aller Infusorien nach Ablauf der Conjugation mit Theilungsprocessen besitzen. Da ich früher schon darauf aufmerksam gemacht habe, kann ich mich kurz fassen. Erstens verlaufen die Theilungen der Spindeln, welche die bleibenden Nebenkerne und Hauptkerne liefern, genau so wie die Theilungen der Nebenkerne während der Vermehrung der Paramaecien, sie unterscheiden sich aber von den in die Zeit der Paarung fallenden Theilungen der Nebenkerne. Zweitens entsteht das bleibende Cytostom durch Knospung von dem ursprünglich vorhandenen Cytostom, und liefert dabei Bilder, welche mit den Bildern bei der Theilung vollständig übereinstimmen würden, wenn nicht eines der beiden Cytostome, das vordere, rückgebildet würde. Die Reorganisation eines aus der Conjugation hervorgegangenen Paramaecium lässt sich somit als eine Theilung betrachten, bei welcher sich keinerlei Theilfurche entwickelt, bei welcher nur das Cytostom des hintern Thiers erhalten bleibt und die Theilproducte der Nebenkerne in zweierlei Kernformen sich differenziren.

Es ist möglich, dass sich für diese Auffassungsweise weitere Beweise finden lassen; wichtig würde es sein, wenn sich eine bestimmte Lagerung der Nebenkernenden ergeben sollte, wenn bei allen Infusorien die vorderen Enden — die Kerne des Theilproducts, dessen Cytostom verloren geht — die Hauptkernanlagen (oder eventuell die bleibenden Nebenkerne) liefern würden. Bei Paramaecium Aurelia lässt sich ein derartiger Entscheid schwer durch Beobachtung erzielen, vielleicht sind aber andere Infusorien hierzu geeigneter.

Wir haben das Auftreten von zweierlei Kernen bei den Infusorien durch die Deutung derselben als Geschlechts- und Stoffwechselkerne zu erklären versucht und damit innerhalb einer einzigen Zelle eine analoge Differenzirung angenommen, wie sie bei den Metazoen zwischen vielen Zellen besteht. Nussbaum und Weismann haben zuerst in genauerer Weise durchgeführt, dass man im Körper jedes vielzelligen Thieres zwischen somatischen und Fortpflanzungszellen unterscheiden muss. Erstere unterhalten die für das Leben der Einzelthiere nothwendigen Stoffwechselvorgänge, letzteren ist die Erhaltung der Art zugefallen. Die somatischen Zellen haben eine beschränkte Lebensdauer; ihre Existenz beginnt, indem sie sich später oder früher durch morphologische und histologische Differenzirung von dem zunächst indifferenten Zellmaterial des in Furchung begriffenen Eies absondern, und hört mit dem Tode des Individuums auf. Der normale aus eigenen inneren Ursachen erfolgende Tod des Einzelthiers beruht auf dem Tod seiner functionirenden Zellen. Umgekehrt sind die Geschlechtszellen unsterblich; sie haben die Energie zu unbegrenztem Leben, wenn ihnen nicht durch die Ungunst äusserer Existenzbedingungen ein Ziel gesetzt wird. Wenn wir uns die Organismenwelt unabhängig von ihrer Anordnung in Individuen als eine Summe durch Theilung sich vermehrender Zellen vorstellen, so bilden die Geschlechtszellen Ketten von Elementarorganismen, welche in ununterbrochener Reihenfolge vom Anfang des Lebens an sich durch Theilung vermehrt haben und noch vermehren; die somatischen Zellen bilden dagegen Verbände, welche nach einer begrenzten Zahl von Theilungen stets zu Grunde gehen.

So ist es nun auch mit den beiden Kernen eines Infusors. Die Nebenkerne vermehren sich bei jeder Theilung und jeder Conjugationsperiode, ohne Anzeichen einer herabgesetzten Lebensenergie zu geben, sie sind unsterblich im Sinne Weismann's; die Hauptkerne dagegen haben eine beschränkte Dauer, indem sie sich nur von einer Conjugationsperiode zur anderen erhalten.

Die Parallele, welche wir zwischen den zwei Kernarten eines Infusors und den zwei Zellenarten eines vielzelligen Thieres gezogen haben, ermöglicht uns weitere Uebereinstimmungen in den Befruchtungserscheinungen aufzufinden.

In dem Leben der Eikeime — wahrscheinlich wird man später einmal sagen können aller Geschlechtszellen — kann man 3 Perioden unterscheiden, 1. die Periode der Vermehrung der Eizellen im Ovar, 2. die Periode der Eireife, 3. die zumeist durch eine Befruchtung eingeleitete Periode der embryonalen und postembryonalen Entwicklung. Der ersten und zweiten Periode gemeinsam ist die Bildung von Zellkörpern, welche zu weiterem Leben und aufsteigender Entwicklung bestimmt sind. Dagegen sind beide Perioden von einander durch den Charakter der Theilproducte unterschieden. In der ersten Periode sind die Theilproducte gleichwerthig, aus Theilung von Geschlechtszellen entstehen stets auf's Neue Geschlechtszellen; in der dritten Periode dagegen sind die Theilproducte ungleichwerthig, indem das befruchtete Ei die Fähigkeit besitzt, bei der Furchung sowohl wiederum Geschlechtszellen als auch somatische Zellen zu liefern. Da auch parthenogenetische Eier mit dieser Fähigkeit ausgerüstet sind, so ist der veränderte Charakter des Eies nicht aus der Befruchtung zu erklären, sondern aus den inzwischen eingetretenen Reifungsprocessen, unter denen vor Allem die Bildung der Richtungskörper obenan steht.

Mutatis mutandis kann man das Gesagte auch auf die Nebenkerne der Infusorien anwenden. Dieselben haben wie die Geschlechtszellen der Metazoen eine Zeit der Vervielfältigung, in welcher ein Nebenkern durch fortgesetzte Theilung immer nur Gebilde seines Gleichen liefert. Das ist die Zeit der sogenannten vegetativen Vermehrung des Infusors. Durch die Conjugation gewinnen sie vorübergehend die Fähigkeit, somatische Kerne oder Hauptkerne und Geschlechtskerne oder Nebenkerne zu erzeugen, ähnlich einem in Embryonalentwicklung begriffenen Ei. In allen bekannten und ebenso in allen von mir beschriebenen Fällen war dieser heteroplastischen Entwicklung stets eine Befruchtung vorausgegangen; ich werde aber in einem späteren Aufsatz zeigen, dass die Befruchtung nicht nothwendig ist und dass auch bei den Infusorien eine Art Parthenogenesis vorkommen kann, bei welcher gleiche Entwicklungserscheinungen ohne Befruchtung ermöglicht werden. Die Veränderung in der Beschaffenheit der Nebenkerne kann daher nur durch die der Befruchtung vorausgegangenen Vorgänge herbeigeführt worden sein, Vorgänge, welche wir unter dem Namen „geschlechtliche Reifung der Infusorien“ zusammenfassen

wollen. Wie der Kern der Eizelle zum Keimbläschen heranwächst, so vergrössert sich, obwohl nicht so bedeutend, der Nebenkern der Infusorien vor der Conjugation. Beide wandeln sich dann in Spindeln um, welche sich wiederholt theilen. Die aus dem Keimbläschen entwickelte Richtungsspindel liefert durch zweimalige Theilung 4 Kerne, meist unter gleichzeitiger Theilung des Zellkörpers in das bleibende Ei und die Richtungskörper. Von den 4 Abkömmlingen gehen 3, die Kerne der Richtungskörper, früher oder später zu Grunde und nur der vierte, der Eikern, bleibt erhalten.

Bei den Infusorien theilt sich die Nebenkernspindel ebenfalls zweimal, so dass 4 Spindeln entstehen, von denen 3, die Nebenspindeln, degeneriren, eine nur, die Hauptspindel, sich weiter entwickelt, um sich in die 2 Geschlechtskerne zu theilen. Die Aehnlichkeit mit der Richtungskörperbildung wurde schon von Maupas, welcher die eigenthümlichen regressiven Metamorphosen der Nebenspindeln entdeckte, richtig gewürdigt; sie liegt so sehr auf der Hand, dass man unzweifelhaft eine physiologische Gleichwerthigkeit annehmen muss; dieselbe besteht darin, dass Geschlechtskerne um aus dem Zustand der vegetativen Vermehrung in die geschlechtliche Thätigkeit übertreten zu können, Veränderungen erleiden müssen, welche durch Theilungsprocesse vermittelt werden. Welcher Natur nun diese Veränderungen sind, bedarf noch der weiteren Prüfung; denn die von Weismann versuchte Erklärung, dass die ersten Reifeprocesse die Entfernung des histogenen Keimplasma's bezweckten, halte ich auf Grund der Befunde bei Infusorien für vollkommen ausgeschlossen.

Eine andere Frage ist es nun, ob es möglich ist, auch eine morphologische Gleichwerthigkeit durchzuführen und die Spindeldegenerationen der Infusorien und die Richtungskörperbildung der Metazoen auf einen gemeinsamen ursprünglichen Vorgang zurückzuführen. Hier ergeben sich sofort Schwierigkeiten in den Zahlenverhältnissen. Dass bei Paramaecium Aurelia 2 Nebenkerne von Anfang an vorhanden sind, kommt dabei nicht in Betracht, indem diese Verdoppelung eine nicht vielen Infusorien zukommende Eigenthümlichkeit ist. Aber auch wenn wir den gar nicht zur Verwendung kommenden Nebenkern und seine Descendenz unberücksichtigt lassen, bleibt immer noch die Schwierigkeit bestehen, dass beim Ei von 4 Kernen einer zum Eikern wird, bei den Infusorien

dagegen der 4. Kern sich noch einmal theilen muss, ehe der dem Eikern physiologisch vergleichbare stationäre Kern entsteht. Unter diesen Verhältnissen will es mir wahrscheinlicher erscheinen, dass die Reifungsprocesse der Infusorien und diejenigen der Eier der Metazoen unabhängig von einander entstanden sind und ihre Aehnlichkeit nur gleichartigen physiologischen Bedingungen verdanken. Wir gelangen so zu demselben Resultat, zu dem uns schon die Vergleichung der Befruchtungsprocesse geführt hat. Die Fähigkeit, die geschlechtliche Fortpflanzungsweise auszubilden, ist wohl allen Organismen gemeinsam. Dass aber diese Fähigkeit zur Geltung gelangt, hängt von Ursachen ab, welche weit verbreitet sind und daher unabhängig bei sehr vielen Organismen die Sexualität hervorgerufen haben. — —

Je mehr Fälle bekannt werden, in denen die Befruchtung einen besonderen Charakter besitzt, um so mehr wachsen die Aussichten, über das Wesen der geschlechtlichen Fortpflanzung, ihre Bedeutung für die Organismen und die Ursachen ihrer Entstehung genaueren Aufschluss zu erhalten. Mir scheinen nun die Infusorien bestimmt, für die Lösung der genannten Fragen eine hervorragende Rolle zu spielen, da sie sich auf der einen Seite an die einfachsten Fälle geschlechtlicher Fortpflanzung bei einzelligen Thieren und Pflanzen anschliessen, auf der anderen Seite schon an die complicirten Vorgänge höherer Organismen erinnern. Bei einzelligen Thieren und Pflanzen vereinigen sich ganze Organismen, so wie sie sind, ohne besondere Einrichtungen; die Zellkörper und die Kerne, welche die Lebensprocesse erfüllen, dienen auch den Zwecken der geschlechtlichen Fortpflanzung; ein Ruhezustand der Organisation ist zwar auch hier vorhanden, er geht aber nicht der Befruchtung voraus, sondern ist eine Folge derselben. Conjugirende Noctilucen schliessen ihr Cytostom; befruchtete Oosporen der Volvocinen fallen zu Boden, verfärben sich und bilden Dauersporen, welche erst nach langer Ruhe zu neuem Leben erwachen.

Die Infusorien zeigen nun den niederen Zuständen gegenüber den bedeutenden Fortschritt, welcher auch allen vielzelligen Thieren und den meisten vielzelligen Pflanzen zukommt, dass ein bestimmter Theil des Körpers von den gewöhnlichen Functionen ausgeschlossen wird und der Geschlechtsthätigkeit vorbehalten bleibt.

Aus dieser Thatsache kann man entnehmen, dass die Einrichtung besonderer Organe der Sexualität keine Folge der Vielzelligkeit ist, sondern mit den Aufgaben der geschlechtlichen Fortpflanzung unmittelbar zusammenhängt. Da nun Eizellen und Geschlechtskerne im Gegensatz zu anderen Theilen des thierischen Körpers vornehmlich ruhende, auf ein Minimum der Function beschränkte Körper sind, da Ruhepausen des Lebens auch schon bei den niedersten Formen der geschlechtlichen Fortpflanzung vorkommen, so erblicke ich in der Beschränkung der Lebensthätigkeit ein Moment, welches die Aufgaben der geschlechtlichen Fortpflanzung unterstützt oder vielleicht das Gleiche wie diese zu leisten befähigt ist.

In meiner Auffassungsweise werde ich durch das Vorkommen der Parthenogenesis bestärkt. Dieselbe lehrt, dass die Befruchtung ausbleiben kann und trotzdem ein gleiches Resultat wie bei der typischen geschlechtlichen Entwicklung erreicht wird. Bei der Parthenogenesis bleibt aber von der geschlechtlichen Entwicklung nur das Eine übrig, dass ihr Ausgangspunkt von Zellen gebildet wird, welche eine lange Zeit über in einem Zustand der Ruhe verharrt haben.

Somit komme ich zu dem Resultat, dass das Problem der geschlechtlichen Fortpflanzung ein doppeltes ist: 1. warum ist es nothwendig, dass von Zeit zu Zeit die Idioplasmen, d. h. die Substanzen, welche für die Beschaffenheit der Organismen maassgebend sind, eine Vermischung mit Idioplasmen anderer Abstammung erfahren? 2. warum dienen hierbei Theile, welche dauernd oder vorübergehend vom Antheil an den Functionen des Körpers ausgeschlossen waren? In spezieller Anwendung auf die Infusorien lautet diese Frage: warum sind für die Conjugation der Infusorien besondere Nebenkerne nöthig und warum werden bei der Conjugation Theile derselben ausgetauscht?

Bütschli hat den Zweck der Conjugation in eine Verjüngung des Organismus verlegt und damit einen ganz richtigen Ausdruck für die Erscheinungen während der Conjugation eingeführt. Denn thatsächlich sehen wir ja einen wichtigen Theil der alten Organisation zu Grunde gehen und an seine Stelle neu gebildete junge Theile treten. Bütschli hat nun selbst herausgefühlt, dass das Wort Verjüngung nur eine Um-

schreibung der Thatsachen liefert, und daher das Bedürfniss empfunden sich darüber auszusprechen, warum es zu einer Verjüngung kommen müsse. Nach seiner Ansicht sollen nun die Infusorien copuliren, wenn bei ihnen die Fähigkeit zur Theilung erloschen oder im Niedergang begriffen ist; aus der Copulation sollen sie dagegen mit einer gesteigerten Theilfähigkeit hervorgehen. „Von dem Gedanken ausgehend, dass in dem Kern der Zelle ein Stoff angenommen, resp. vorausgesetzt werden dürfe, an dessen Vorhandensein die Lebenserscheinungen gebunden seien, knüpft er hieran die weitere Vermuthung, dass dieser Stoff im Laufe des Lebens und der Fortpflanzung der Gewebszellen der Heteroplastiden allmählig verbraucht werde, wogegen die Einzelligen das Vermögen besässen, den Stoff zu regeneriren. Bei den Ciliaten sammele sich der neugebildete Stoff im Micronucleus. Nur die Geschlechtszellen der Metazoen und besonders die Kerne der Spermatozoen hätten das Vermögen bewahrt, ihn zu erzeugen. Bei der Befruchtung werde er daher dem Eikern zugeführt, bei der Conjugation trete dagegen der Micronucleus theilweise oder ganz an die Stelle des Macronucleus, welcher das Regenerationsvermögen für den fraglichen Stoff nicht besitze."

Die Voraussetzungen dieser Lehre hat schon Maupas bekämpft und durch ausgedehnte Culturversuche den Beweis geführt, dass die Theilfähigkeit eines Infusors weder vor der Copulation herabgesetzt, noch nach derselben erhöht sei. Trotz der Entgegnungen Bütschli's und trotzdem ein so erfahrener Forscher wie Balbiani auf Bütschli's Seite getreten ist, muss ich Maupas vollkommen Recht geben. Mir ist umgekehrt aufgefallen, dass kurz vor der Conjugation die Theilungen ganz besonders energisch sind. Um Theilungsmaterial für meine Untersuchungen zu erhalten, habe ich dasselbe immer Culturen entnommen, bei welchen das Auftreten der ersten Copulae eine herannahende Conjugationsperiode verkündete. Mir scheint es eher wahrscheinlich, dass gesteigerte Vermehrung der Infusorien zu einer Copulationsperiode führt.

Um hierüber volle Sicherheit zu erhalten, müsste man genaue Zahlenangaben gewinnen, wozu ich bis jetzt noch keine Zeit gehabt habe; dafür habe ich aber ein sehr einfaches Experiment angestellt, welches sicher beweist, dass die conjugationslustigen Infusorien eine völlig intakte, wie

ich glaube sogar gesteigerte Theilfähigkeit besitzen, dass somit das Gegentheil von dem, was Bütschli und Balbiani annehmen, zutrifft. Ich habe Paramaecien, welche zu zweien herumschwammen, isolirt und einzeln für sich cultivirt; um noch grössere Sicherheit zu erreichen, habe ich Copulae in den ersten Stunden der Vereinigung gesprengt und die Paarlinge ebenfalls einzeln unter günstigen Ernährungsbedingungen in hohlen Objectträgern gezüchtet. Einige der Zuchten habe ich verwandt, um etwaige Veränderungen während der ersten 24 Stunden feststellen zu können, habe aber nichts Bemerkenswerthes an ihnen beobachtet, andere wiederum habe ich Wochen und Monate lang erhalten. Eine nicht einmal mit besonderer Sorgfalt geführte Cultur dauerte über 3 Monate, vom Ende des März bis über den Anfang Juli hinaus. Zum Vergleich züchtete ich mehrere gleichzeitig entstandene Copulae unter vollkommen übereinstimmenden Existenzbedingungen.

Als erstes Resultat ergab sich mir eine auffallende Fruchtbarkeit der an der Conjugation verhinderten Thiere; obwohl ich meine Versuche noch nicht abgeschlossen habe, so möchte ich doch jetzt schon hervorheben, dass die künstlich getrennten Thiere lange Zeit über sich energischer theilten als Paramaecien, welche die Conjugation durchgemacht hatten. Erstere ergaben in den ersten 5 Tagen nahezu doppelt soviel Individuen als letztere, selbst wenn man für die Conjugationspärchen den Zeitraum, welcher für Reconstruction der Kerne nöthig war, in Abzug bringt und mit der Zeit der ersten Theilungen in beiden Versuchsreihen die Rechnung beginnt.

Ein zweites Resultat war das Ausbleiben erneuter Conjugationsperioden unter den reichlich vermehrten Abkömmlingen eines und desselben Mutterthiers; auch kam es zu keinen Conjugationen, als ich Thiere von verschiedenerlei Zuchten mischte, sogar von Zuchten, deren Mutterthiere früher in Copula gestanden hatten. Nur einmal beobachtete ich eine Ausnahme von dieser Regel, indem 4 Copulae in einer Cultur auftraten. Ich trennte auch diese von Neuem und fand bei den isolirt gezogenen Paarlingen nach wie vor unveränderte Theilfähigkeit.

Diese Wahrnehmung steht in merkwürdigem Widerspruch mit den Ergebnissen Maupas'. Derselbe theilt mit, dass wenn er eine Copula isolirte und ihre Descendenten lange Zeit weiter in Inzucht cultivirte,

eine „sexuelle Hyperästhesie“ eintrat, welche zu lebhaften aber unfruchtbaren Conjugationen führte. In der vorliegenden Kürze erlauben diese Mittheilungen keine Beurtheilung; immerhin muss man in Erwägung ziehen, dass die Bedingungen, unter denen Maupas experimentirte, andere waren, als bei meinen Versuchen, dass auch vielleicht die verschiedenen Infusorienarten, unter abnorme Verhältnisse gebracht, sich nicht gleich verhalten.

Am meisten aber wurde ich überrascht durch ein drittes Resultat meiner Experimente. Um dem übermässigen Anwachsen der Zahl der Paramaecien entgegenzuwirken, tödtete ich von Zeit zu Zeit grössere Quantitäten ab und benutzte sie zugleich zur Untersuchung. Da manche der Thiere Veränderungen im Bau, wie sie im Laufe der Conjugation auftreten, Placenta, Nebenkernanlagen, Bruchstücke des alten Hauptkerns zeigten, kam ich auf die Vermuthung, es möchten hier die Veränderungen des Nebenkerns ohne Befruchtung auf parthenogenetischem Weg entstanden sein und prüfte von nun an sowohl die alten, wie zahlreiche neu angelegte Culturen täglich am Morgen und am Abend, also in Zwischenräumen, welche wesentlich geringer waren als die normale Dauer der Conjugation. Obwohl mit Ausnahme der wenigen oben angeführten Fälle keine Copulae zu finden waren, konnte ich auf's Neue intensive Veränderungen an den Kernen wahrnehmen, und zwar Veränderungen von zweierlei Art, von denen die einen mehrere Wochen nach Anfang des Versuchs begannen und einige Tage den anderen vorauszugehen schienen. Die zuerst eintretenden Veränderungen besitzen kein Analogon in den Vorgängen einer normalen Entwickelung. Wahrscheinlich zerfällt der Hauptkern erst in grössere, dann in kleinere Stücke, ohne das regelmässige Auswachsen in Fortsätze, welches im Lauf der geschlechtlichen Entwicklung der Paramaecien eintritt. Ich fand bald 2, bald 4 Nebenkerne entweder in Form der ruhenden Kerne oder häufiger in Form von Spindeln, wie ich sie ebenfalls sonst nicht beobachtet habe. Gleichzeitig stiess ich auf Thiere in unvollkommener Theilung. Eines derselben war schon tief eingeschnürt, hatte aber noch zwei zusammenhängende Cytostome; die eine Hälfte des Theilstadium enthielt allein den unveränderten Hauptkern und 4 Nebenkernspindeln, die andere Hälfte war rein protoplasmatisch. Ich vermuthe daher, dass Störungen im Theilungsmechanismus

nicht nur derartige monströse Formen, sondern auch jene Thiere mit eigenthümlich abgeändertem Kernapparat erzeugen.

Ich glaube ferner, dass eine Restitutio in integrum die besprochenen Kernmetamorphosen abschliesst, dass dann aber die Reihe der zweiten Veränderungen beginnt, welche mit Sicherheit als Parthenogenesis gedeutet werden können. In einer Cultur, in welcher weder beim Abtödten der zur Untersuchung entnommenen Probe, noch vorher, noch nachher Copulae beobachtet wurden, war fast die Hälfte der Paramaecien umgewandelt: Thiere mit vergrösserten Nebenkernen, mit Sichelkernen, mit 2, 4 und 8 Spindeln, Thiere, bei denen die Theilung in die Haupt- und Nebenkernanlagen vollzogen war. Den Veränderungen der Nebenkerne waren stets die Veränderungen des Hauptkerns conform.

Aehnliches hatte ich schon früher bei Paramaecien, welche in einem meiner grösseren Zuchtgläser sich zu erheblicher Menge vermehrt hatten, gesehen. Das betreffende Material enthielt aber ausserdem normale Copulae und kam erst zur Untersuchung, nachdem die Thiere abgetödtet, gefärbt und in Nelkenöl übertragen waren. Ich hatte dem merkwürdigen Vorkommniss keine Bedeutung beigemessen, weil ich annahm, es sei bei dem vielfachen Wechsel der Reagentien ein Theil der Copulae gesprengt worden. Wenn ich nun aber in Erwägung ziehe, wie schwer es fällt, conjugirte Thiere während des Lebens und nach der Conservirung zu trennen, so will es mir wahrscheinlicher dünken, dass auch in der Natur unter gewissen Bedingungen die Paramaecien ohne Conjugation Veränderungen, welche der Conjugation eigenthümlich sind, durchlaufen und somit sich parthenogenetisch entwickeln. Solche Bedingungen könnten z. B. dadurch geliefert werden, dass Paramaecien, welche von wenigen Anfangsformen aus sich rasch vermehrt haben, durch häufige Wiederholung der Conjugation einander zu ähnlich geworden sind. In der That hatte mir das betreffende Paramaecienmaterial wiederholt schon zur Beobachtung der Conjugation gedient.

Was ich hier mitgetheilt habe, ist ein kurzer Abriss von den Resultaten einer Untersuchungsreihe, welche ich leider noch nicht habe zum Abschluss bringen können, da die Materialbeschaffung mit aussergewöhnlichen Schwierigkeiten zu kämpfen hat. So habe ich noch nicht entscheiden können, in welcher Weise die primäre Theilspindel entsteht, ob

zuvor eine Theilung in die beiden Geschlechtskerne stattgefunden hat oder nicht; ferner würde es von Wichtigkeit sein zu erfahren, ob die Weiterentwicklung der Paramaecien verschieden ausfällt, je nachdem die Copulae auf früheren oder späteren Stadien getrennt werden; endlich habe ich noch keine genügende Sicherheit darüber, ob die Veränderungen, welche ich mit gestörter Theilung in Zusammenhang gebracht habe, den parthenogenetischen Veränderungen stets vorausgehen müssen. Ich hoffe diese Fragen noch im Lauf des Winters zur Entscheidung zu bringen.

Für das, was ich beweisen möchte, genügen die Resultate in ihrer jetzigen aphoristischen Form; sie zeigen, dass fortgesetzte Theilungen im Infusor eine Neigung zur Conjugation veranlassen, dass aber bei künstlicher Verhinderung der Vereinigung die Theilungen in lebhaftester Weise fortgesetzt werden, bis ein Moment eintritt, in welchem ohne Conjugation ein Ersatz des Hauptkerns durch Abkömmlinge des Nebenkerns eintritt. Eine derartige Selbsthilfe des Organismus scheint sich mehrfach wiederholen zu können, ehe die Lebensfähigkeit der Paramaecien eine so intensive Schädigung erfährt, dass die Culturen aussterben.

Wer die Conjugation der Infusorien erklären will, muss dem Gesagten zufolge mit 2 Erscheinungen rechnen: 1. fortgesetzte Theilungen ohne Conjugation führen zum Untergang; 2. trotzdem besitzt das Infusor zur Zeit der Conjugation unverminderte oder sogar erhöhte Theilfähigkeit. Wenn wir Bütschli's Theorie zu Grunde legen, stehen beide Sätze mit einander im Widerspruche; sie sind aber sofort in Einklang zu bringen, wenn wir annehmen, dass zur Zeit, wo die Conjugation eintritt, nicht eine herabgesetzte, sondern eine übermässig erhöhte Lebensenergie besteht. Dann hat die Conjugation nicht den Zweck, die Lebensenergie noch weiter zu steigern, sondern die gesteigerte Lebensthätigkeit so zu reguliren, dass sie nicht zur Zerstörung des Organismus führt; sie heilt nicht die durch physiologische Usur entstandenen Defecte, sondern verhindert, dass derartige Defecte durch Uebermass der Function entstehen. Hiermit stimmt auch der Charakter der Geschlechtskerne überein. Die Annahme, dass sie ganz besonders die Fähigkeit haben, die Lebenssubstanz zu regeneriren, ist schwer vereinbar mit der Thatsache, dass sie diese Substanz weder verbrauchen, noch im Ueberschuss besitzen. Dagegen ist es nur ein Ausdruck für allbekannte Erscheinungen, wenn man sagt,

dass die Kräfte des Lebens in den Geschlechtszellen sich im gebundenen Zustand befinden.

Das von mir aufgestellte Erklärungsprincip macht aber nicht nur verständlich, warum es bei den Infusorien zur Bildung der Geschlechtskerne kommt, sondern auch wesshalb eine Befruchtung d. h. eine Vereinigung von Geschlechtskernen verschiedenen Ursprungs stattfindet. Denn es ist klar, dass ein dem Organismus eingefügtes fremdartiges, von einem anderen Organismus stammendes Element einen hemmenden und damit auch wieder regulirenden Einfluss auf die Lebensthätigkeiten ausüben muss und dass dieser Einfluss am günstigsten wirken wird, wenn der Unterschied zwischen den bei der Befruchtung betheiligten Thieren weder zu gross noch zu gering ist. Letzteres ist der Fall bei Abkömmlingen eines und desselben Mutterorganismus, wesshalb diese auf die Conjugation, welche nicht wirksamer ist als Parthenogenese, verzichten.

Wenn man Bildung der Geschlechtskerne und Conjugation derselben auf ein gemeinsames ursächliches Princip zurückführt, so erklärt sich, wesshalb beide Erscheinungen für einander vicariiren können, wesshalb es geschlechtliche Fortpflanzungen ohne Geschlechtszellen und andererseits Fortpflanzungen mit Geschlechtszellen, aber ohne Befruchtung giebt.

Da ich voraussichtlich bald Veranlassung haben werde, auf die angeregten Fragen noch einmal zurückzukommen, begnüge ich mich mit den vorstehenden kurzen Erörterungen; ebenso verschiebe ich bis dahin die Besprechung der interessanten Resultate, welche Maupas über Degenerationserscheinungen von Infusorien veröffentlicht hat. Ich hoffe, dass fortgesetzte experimentelle Arbeiten über die Bedingungen der Conjugation, wie sie von dem französischen Forscher und mir begonnen worden sind, bald ebenso zu einer Uebereinstimmung in der theoretischen Auffassung des Vorgangs führen werden, wie sie in der Feststellung des Thatbestandes schon erzielt worden ist.

---

**I. Tabelle.**

Maasse gewöhnlicher Paramaecien.

| 1. Körper | 2. Hauptkern | 3. Nebenkern mit Nucleolus |
|---|---|---|
| 0,0875 : 0,044 | 0,025 : 0,015 | 0,006/0,002 |
| 0,10 : 0,037 | 0,037 : 0,012 | 0,004/0,002 |
| 0,10 : 0,042 | 0,032 : 0,012 | 0,006/0,002 |
| 0,10 : 0,044 | 0,025 : 0,020 | 0,005 |
| 0,106 : 0,031 | 0,027 : 0,020 | 0,006/0,002 |
| 0,106 : 0,040 | 0,037 : 0,016 | 0,006/0,0037 |
| 0,106 : 0,041 | 0,031 : 0,018 | 0,007/0,002 |
| 0,106 : 0,042 | 0,031 : 0,017 | 0,006/0,0037 |
| 0,11 : 0,027 | 0,035 : 0,016 | 0,0056/0,0018 |
| 0,11 : 0,040 | 0,035 : 0,017 | 0,0075/0,0018 |
| 0,112 : 0,037 | 0,031 : 0,016 | 0,006/0,0037 |
| 0,112 : 0,037 | 0,036 : 0,016 | 0,005/0,002 |
| 0,112 : 0,040 | 0,025 : 0,018 | 0,006/0,002 |
| 0,112 : 0,041 | 0,031 : 0,016 | 0,0044/0,002 |
| 0,112 : 0,042 | 0,026 : 0,017 | 0,0056 |
| 0,112 : 0,044 | 0,027 : 0,016 | 0,0056/0,002 |
| 0,119 : 0,045 | 0,031 : 0,019 | 0,005/0,002 |
| 0,119 : 0,050 | 0,037 : 0,018 | 0,005/0,002 |
| 0,125 : 0,037 | 0,037 : 0,017 | 0,005/0,0018 |
| 0,125 : 0,047 | 0,037 : 0,016 | 0,006 |
| 0,125 : 0,05 | 0,044 : 0,019 | 0,0036/0,002 |
| 0,131 : 0,05 | 0,040 : 0,018 | 0,0036/0,0018 |
| 0,137 : 0,05 | 0,044 : 0,016 | 0,005/0,0018 |
| 0,144 : 0,047 | 0,037 : 0,016 | 0,005/0,0018 |
| 0,156 : 0,047 | 0,050 : 0,012 | 0,005/0,002 |

**II. Tabelle.**

Paramaecien aus Theilung hervorgegangen.

| Körper | Hauptkern | Nebenkern mit Nucleolus |
|---|---|---|
| {0,067 : 0,043 | noch nicht | 0,003/0,0015 |
| 0,070 : 0,045} | getheilt | 0,003/0,0015 |
| {0,067 : 0,045 | 0,030 : 0,012 | 0,003/0,0015 |
| 0,072 : 0,042} | 0,034 : 0,01 | 0,003/0,0015 |
| {0,070 : 0,049 | 0,037 : 0,013 | 0,002/0,0015 |
| 0,072 : 0,046} | 0,037 : 0,013 | 0,002/0,0015 |
| 0,075 : 0,044 | 0,041 : 0,012 | 0,0036/0,0018 |
| {0,075 : 0,045 | 0,037 : 0,009 | 0,002/0,0015 |
| 0,075 : 0,045} | 0,037 : 0,012 | 0,002/0,0015 |
| {0,082 : 0,045 | 0,037 : 0,012 | 0,003/0,0015 |
| 0,09 : 0,045} | 0,037 : 0,013 | 0,003/0,0015 |

**III. Tabelle.**

Paramaecien nach Ablauf der Conjugation.

| Körper | Placenten | Nebenkern mit Nucleolus |
|---|---|---|
| 0,094 : 0,044 | 0,007 | 0,005 |
| 0,100 : 0,044 | 0,0056 | 0,0044 |
| 0,102 : 0,035 | 0,006 | 0,0044 |
| 0,106 : 0,035 | 0,0075 | 0,0044/0,0018 |
| 0,106 : 0,047 | 0,006 | 0,0044/0,0018 |
| 0,112 : 0,044 | 0,0056 | 0,0044/0,0018 |
| 0,119 : 0,044 | 0,006 | 0,0044 |
| 0,122 : 0,050 | 0,010 | 0,0044/0,0018 |
| 0,125 : 0,044 | 0,006 | 0,005/0,0018 |
| 0,125 : 0,044 | 0,010 | 0,005 |
| 0,125 : 0,047 | 0,0087 | 0,005/0,0018 |
| 0,131 : 0,044 | 0,012 | 0,005 |
| 0,131 : 0,050 | 0,011 | 0,0044 |
| 0,134 : 0,050 | 0,0075 | 0,005 |
| 0,137 : 0,050 | 0,0087 | 0,0044/0,0018 |
| 0,144 : 0,050 | 0,018 | 0,005/0,0018 |
| 0,144 : 0,050 | 0,018 | 0,0036 |
| 0,144 : 0,056 | 0,010 | 0,006 |
| 0,144 : 0,050 | 0,011 | 0,0044 |
| 0,150 : 0,044 | 0,016 | 0,005/0,0018 |
| 0,150 : 0,050 | 0,011 | 0,005/0,001 |
| 0,156 : 0,056 | 0,019 | 0,005 |
| 0,162 : 0,062 | 0,027 | 0,005 |
| 0,169 : 0,062 | 4 à 0,0015 | 4 à 0,0036 |

**IV. Tabelle.**

Paramaecien, welche zur Conjugation schreiten.

| Körper | Hauptkern | Nebenkern mit Nucleolus |
|---|---|---|
| {0,094 : 0,035 | 0,027 : 0,012 | 0,009 |
| 0,106 : 0,035} | 0,027 : 0,019 | 0,009 |
| {0,095 : 0,037 | 0,035 : 0,012 | 0,009 |
| 0,100 : 0,035} | 0,025 : 0,017 | 0,006 |
| {0,100 : 0,025 | 0,031 : 0,015 | 0,006/0,002 |
| 0,112 : 0,035} | 0,025 : 0,018 | 0,006/0,002 |
| {0,106 : 0,037 | 0,025 : 0,017 | 0,006/0,0018 |
| 0,118 : 0,037} | 0,031 : 0,015 | 0,006/0,0018 |
| {0,119 : 0,044 | 0,031 : 0,015 | 0,006 |
| 0,131 : 0,050} | 0,047 : 0,018 | 0,005 |

**V. Tabelle.**

Copulae auf dem Sichelkernstadium;
Maasse der Thiere.

| | | |
|---|---|---|
| {0,104 : 0,035 | {0,100 : 0,031 | {0,110 : 0,035 |
| 0,112 : 0,040} | 0,112 : 0,037} | 0,131 : 0,044} |
| {0,106 : 0,032 | {0,112 : 0,037 | |
| 0,112 : 0,040} | 0,112 : 0,037} | |
| {0,106 : 0,040 | {0,112 : 0,040 | |
| 0,119 : 0,044} | 0,112 : 0,044} | |

Aus den Tabellen I, II und IV ist ersichtlich, dass im Grossen und Ganzen eine Proportionalität zwischen Grösse des Thiers und Grösse seines Hauptkerns nachgewiesen werden kann (cf. p. 160).

# Literaturverzeichniss.

1. Balbiani. Du rôle des organes générateurs dans la division spontanée des infusoires ciliés. Journal de la physiologie. T. III. 1860. p. 71—87.
2. — Recherches sur les phénomènes sexuelles des infusoires. Journal de la physiologie. T. IV. p. 102—130, 194—220, 431—448 und 465—520. 1861.
3. — Les protozoaires. Leçons faites au collège de France. Journal de Micrographie. 1881 und 1882.
4. Bütschli. Einiges über Infusorien. Archiv f. mikroskop. Anat. Bd. IX. p. 657 bis 678.
5. — Studien über die ersten Entwicklungsvorgänge der Eizelle, die Zelltheilung und die Conjugation der Infusorien. Abhandl. der Senckenberg. naturf. Gesellsch. Bd. X. p. 213—432.
6. — Protozoa in Bronn, Classen und Ordnungen des Thierreichs. II. Aufl. Bd. I.
7. Engelmann Th. W. Ueber Entwicklung und Fortpflanzung der Infusorien. Morpholog. Jahrbuch Bd. I. p. 573—635.
8. Fabre Domergue. Recherches anatomiques et physiologiques sur les Infusoires ciliés. Annales des sciences natur. Zool. Ser. VII. T. V. p. 5.
9. Gruber A. Beobachtungen an Chilodon curvidentis nov. sp. Festschrift der 56. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte. Freiburg 1883.
10. — Der Conjugationsprocess bei Paramaecium Aurelia. Berichte der naturforsch. Gesellsch. zu Freiburg. Bd. II. 1886. p. 7—24.
11. — Sexuelle Fortpflanzung und Conjugation. Humboldt. Bd. VII. p. 3.
12. Hertwig R. Ueber den Bau und die Entwicklung von Spirochona gemmipara. Jenaische Zeitschrift f. Naturw. Bd. XI. p. 149—187.
13. Jickeli C. F. Ueber die Kernverhältnisse der Infusorien. Zoolog. Anzeiger. VII. Jahrg. p. 468—473 u. p. 491—497.
14. Korschelt E. Ueber die geschlechtliche Fortpflanzung der Einzelligen und besonders der Infusorien. Kosmos. Jahrg. 1886. II. p. 438—452.
15. Maupas E. Contributions à l'étude morphologique et anatomique des infusoires ciliés. Archives de zool. expérim. et génér. II. Ser. T. I. p. 427—664.

16. Maupas E. Sur la conjugaison des Infusoires ciliés. Comptes rendus. T. 102. 1886. p. 1569—1572.
17. — Sur la conjugaison des Paramécies. Ebenda. T. 103. 1886. p. 482—484.
18. — Sur la puissance de multiplication des Infusoires ciliés. Comptes rendus. T. 104. 1887. p. 1006—1008.
19. — Sur la conjugaison des Ciliés. Comptes rendus. T. 105. 1887. p. 175.
20. — Théorie de la sexualité des infusoires ciliés. Ebenda. T. 105. 1887. p. 356.
21. — Recherches expérimentales sur la multiplication des infusoires ciliés. Archives de zool. expér. et génér. II. Sér. Vol. VI. p. 165—277.
22. — Sur la conjugaison du Paramaecium bursaria. Ebenda. T. 105. p. 955—957.
23. — Sur la conjugaison des Vorticellides. Comptes rendus. T. 106. 1888. p. 1607 bis 1610.
24. Nussbaum. Ueber die Theilbarkeit der lebendigen Materie. I. Mittheilung. Die spontane und künstliche Theilung der Infusorien. Archiv f. mikroskop. Anat. Bd. XXVI. p. 485—539.
25. Pfitzner Wilh. Zur Kenntniss der Kerntheilung bei den Protozoen. Morpholog. Jahrb. Bd. XI. p. 454—467.
26. Plate L. Untersuchungen einiger an den Kiemenblättern des Gammarus pulex lebender Ectoparasiten. Zeitschrift für wissenschaftl. Zoologie. Bd. 43. 1886. p. 175—214.
27. — Ueber die Conjugation der Infusorien. Sitzungsberichte der Gesellsch. f. Morphol. u. Physiol. zu München 1886. p. 35—38.
28. — Studien über Protozoen. Zoologische Jahrbücher. Bd. III. p. 135—200.
29. Schuberg. Die Protozoen des Wiederkäuermagens. Zoologische Jahrbücher Abth. f. Syst. Bd. III. p. 365—418.
30. Sterki. Beiträge zur Morphologie der Oxytrichinen. Zeitschr. f. wissensch. Zool. Bd. XXXI p. 29—59.

# Tafelerklärung.

Die Figuren auf Tafel I, II und III sowie Tafel IV Figur 1—3 wurden bei Zeiss $^1/_{18}$ Oc. I oder II gezeichnet und auf eine gemeinsame Grösse reducirt; ich habe daher den meisten Figuren noch die absoluten Maasse in mm in der Figurenerklärung beigefügt; dabei bedeutet a den Thierkörper, b den Hauptkern, c den Nebenkern oder dessen Spindeln. Die Figuren 4—27 Tafel IV wurden bei Zeiss $^1/_{18}$ Comp. ocul. 4 gezeichnet.

## Tafel I.

Figur 1. Ein neu vereinigtes Pärchen; Mundöffnungen gegen einander gepresst; Nebenkerne in Umwandlung begriffen. $a^1$ 0,095 : 0,037; $a^2$ 0,1 : 0,035; $b^1$ 0,035 : 0,012; $b^2$ 0,025 : 0,017; $c^1$ 0,009, $c^2$ 0,006.

Figur 2. Zwei mit einander schwimmende Paramaecien kurz vor der Vereinigung; Mundöffnung noch nach rechts gewandt; Nebenkerne noch bläschenförmig.

Figur 3. Die Vereinigung ist in ganzer Länge erfolgt; Nebenkerne in Sichelform; Hauptkern eine schwach gekrümmte ovale Platte. $a^1$ 0,11 : 0,04; $a^2$ 0,107 : 0,037; $b^1$ 0,034 : 0,015; $b^2$ 0,035 : 0,020.

Figur 4. Der Hauptkern beginnt in zwei seitliche und einen medianen Lappen auszuwachsen; Nebenkerne auf der einen Seite Spindeln (0,016 : 0,0075) auf der anderen Seite hantelförmig (Hantel 0,027 lang, Köpfchen 0,009 : 0,005) $a^1$ 0,112 : 0,04; $a^2$ 0,112 : 0,044; $b^1$ 0,044 : 0,018; $b^2$ 0,038 : 0,011.

Figur 5. Die 3 Hauptlappen des Kerns beginnen sich zu verästeln; auf der rechten Seite sind 4 Spindeln (0,009 : 0,006); auf der linken Seite Theilung derselben in 8 (0,058; 0,008 : 0,005), $a^1$ 0,125 : 0,037; $a^2$ 0,11 : 0,35.

Figur 6. Die Hauptkerne in 3 verästelte Stränge ausgewachsen; von den Nebenkernspindeln sind 7 in Rückbildung begriffen, eine als Hauptspindel (0,009 : 0,0035) auf der rechten Seite des Thieres eingestellt. $a^1$ 0,093 : 0,035; $a^2$ 0,097 : 0,035.

Figur 7—9. Die Stränge des Hauptkerns in Stücke zerlegt; verschiedene Theilungsstadien der Hauptspindel; in Figur 7 noch Reste der Nebenspindeln. Maasse für Figur 7: $a^1$ 0,112 : 0,037; $a^2$ 0,1 : 0,04; $c^1$ 0,015 : 0,006.

## Tafel II.

Figur 1—3. Copulae, bei denen schon auf dem Vierspindelstadium die Hauptspindel eingestellt ist; Figur 1. Thiere mit 4 Spindeln (a 0,1 : 0,037; Spindel 0,0087 : 0,0056), Figur 2. Nebenspindeln in Theilung ($a^1$ 0,094 : 0,04, $a^2$ 0,1 : 0,044), Figur 3. Hauptspindel in Theilung.

Figur 4. Hauptspindel in stationären und Wanderkern getheilt.

Figur 5. Die Geschlechtskerne fangen an, wieder Spindelstructur anzunehmen; beginnender Austausch der Wanderkerne.

Figur 6. Der Wanderkern des linken Thiers auf der Grenze beider Thiere, der des rechten Thiers beginnt mit seiner hinteren Spitze überzutreten und sich mit der Spitze des linken stationären Kerns zu vereinigen.

Figur 7 und 9. Auf der einen Seite die Vereinigung der Geschlechtskerne vollzogen, auf der anderen Seite noch nicht; die eine Wanderspindel verweilt daher noch ganz (Figur 9) oder theilweise (Figur 7) im Thier, aus dem sie stammt, so dass dieses 3 Spindeln, davon 2 in Copula, enthält. (Figur 7 $a^1$ 0,106 : 0,037, $a^2$ 0,093 : 0,035.)

Figur 8. Beide Wanderspindeln in Vereinigung mit der stationären Spindel begriffen.

## Tafel III.

Figur 1. Die aus Verschmelzung der Geschlechtsspindeln entstandene Theilspindel in Theilung begriffen; altes Cytostom geöffnet.

Figur 2 und 3. Die primäre Theilspindel theilt sich in die secundären Theilspindeln: vom alten Cytostom beginnt sich die Anlage eines neuen auszustülpen.

Figur 4—12. Entwicklung der Einzelthiere nach Lösung der Conjugation.

Figur 4. Thier mit 2 secundären Theilspindeln und neugebildetem Cytostom.

Figur 5. Die secundären Theilspindeln an einer Spitze vereinigt; Aequatorialplatte in die Seitenplatten getheilt.

Figur 6. Primäre Theilspindel in Theilung; Bildung des neuen Cytostoms.

Figur 7—10. Theilung der secundären Theilspindeln in die Haupt- und Nebenkernanlagen.

Figur 11. 12. 17. Umwandlung der Hauptkernanlagen (Placenten) und Rückbildung des alten Hauptkerns. Figur 11. Thier mit 4 Placenten und 4 Nebenkernen. Maasse für Figur 12: a 0,162 : 0,062, jede Placenta 0,027 : 0,02; c 0,005. Maasse für Figur 17: a 0,162:0,062, jede Placenta 0,035 : 0,020; c 0,005.

Figur 13 und 14. 2 Stadien der Cytostomneubildung mit zugehörigen secundären Theilspindeln.

Figur 15. Abschnürung des rechts gelegenen neuen Cytostoms von dem alten links gelegenen und in Rückildung begriffenen; dasselbe Präparat in gleicher Lage bei 3 verschiedenen Tiefeneinstellungen.

Figur 16. Die secundäre Theilspindel in Theilung zur Haupt- und Nebenkernanlage. (Stadium zwischen Figur 7 und 8).

## Tafel IV.

Figur 1—3. Ein Anfang-, Mittel- und Endstadium der Theilung.

Figur 4 und 5. Cytostome und Nebenkerne zweier in Theilung begriffener Thiere.

Figur 7. Cytostome von 3 in Theilung begriffenen Thieren; ein Cytostom auf dem optischen Durchschnitt.

Figuren 6 und 8 und 10. Hauptkerne, Nebenkerne und Cytostome in Theilung begriffener Thiere; in Figur 8 die Nebenkerne eines zweiten Thiers, welches gleiche Form des Hauptkerns und des Cytostoms besass, dazu gezeichnet.

Figur 9. Nebenkern in Theilung, Figur 9a das Endköpfchen stärker vergrössert.

Figur 11. Hauptkern eines Theilstadium, Andeutung von faseriger Differenzirung.

| Maasse von | a | b | c |
|---|---|---|---|
| Figur 1. | 0,112 : 0,044 | 0,019 : 0,019 | |
| Figur 2. | 0,112 : 0,050 | 0,062 : 0,035 | 0,025 : 0,003 |
| Figur 4. | 0,147 : 0,060 | 0,040 : 0,044 | 0,008 |
| Figur 5. | 0,144 : 0,060 | 0,016 : 0,019 | 0,008 |

Nebenkernspindeln Figur 8. 0,015 : 0,0005; Figur 9. 0,052.

Figur 12. Hauptkern eines Paramaecium im Farbenbild.

Figur 13. Verschiedene Zustände des Nebenkerns. Grösse 0,003—0,006. Nucleolus 0,002.

Figuren 14—21. Umwandlung der Nebenkerne zu Spindeln.

Figur 14. Beginnende faserige Differenzirung des Nebenkerns. Grösse 0,008—0,01.

Figur 15. 2 Kernsicheln eines Thieres, die eine in zweifacher Ansicht. Maasse: 0,019 : 0,01.

Figur 16. Eine Kernsichel (späteres Stadium) in 3 Ansichten. Maasse: 0,02 : 0,007 : 0,002.

Figur 17. Zwei Anfangsstadien der Spindel aus demselben Thier. Maasse: 0,02 : 0,007 und 0,03 : 0,003.

Figur 19. Die linke Spindel ist eine Doppelspindel (0,017 : 0,01) wahrscheinlich durch Verschmelzung von 2 Sichelkernen entstanden, die rechte Spindel eine einfache, da in demselben Thier noch eine zweite gleiche vorhanden war (0,016 : 0,005).

Figur 20 und 21. Spindel fertiggestellt. (Maasse: 0,020 : 0,006.)

Figur 22. Doppelspindel eines Thieres in Theilung (0,022 : 0,008); die 2 Spindeln des anderen Thieres in Hantelform, davon nur 1 dargestellt; Maasse: 0,028 Länge der ganzen Spindel, 0,006 Breite des Köpfchens.

Figur 23. Spindeln des Vierspindelstadiums, die eine zeigt beginnende Theilung.

Figur 24. Hauptkern und Nebenkernspindeln eines Paarlings mit eingestellter Hauptspindel; Nebenkernspindeln auf verschiedenen Stufen der Rückbildung.

Figur 25. Theilstücke des Hauptkerns nach aufgehobener Copulation in Rückbildung. (Farbenbild.)

Figur 26 und 27. Stadien der Befruchtung; Figur 27 früher als 26, auf letzterem waren die chromatischen Theile nur bei den Spindeln des linken Thieres zu erkennen, sie zeigten Theilung der Aequatorialplatte vor der Befruchtung.

---

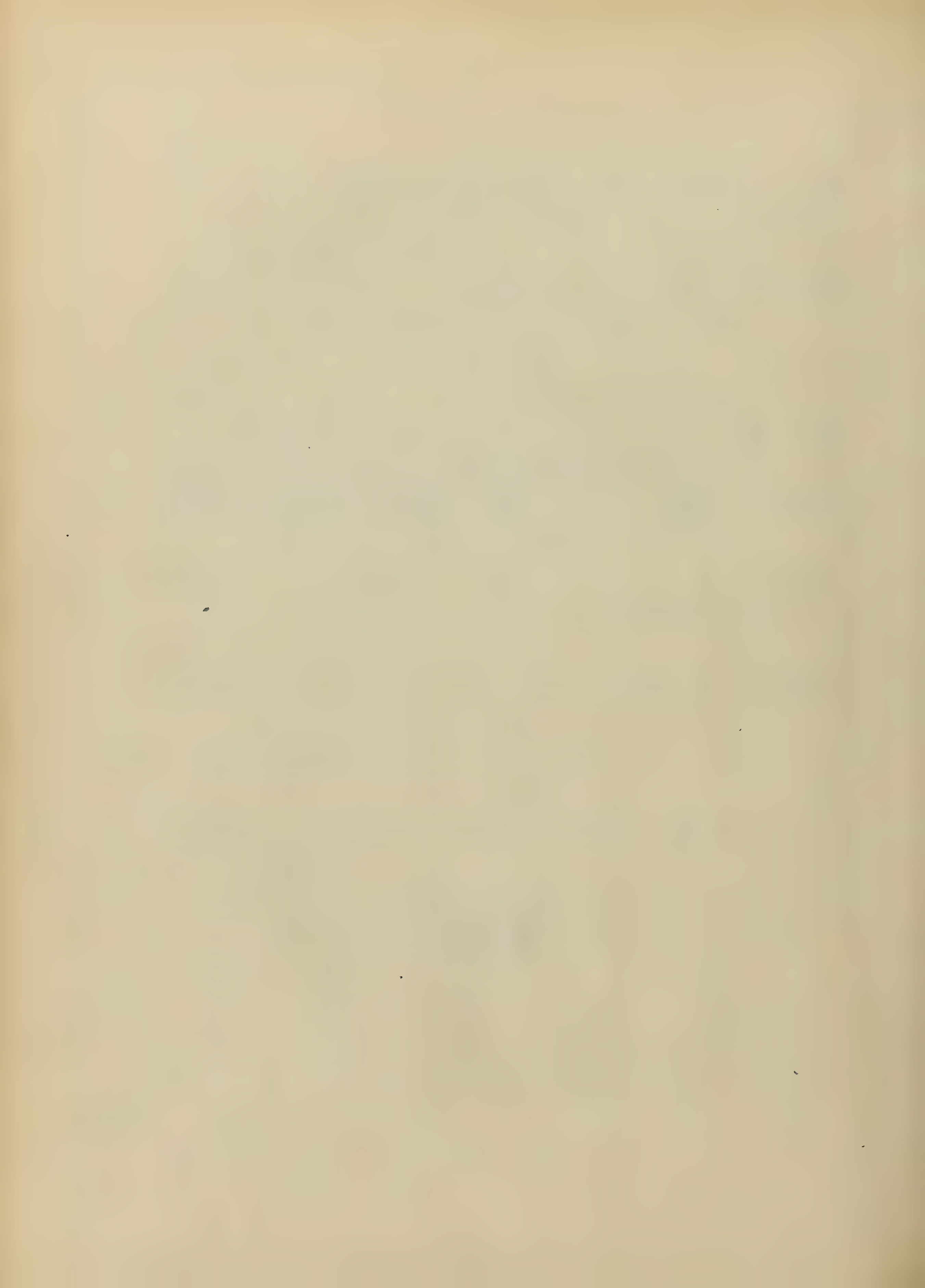
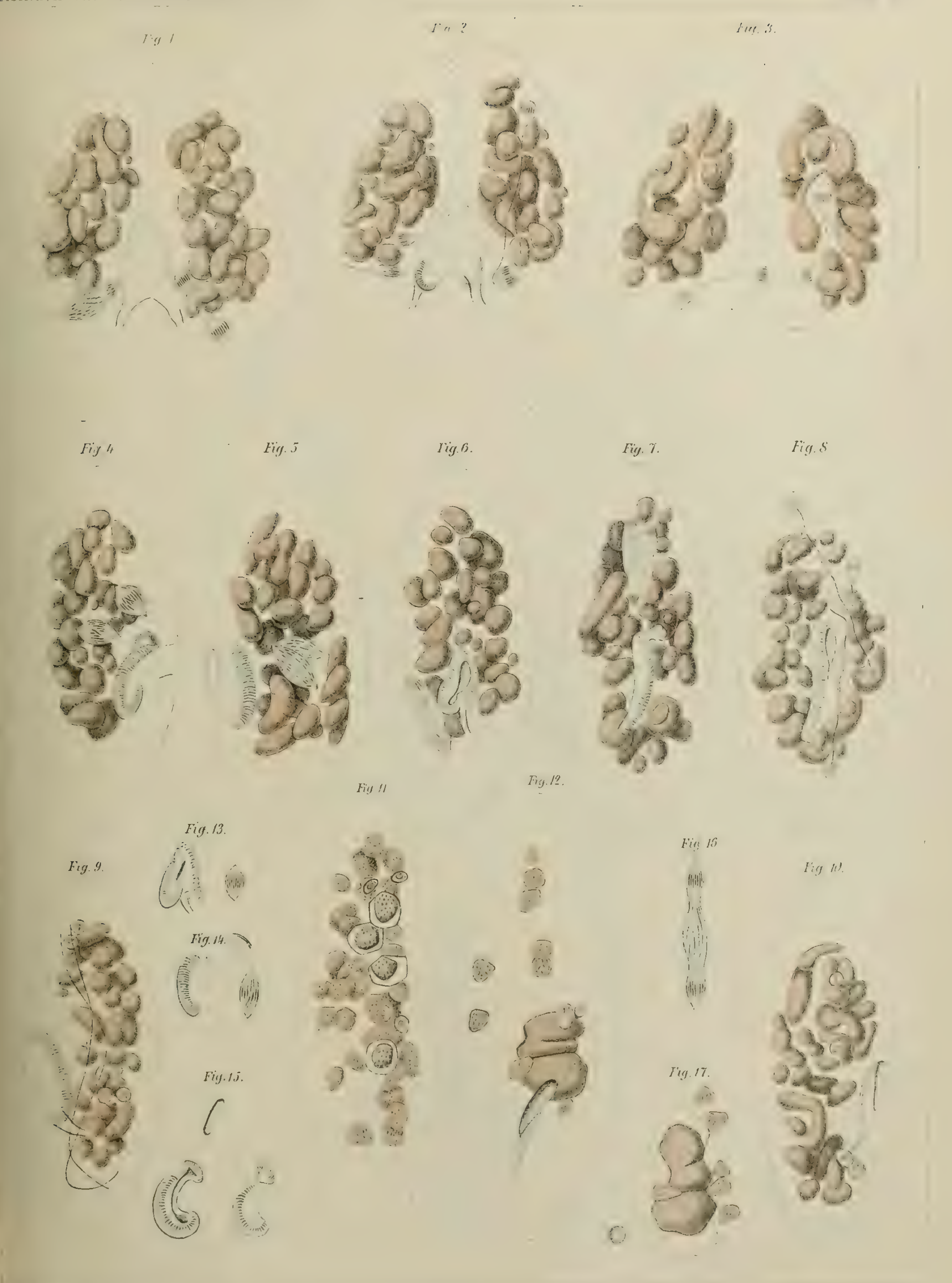



Fig. 1
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5
Fig. 6.
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9

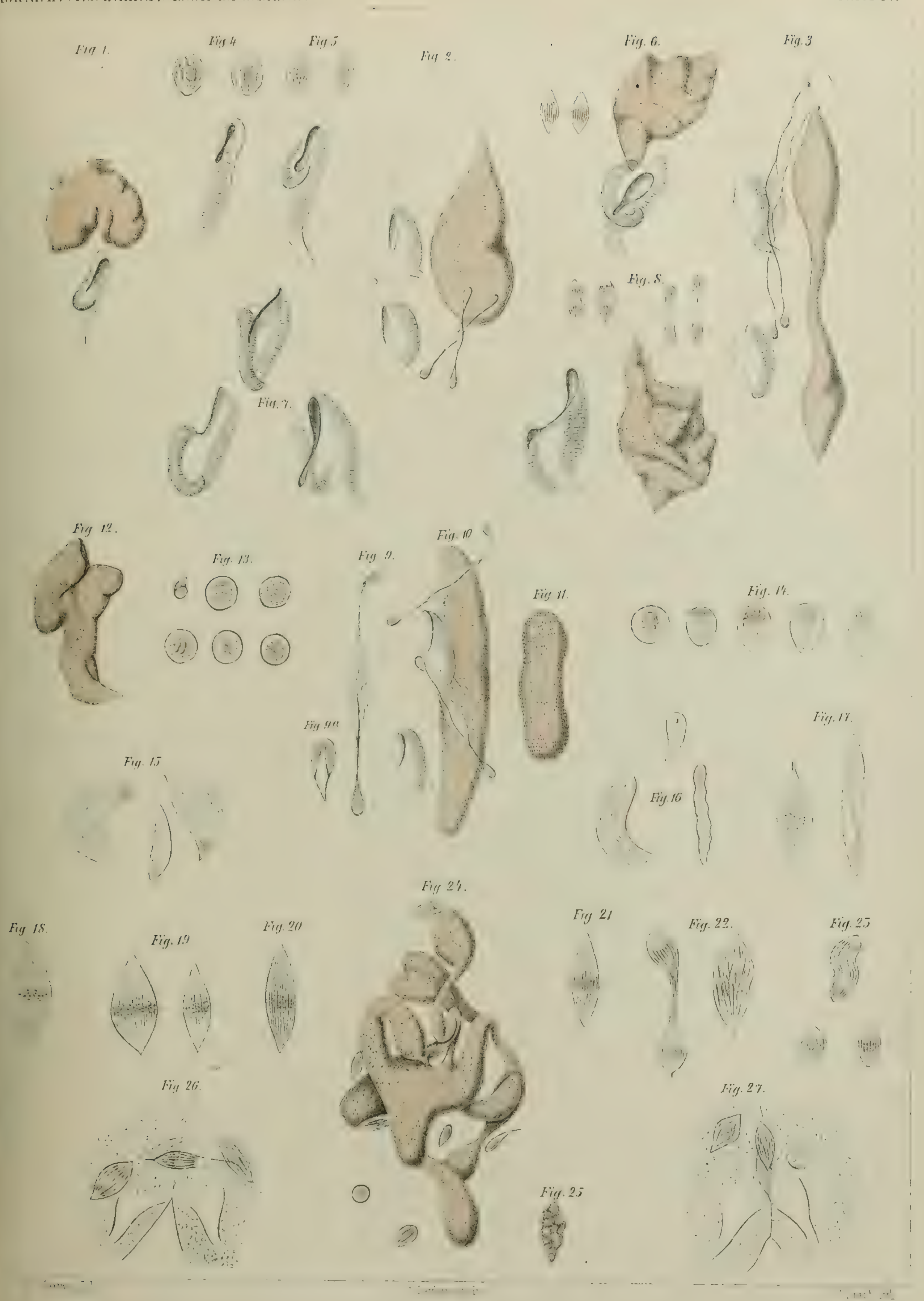



Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9.




Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3.
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8
Fig. 11
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 9.
Fig. 16
Fig. 10.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 17.




Fig. 1.
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 2.
Fig. 6.
Fig. 3
Fig. 8.
Fig. 7.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 9.
Fig. 10
Fig. 11.
Fig. 14.
Fig. 9a
Fig. 15
Fig. 16
Fig. 17.
Fig. 24.
Fig. 18.
Fig. 19
Fig. 20
Fig. 21
Fig. 22.
Fig. 23
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 25





# Inhalt.



Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

# ABHANDLUNGEN

DER

## MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHEN CLASSE

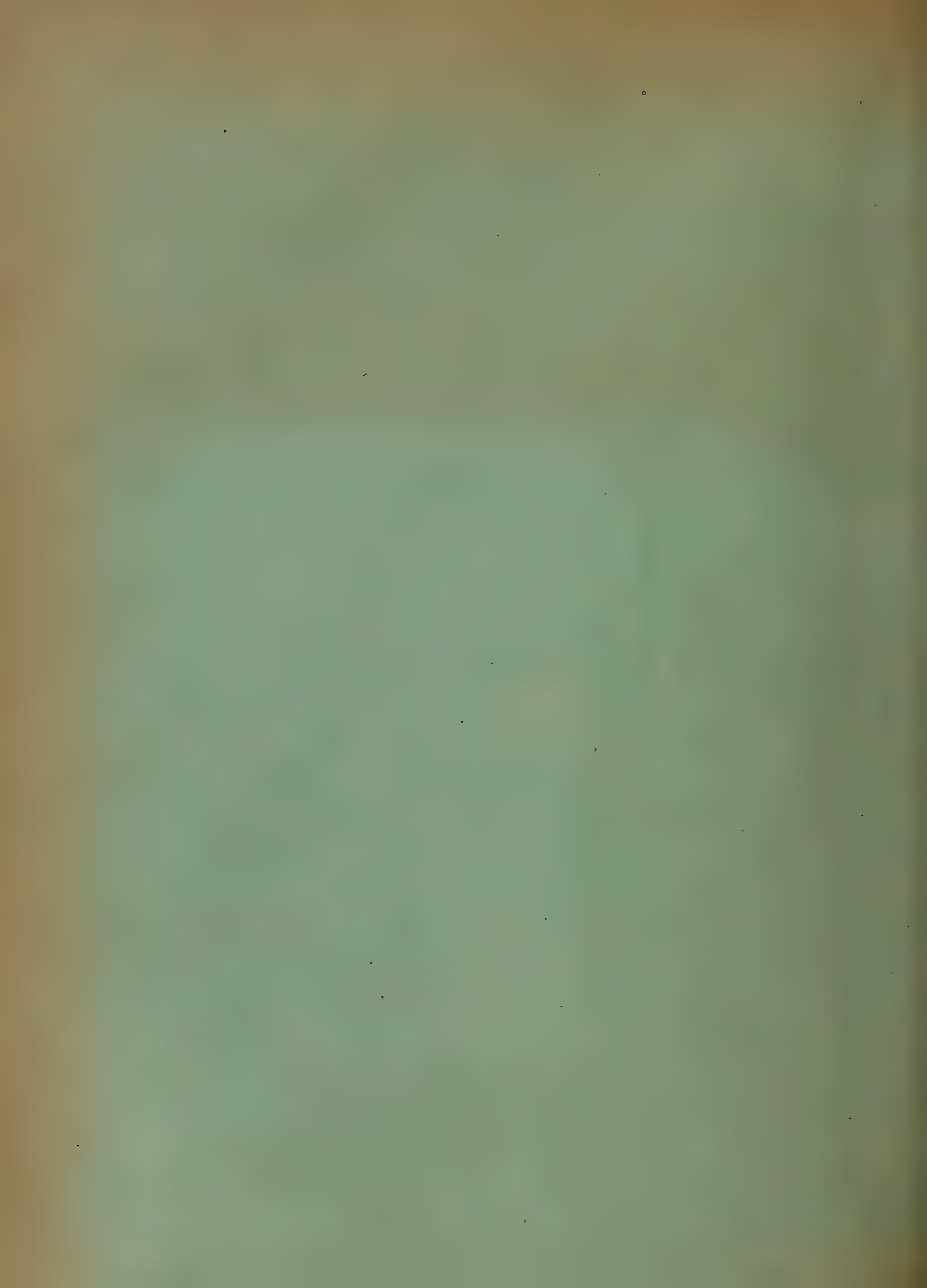
DER KÖNIGLICH BAYERISCHEN

# AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

SIEBZEHNTEN BANDES
ZWEITE ABTHEILUNG.
IN DER REIHE DER DENKSCHRIFTEN DER LXIII. BAND.




MÜNCHEN 1891.
VERLAG DER K. AKADEMIE
IN COMMISSION BEI G. FRANZ.



Ueber

# die cogredienten Transformationen einer bilinearen Form in sich selbst.

---

Von

**A. Voss.**

---



In der vorliegenden Arbeit habe ich versucht, die cogrediente (congruente) Transformation der bilinearen Formen in sich selbst, die für die symmetrischen und alternirenden Formen von Herrn Frobenius zum Abschluss gebracht ist, auf den allgemeinsten Fall einer beliebigen bilinearen Form auszudehnen.

Im § I findet man die nothwendigsten Definitionen und Bezeichnungen zusammengestellt, von denen im Anschluss an den von Herrn Frobenius entwickelten Algorithmus der bilinearen Formen[1]) Gebrauch gemacht wird, sowie einige andere einfache Folgerungen aus bekannten Theoremen erwähnt.

Daran schliesst sich in § II die Entwicklung der allgemeinen Eigenschaften der charakteristischen Function der Substitutionen $U$, sowie solcher Relationen, denen die Coefficienten derselben genügen müssen. Dabei ergeben sich einerseits die Theoreme, welche schon Herr Frobenius aufgestellt hat, doch schien es mir nicht überflüssig, dieselben von derjenigen Grundlage aus zu entwickeln, die ich bereits in meiner Arbeit über orthogonale Substitutionen[2]) benutzt habe. Andrerseits aber erhält man, indem man unter der Substitution eine solche versteht, welche die Form in eine beigeordnete — die conjugirte der reciproken — verwandelt, Relationen, welche in besonders ausgeprägtem Sinne eine Ver-

---

1) Vgl. Frobenius, Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen, Borchardt's Journ. Bd. 84, S. 1. Diese Arbeit werde ich im Folgenden mit $F$ citiren. Vgl. ferner: Ueber die schiefe Invariante einer bilinearen oder quadratischen Form, Daselbst Bd. 86, S. 44; sowie Kronecker, Ueber die congruenten Transformationen der bilinearen Formen, Berl. Monatsb. April 1874. Diese letztere Arbeit werde ich mit $K$ citiren.

2) Voss, Zur Theorie der orthogonalen Substitutionen, Math. Annalen, Bd. XIII, S. 326, Ueber bilineare Formen, Göttinger Nachrichten, August 1887.

allgemeinerung der bekannten Eigenschaften der orthogonalen Substitutionen[1]) bilden. Bei der Untersuchung der reellen Transformation einer reellen Form habe ich versucht, dem Satze des Herrn Weierstrass[2]) über die Elementartheiler der characteristischen Function derjenigen Substitutionen, welche eine definite quadratische Form in sich transformiren, eine weitere Ausdehnung zu geben.

In § IV gehe ich zur Herleitung der Christoffel-Kronecker'schen Transformation[3]) vermöge einer reciproken Resolvente $n^{\text{ten}}$ Grades über, jedoch mit der Erweiterung auf den Fall, dass die letztere lauter einfache Elementartheiler enthält.

Sodann zeige ich, dass die Transformations-Coefficienten aller nicht singulären Substitutionen in vollständigster Analogie mit den Cayley-Hermite'schen Formeln, insbesondere in der von Herrn Frobenius gegebenen Gestalt, sich darstellen lassen. Dabei ergiebt sich ein System linearer Gleichungen zur Bestimmung dieser Coefficienten, das in der symbolischen Form $ST + S^1T^1 = o$ zusammengefasst werden kann[4]). Nach einer ausführlichen Erörterung der Eigenschaften der Formen $T$ gehe ich zur Ermittelung dieser Formen selbst über, die sich leicht mittelst des bei allen ähnlichen Fragen dieser Art als erledigt anzusehenden Problems der vertauschbaren Formen bewerkstelligen lässt.

---

1) Vgl. Jacobi, Crelle's Journ. Bd. 12 S. 7; Baltzer, Determinanten, S. 173.

2) Weierstrass, Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen, Berl. Monatsb. 1868. S. 336.

3) Christoffel, Theorie der bilinearen Functionen, Borchardt's Journal, Bd. 68, S. 253; Kronecker, Ueber bilineare Formen, ebenda, S. 273.

4) Die Möglichkeit, überhaupt rationale Transformationen einer Form in sich anzugeben, ist, worauf mich Herr Klein bei dem Erscheinen meiner Note in den Göttinger Nachrichten aufmerksam zu machen die Güte hatte, bereits 1858 durch Cayley (On the automorphic transformation of a bipartite quadric function. Phil. Transactions 148, S. 39—46) gewissermassen dargethan, der mittelst der Hermite'schen Methode (Crelle's Journal Bd. 47, S. 309) rationale zunächst nicht cogrediente Transformationen einer bilinearen Form in sich angiebt.

Indessen hat Herr Cayley dabei übersehen, dass seine Formeln — die mit denen des Herrn Frobenius übereinstimmen — nur für den Fall einer symmetrischen oder alternirenden Form ohne das Hinzutreten der im Texte angezogenen Gleichung eine cogrediente Substitution liefern, und auch die Frage, bei welcher besonderen Beschränkung des Characters der Substitution diese Transformationen die einzigen sind, gar nicht aufgeworfen.

Herr **Frobenius** hat zuerst die wichtige Frage nach der Irreducibilität der eigentlichen Transformationen einer symmetrischen oder alternirenden Form von nicht verschwindender Determinante[1]) in bejahendem Sinne entschieden. Eine ähnliche Untersuchung lässt sich auch in dem allgemeinen Falle führen, doch muss es weiteren Untersuchungen vorbehalten bleiben, diese schwierige Frage in ihrem ganzen Umfange zu erledigen, da auch bei anderen Voraussetzungen solche Substitutionen durch ein einziges rationales System dargestellt werden können.[2]) Die Untersuchung der Anzahl der willkürlichen Parameter, von denen überhaupt die Coefficienten der Transformation einer Form in sich abhängen, bildet den Inhalt des § *XII*, und es scheint mir bemerkenswerth, dass dieselbe stets durch lineare Operationen gefunden werden kann.

---

## § I.

### Einleitung.

In diesem Paragraphen werde ich kurz die wesentlichsten Bezeichnungen und Definitionen, sowie einige einfache Theoreme zusammenstellen, die im Folgenden zur Anwendung kommen werden.

1. Unter dem **Produkte**[3])

$$C = AB \tag{1}$$

der beiden bilinearen Formen von $n$ Variabelnpaaren $x$ und $y$

$$A = \Sigma a_{ik} x_i y_k,$$
$$B = \Sigma b_{ik} x_i y_k,$$

sei der Ausdruck

$$C = \sum_k \frac{\partial A}{\partial y_k} \frac{\partial B}{\partial x_k} = \Sigma c_{ik} x_i y_k,$$

verstanden, so dass

$$c_{ik} = \sum_l a_{il} b_{lk} \tag{2}$$

$$\text{für } i,k = 1, 2, \ldots n$$

1) Ueber die Transformation von Formen mit verschwindender Determinante, die in den übrigen §§ der Arbeit ausgeschlossen sind, handelt § V.

2) Vgl. 2. B. § V, S.

3) F. S. 2.

wird. Bei dieser Definition wird die Multiplication associativ und distributiv, dagegen im allgemeinen nicht commutativ. Die Determinante der Coefficienten des Productes $C$ wird nach 2) gleich dem Producte der Determinanten der Factoren $A$ und $B$.[1]) Bezeichnet man die Determinante der Coefficienten $c_{ik}$ einer Form $C$ allgemein durch $|C|$, so zieht demnach die Gleichung 1) auch die folgende

$$|C| = |A|\,|B|$$

nach sich.

Zwei Formen $A$ und $B$ heissen vertauschbar, wenn ihr Product commutativ ist, d. h. wenn

$$AB = BA,$$

welche Gleichung also die $n^2$ in den Coefficienten von $A$ und $B$ linearen Gleichungen

$$\sum_l a_{il} b_{lk} = \sum_l b_{il} a_{lk};$$
$$i, k = 1, 2, \ldots n,$$

repräsentirt.

2. Unter der conjugirten Form von $A$[2]) versteht man die Form

$$A^1 = \Sigma a_{ki} x_i y_k$$

welche sich durch gleichzeitige Vertauschung der sämmtlichen Variabeln $x_i$ mit den $y_i$ aus $A$ ergibt. Alsdann gilt der Satz:

$$(AB\ldots D)^1 = D^1 \ldots B^1 A^1.$$

3. Die mit jeder beliebigen Form vertauschbare Form[3])

$$\sum_i x_i y_i$$

werde durch $E$ bezeichnet. Demnach ist $AE = EA = A$. Formen, welche nach dem Typus von $E$ gebildet sind, aber weniger als $n$ Variabelnpaare enthalten, sollen durch $E_1$, $E_2$ . . bezeichnet werden, so dass allgemein

$$E = \Sigma E_k$$

ist, sobald die Formen $E_k$ unter sich kein Variabelnpaar gemein haben. Die Form

1) F. S 5. 2) F. S. 4. 3) F. S. 5, ff.

$$E_\alpha\, A\, E_\beta = \Sigma x_k^\alpha \frac{\partial^2 A}{\partial x_k^\alpha\, \partial y_l^\beta} y_l^\beta$$

enthält also nur die Variabeln $x$ welche in $E_\alpha$, die Variabeln $y$ welche in $E_\beta$ vorkommen.[1])

4. Wenn die Determinante der Form $A$ nicht verschwindet, so giebt es eine einzige vollkommen bestimmte Form $X$, welche der Gleichung [2])

$$3) \qquad A\, X = B$$

genügt, und wenn die Determinante von $B$ nicht verschwindet, so ist auch die von $X$ nicht Null. Ist $B = o$, so muss auch $X = o$ sein. Es giebt daher auch eine Form $Y$, welche der Gleichung

$$A\, Y = E$$

genügt. Aus der hieraus folgenden Gleichung

$$Y\, A\, Y = Y,$$

oder

$$(Y\, A - E)\, Y = o,$$

folgt aber

$$Y\, A = E.$$

Diese Form $Y$ heisst die reciproke Form von $A$ und wird durch $A^{-1}$ bezeichnet, so dass also

$$A\, A^{-1} = A^{-1}\, A = E$$

wird. Führt man für die Unterdeterminanten des Coefficientensystems der $a_{ik}$, dividirt durch $|A|$ die Bezeichnung $\alpha_{ik}$ ein, so ist

$$A^{-1} = \Sigma \alpha_{ki}\, x_i y_k,$$

wobei dann die Gleichungen

$$\sum_i a_{ik} \alpha_{il} = \sum_i a_{ki}\, \alpha_{li} = (k\, l)$$

gelten, in denen $(k\, l)$ das bekannte, für $k = l$ gleich Eins, sonst aber gleich Null zu setzende Symbol bedeutet.

Zugleich folgt aus 3) durch Multiplication mit $A^{-1}$

$$X = A^{-1} B,$$

und für die reciproke Form eines Productes gilt der Satz

---

1) F. S. 17. 2) Vgl. F. S. 6.

$$(A B \cdot \cdot D)^{-1} = D^{-1} \cdot \cdot B^{-1} A^{-1}.$$ [1])

Aus
$$A A^{-1} = E,$$
$$(A^{-1})^1 A^1 = E,$$
$$(A^1)^{-1} A^1 = E,$$

folgt daher noch
$$\big((A^{-1})^1 - (A^1)^{-1}\big) A^1 = o,$$
oder
$$(A^{-1})^1 = (A^1)^{-1}.$$

5. Wird die Form $A$ durch die beiden Substitutionen

4)
$$x_i = \sum_l p_{li} \xi_l$$
$$y_k = \sum_m q_{km} \eta_m$$

in die Form $B$ transformirt, so ist

5)
$$B = \Sigma a_{ik} p_{li} q_{km} \xi_l \eta_m.$$

Ordnet man den beiden Substitutionen 4) die Formen
$$P = \Sigma p_{li} x_l y_i,$$
$$Q = \Sigma q_{mk} x_m y_k,$$
zu, so lässt sich die Gleichung 5) in der symbolischen Form[2])

6)
$$B = P A Q$$

schreiben, falls man rechterhand noch die $x$ und $y$ durch die $\xi$ und $\eta$ ersetzt.

Die Transformation heisst eine contragrediente, wenn die $p_{mk}$ die durch $|Q|$ dividirten ersten Unterdeterminanten nach den Elementen $q_{km}$ sind, d. h., wenn $Q^{-1} = P$, dagegen cogredient, wenn $q_{mk} = p_{km}$ oder $P = Q^1$ ist. Die Transformation $P = Q$ heisse nach Herrn Kronecker eine conjugirte Transformation von $A$ in $B$.

6. Unter der characteristischen Function[3]) einer bilinearen Form $A$ versteht man die Determinante der Form
$$A - rE$$
in welcher $r$ einen variabeln Parameter bedeutet. Zwei Formen $A$ und $B$ heissen ähnlich, wenn ihre characteristischen Functionen dieselben

1) F. S. 8. 2) F. S. 19. 3) F. S. 10.

Elementartheiler haben, und unter dieser Voraussetzung gibt es eine contragrediente Substitution $P$, welche $A$ in $B$ überführt, so dass die Gleichung

$$\bar{P}^{-1} A P = B$$

besteht. Nach Herrn Weierstrass heissen zwei Formenschaaren

$$A - rB \quad \text{und} \quad A_1 - rB_1$$

äquivalent, wenn die Elementartheiler der als nicht identisch verschwindend vorausgesetzten Determinanten $|A - rB|$ und $|A_1 - rB_1|$, welche ebenfalls als characteristische Functionen bezeichnet werden mögen, übereinstimmen. Nach Herrn Kronecker können zwei äquivalente Schaaren aus conjugirten Grundformen immer durch cogrediente Substitutionen in einander transformirt werden[1]), d. h. sie sind einander congruent.

7. Nach dem Verfahren des Herrn Weierstrass findet man unter der eben genannten Voraussetzung der Aequivalenz zwei Formen $P$ und $Q$ von nicht verschwindender Determinante, welche die Gleichungen

$$PAQ = A_1,$$
$$PBQ = B_1,$$

befriedigen. Giebt es nun auch noch irgend zwei andere Formen $P_1$ und $Q_1$ dieser Art, und wird die Determinante von $B$ als nicht verschwindend vorausgesetzt, was sich immer erreichen lässt, so muss

$$PAQ = P_1 A Q_1,$$
$$PBQ = P_1 B Q_1,$$

sein. Hieraus folgt aber

$$Q_1 = B^{-1} P_1^{-1} PBQ,$$

oder

$$PAQ = P_1 A B^{-1} P_1^{-1} PBQ;$$

also, wenn der Factor $Q$ beiderseits fortgelassen wird

$$P_1^{-1} PAB^{-1} = AB^{-1} P_1^{-1} P.$$

1) K. S. 436.

Setzt man aber

$$AB^{-1} = W,$$
$$P_1^{-1} P = R,$$

so ist

$$RW = WR.$$

Und ist umgekehrt $R$ eine mit $W$ ertauschbare Form von nicht verschwindender Determinante, so sind

$$P_1 = PR^{-1},$$
$$Q_1 = B^{-1} RBQ,$$

zwei Formen, welche die Gleichungen

$$P_1 A Q_1 = A_1,$$
$$P_1 B Q_1 = B_1,$$

befriedigen. Es giebt daher genau so viel linear von einander unabhängige Substitutionen von nicht verschwindender Determinante, welche die Schaar $A - rB$ in $A_1 - rB_1$ transformiren, als es linear von einander unabhängige Formen von nicht verschwindender Determinante giebt, die mit $W = AB^{-1}$ vertauschbar sind.[1])

8. Wird eine Form $A$ von nicht verschwindender Determinante durch zwei Substitutionen $P$ und $Q$ in sich transformirt, so ist

$$PAQ = A.$$

Alle Formen $B$, welche gleichfalls durch $P$ und $Q$ in sich transformirt werden, ergeben sich aus der Gleichung

$$B = SA,$$

falls

$$SP = PS$$

genommen wird. Ist nämlich

$$PBQ = B,$$

so ist auch

$$PBA^{-1} P^{-1} A = B,$$

---

1) Alle Substitutionen $P$, $Q$, welche die Schaar $A - rB$ in sich selbst transformiren, sind daher in den Formen $P = BA^{-1} R^{-1}$, $Q = B^{-1} RA$ enthalten, wo $R$ eine mit $AB^{-1}$ vertauschbare Form ist.

oder

$$P B A^{-1} = B A^{-1} P.$$

Setzt man aber

$$B A^{-1} = S,$$

so ist $PS = SP$ und $B = SA$. Umgekehrt ist dann aber auch

$$P B Q = P S A Q = S P A Q = S A = B.$$

wie zu zeigen war[1]).

9. Wenn die Gleichung

$$U(P_1 + P_2) = (Q_1 + Q_2) U$$

besteht, in welcher $P_1$, $Q_1$; $P_2$, $Q_2$ Formen sind, die nur die in $E_1$; $E_2$ vorkommenden Variabelnpaare enthalten (also in derselben Weise zerlegbar[2]) sind) und die characteristischen Functionen von $P_2$ und $Q_1$ sowie von $P_1$ und $Q_2$ keinen gemeinsamen Theiler haben, so ist auch $U$ in derselben Weise in zwei Formen $U_1 + U_2$ zerlegbar.

Man hat nämlich durch Multiplication mit $E_1$ und $E_2$

$$E_1 U P_1 = Q_1 U E_1; \qquad E_2 U P_1 = Q_2 U E_1,$$
$$E_1 U P_2 = Q_1 U E_2; \qquad E_2 U P_2 = Q_2 U E_2,$$

oder wenn

$$E_1 U E_1 = u_1; \qquad E_1 U E_2 = w_1,$$
$$E_2 U E_2 = u_2; \qquad E_2 U E_1 = w_2$$

gesetzt wird

$$u_1 P_1 = Q_1 u_1; \qquad w_1 P_2 = Q_1 w_1,$$
$$u_2 P_2 = Q_2 u_2; \qquad w_2 P_1 = Q_2 w_2.$$

Aus der letzten Gleichung geht aber unter der genannten Bedingung hervor[3])

$$w_1 = o, \qquad w_2 = o,$$

so dass

$$U = (E_1 + E_2) U (E_1 + E_2) = u_1 + u_2,$$

---

1) Herr Frobenius giebt zur Ermittelung solcher Formen $B$ den specielleren Satz: Ist $A$ eine Form, welche durch die Substitution $P$ und $Q$ in sich transformirt wird, so ist auch

$$f(P)\, A\, g(Q)$$

eine solche Form. F. S. 30.

2) F. S. 17.

3) Vgl. F. S. 28, Satz X.

wird. Und zugleich können die Determinanten von $u_1$ und $u_2$ nur dann von Null verschieden sein, wenn die Formen $P_1$ und $Q_1$ sowie $P_2$ und $Q_2$ zu einander ähnlich sind.

10. Eine Form von der Gestalt $\pm A(A^1)^{-1}$ heisst nach Herrn Rosanes[1]) antisymmetrisch. Damit eine Form $S$ von nicht verschwindender Determinante antisymmetrisch sei, ist nothwendig und hinreichend, dass die Elementartheiler ihrer characteristischen Function paarweise von gleichem Grade sind und für reciproke Werthe verschwinden, und dass entweder diejenigen Elementartheiler, welche von der Form $(\varrho+1)^{2k}$ $(\varrho-1)^{2k+1}$ sind, paarweise auftreten, oder dass dieses mit den Theilern der Form $(\varrho-1)^{2k}$, $(\varrho+1)^{2k-1}$ der Fall ist.

Unter der genannten Voraussetzung ist nämlich die Schaar $S-\varrho E$ einer Schaar mit conjugirten Grundformen $W\mp\varrho W^1$ äquivalent[2]), also

$$P(S-\varrho E)Q = W\mp\varrho W^1$$

oder

$$\begin{aligned} PSQ &= W, \\ PQ &= \pm W^1, \\ Q^1 P^1 &= \pm W. \end{aligned}$$

Demnach ist

$$S = \pm P^{-1} Q^1 P^1 Q^{-1}.$$

Setzt man also

$$P^{-1} Q^1 = A$$

oder

$$P^1 Q^{-1} = (A^1)^{-1},$$

so wird

$$S = \pm A(A^1)^{-1},$$

wie zu zeigen war.

11. Das Problem, alle Formen $P$ zu finden, welche der Gleichung

$$PA = AP$$

genügen, also mit $A$ vertauschbar sind, ist zuerst von Herrn Frobenius

---

1) Borchardt's Journal Bd. 80, S. 61.

2) F., S. 22. Diese Untersuchung beruht auf dem wichtigen Satze des Herrn Kronecker über die Elementartheiler einer aus conjugirten Grundformen gebildeten Schaar, K. S. 442. Man vgl. auch den von Herrn Stickelberger gegebenen Beweis desselben, Borchardt's Journal, Bd. 86, S. 42.

behandelt worden[1]. Insbesondere hat derselbe die Anzahl $m$ der linear von einander unabhängigen Formen dieser Art angegeben. Bezeichnet man dieselben durch

$$P_1,\ P_2, \cdots P_m,$$

so ist

$$P = \sum_m \alpha_s P_s,$$

während zwischen den $P_s$ keine lineare Relation besteht. Unter denselben befindet sich auch die Form $E$ selbst. Man kann aber stets voraussetzen, dass die Grundformen $P_\varrho$ Formen von nicht verschwindender Determinante sind. Genügen nämlich die $P_s$ nicht dieser Bedingung, so haben die Formen

$$Q_s = P_s + h_s E$$

bei willkürlichen Werthen der $h_s$ nicht verschwindende Determinanten. Sie sind aber zugleich Grundformen. Bestände nämlich eine Relation

$$\Sigma \beta_s Q_s = o,$$

zwischen denselben, so wäre auch

$$\Sigma \beta_s P_s + E \Sigma h_s \beta_s = o;$$

d. h. es bestände auch eine lineare Relation zwischen den Formen $P_s$, da

$$E = \Sigma \gamma_s P_s$$

sein muss. Im folgenden werde ich eine (symbolische) lineare Gleichung zwischen Formen als gelöst betrachten, sobald dieselbe auf das Problem der vertauschbaren Formen zurückgeführt ist.

## § II.

### Die Eigenschaften der cogredienten Transformationen einer bilinearen Form in sich selbst.

Wenn eine Substitution $U$, deren Determinante $|U|$ selbstverständlich nicht verschwindet, die Form $S$ cogredient in sich transformirt, so ist[2])

1) F. S. 28, 29. Vgl. auch L. Maurer, Zur Theorie der linearen Substitutionen, Diss. Strassburg 1887; sowie meine Note in den Sitzgb. d. bayer. Ak. d. W. Ueber die mit einer bilinearen Form vertauschbaren bilinearen Formen, Juli 1889.

2) F. S. 33 ff.

$$1)\qquad U^1 S U = S,$$
$$U^1 S^1 U = S^1;$$

also auch

$$2)\qquad U^1(S+\varrho S^1)U = S+\varrho S^1.$$

Eine solche Substitution transformirt demnach die ganze aus conjugirten Grundformen gebildete Schaar $S+\varrho S^1$, insbesondere also auch die symmetrische Form $S+S^1$, sowie die alternirende $S-S^1$ in sich selbst.

Es ist ferner nach 1)

$$U^1 S(U+\varrho E) = (S+\varrho U^1 S) = (E+\varrho U^1) S,$$

oder

$$3)\qquad U^1 S(U+\varrho E) = \varrho(U^1+\varrho^1 E) S,$$

falls unter $\varrho^1$ der reciproke Werth von $\varrho$ verstanden wird.

Bezeichnet man den Werth der Determinante von $U$ durch $\varepsilon$, setzt man zugleich voraus, dass $|S$ nicht verschwindet, so folgt aus 1) nach § I, 1.

$$\varepsilon^2 = 1,$$

und aus 3)

$$4)\qquad \varepsilon|U+\varrho E| = \varrho^n|U^1+\varrho^1 E|.$$

Die Substitution heisst bekanntlich eigentlich, wenn $\varepsilon$ gleich $+1$, dagegen uneigentlich, wenn $\varepsilon$ gleich $-1$ ist. Man hat daher die bekannten Sätze: [1])

Bei einer eigentlichen (uneigentlichen) Substitution und ungeradem $n$ ist $\varrho=+1$ ($\varrho=-1$) eine Wurzel der characteristischen Gleichung

$$5)\qquad U-\varrho E| = o.$$

Das Product aller Wurzeln der characteristischen Gleichung 5) hat den Werth $\varepsilon$. Bei einer eigentlichen (uneigentlichen) Transformation ist die Anzahl der Wurzeln $\varrho=-1$ immer eine gerade (ungerade). Bei einer uneigentlichen Transformation und geradem $n$ sind $\varrho=\pm 1$ Wurzeln der Gleichung 5).

Die Gleichung 5) hat nach 4) nur reciproke Wurzeln, mit Ausnahme der etwa vorhandenen Wurzeln von der Form

1) F. S. 35.

$\varrho = \pm 1$, und die zu reciproken Wurzeln gehörenden Elementartheiler haben dieselben Exponenten. Umgekehrt ist durch diese Eigenschaft eine Form $U$ vollständig characterisirt, welche eine Form von nicht verschwindender Determinante in sich transformirt.[1])

In der That sind unter dieser Bedingung die Schaaren

$$rE - U \text{ und } rU - E$$

äquivalent, also

$$A(rE - U)B = rU - E,$$

oder

$$AB = U; \; AUB = E.$$

Da ferner $U$ und $U^1$ ähnliche Formen sind, so ist

$$WUW^{-1} = U^1,$$

also

$$WABW^{-1} = U^1,$$

oder

$$A = W^{-1}U^1WB^{-1} = B^{-1}U^{-1},$$

d. h.

$$U^1WB^{-1}U = WB^{-1};$$

mithin ist $WB^{-1}$ eine Form von nicht verschwindender Determinante, welche durch $U$ in sich transformirt wird, und aus dieser findet man alle Formen dieser Art vermöge der Lösung der Gleichung

$$PU^1 = U^1P$$

in der Gestalt

$$S = PWB^{-1}.$$

Damit eine Form $U$ überhaupt eine Form $S$ in sich transformire, deren Determinante auch verschwinden kann, ist nothwendig und hinreichend, dass die characteristische Function von $U$ reciproke Wurzeln, resp. die Wurzeln $+1$ oder $-1$, besitze. — Soll nämlich die Gleichung

$$U^1S = SU^{-1}$$

überhaupt bestehen, ohne dass alle Coefficienten von $S$ Null sind, so muss eine $n^2$ reihige aus den Coefficienten von $U$ und $U^{-1}$ gebildete

---

1) F. S. 34.

Determinante verschwinden, welche die genannte Bedingung für die characteristische Function von $U$ repräsentirt.

Herr Frobenius hat ferner den folgenden Satz bewiesen:

Ist eine Substitution $U$ in zwei Formen $U_1 + U_2$ zerlegbar, deren characteristische Functionen keine reciproken Wurzeln haben, so ist jede Form $S$ (von verschwindender oder nicht verschwindender Determinante), welche durch $U$ in sich transformirt wird, in derselben Weise zerlegbar.[1])

Dieser Satz kann in folgender Weise umgekehrt werden:

Ist eine Form $S$ (von nicht verschwindender Determinante) zerlegbar in $S_1 + S_2$, und haben die Determinanten,

$$|S_1 - S_1^1 \varrho|,$$
$$|S_2 - S_2^1 \varrho|$$

keine gemeinsamen Theiler, so ist $U$ in derselben Weise zerlegbar.

Aus der Gleichung

$$U S (S^1)^{-1} = S (S^1)^{-1} U$$

folgt nämlich

$$U[S_1 (S_1^1)^{-1} + S_2 (S_2^1)^{-1}] = [S_1 (S_1^1)^{-1} + S_2 (S_2^1)^{-1}] U.$$

und damit der zu beweisende Satz,[2]) falls die characteristischen Functionen von $S_1 (S_1^1)^{-1}$ und $S_2 (S_2^1)^{-1}$, d. h. die vorhin angeführten beiden Determinanten keinen gemeinsamen Theiler haben. Insbesondere folgt:

Ist $S$ zerlegbar in $S_1 + S_2$ und ist $S_1$ eine symmetrische respective alternirende Form, so ist $U$ in derselben Weise wie $S$ zerlegbar, wenn die Determinanten $|S_2 - S_2^1|$ respective $|S_2 + S_2^1|$ nicht verschwinden.

Durch diesen Satz ist zugleich die Transformation der wie $S$ zerlegbaren Formen erledigt.

Ich entwickele nun einige allgemeine Relationen zwischen den Coefficienten einer Substitution $U$, welche sich freilich auch zum Theil in sym-

---

1) F. S. 36.

2) Vgl. § I. Nr. 9.

bolischer Form darstellen lassen, bei denen aber die explicite Gestalt im allgemeinen vortheilhaft scheint.

Ist

$$S = \Sigma a_{ik} x_i y_k,$$

und

$$x_i = \Sigma c_{im} \xi_m,$$
$$y_k = \Sigma c_{kl} \xi_l,$$

eine (congruente) Substitution $U$, welche $S$ in sich transformirt, so ergeben sich zur Bestimmung der Coefficienten $c_{ik}$ die folgenden $n^2$ quadratischen Gleichungen

$$1) \qquad \Sigma a_{ik} c_{im} c_{kl} = a_{ml}; \quad m, l = 1, 2 \cdots n,$$

Multiplicirt man nun die mit $k$ beliebigen Grössenreihen $u_i^\alpha$, $v_i^\alpha$, $i = 1, 2 \cdots n$; $\alpha = 1, 2 \cdots k$, geränderte Determinante

$$\begin{vmatrix} c_{11}+\varrho & c_{12} & \cdot\cdot & c_{1n} & u_1^1 & \cdot\cdot & u_1^k \\ c_{21} & c_{22}+\varrho & \cdot\cdot & c_{2n} & u_2^1 & \cdot\cdot & u_2^k \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdot\cdot & c_{nn}+\varrho & u_n^1 & \cdot\cdot & u_n^k \\ v_1^1 & v_2^1 & \cdot\cdot & v_n^1 & 0 & \cdot\cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ v_1^k & v_2^k & \cdot\cdot & v_n^k & 0 & \cdot\cdot & 0 \end{vmatrix}$$

welche durch $\psi(\varrho)$ bezeichnet werden möge, mit der nicht verschwindenden Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot\cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot\cdot & a_{nn} \end{vmatrix} = A$$

vertical, und dann horizontal mit der Substitutionsdeterminante

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdot\cdot & c_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ c_{n1} & \cdot\cdot & c_{nn} \end{vmatrix} = \varepsilon;$$

endlich wieder vertical mit der adjungirten Determinante von $S$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdot\cdot & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \alpha_{1n} & \cdot\cdot & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \frac{1}{A}$$

wobei

$$\Sigma \alpha_{il} a_{ik} = \Sigma \alpha_{li} a_{ki} = (k\, l),$$

so ergiebt sich für $\varepsilon\psi(\varrho)$ der Werth

$$\begin{vmatrix} 1+\varrho c_{11} & \varrho c_{21} & \cdot\;\cdot & \varrho c_{n_1} & \Sigma u_i^1 a_{is} c_{s_1} & \cdot\;\cdot \\ \varrho c_{12} & 1+\varrho c_{22} & \cdot\;\cdot & \varrho c_{n_2} & \Sigma u_i^1 a_{is} c_{s_2} & \cdot\;\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot \\ \varrho c_{1n} & \varrho c_{2n} & \cdot\;\cdot & 1+\varrho c_{nn} & \Sigma u_i^1 a_{is} c_{sn} & \cdot\;\cdot \\ \Sigma v_i^1 \alpha_{i_1} & \Sigma v_i^1 \alpha_{i_2} & \cdot\;\cdot & \Sigma v_i^1 \alpha_{in} & 0 & \cdot\;\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot \end{vmatrix}$$

falls statt der $k$ Ränder nur einer derselben hingeschrieben wird. Zieht man die mit

$$\frac{1}{\varrho} \Sigma u_k^\alpha a_{k1},\ \frac{1}{\varrho} \Sigma u_k^\alpha a_{k2}, \ldots \frac{1}{\varrho} \Sigma u_k^\alpha a_{kn}$$

multiplicirten ersten $n$ Verticalreihen von den letzten $k$ ab, so folgt wenn

$$\varrho^1 = \frac{1}{\varrho}$$

gesetzt wird

$$2)\qquad \varepsilon\psi(\varrho) = (-1)^k \varrho^n \begin{vmatrix} c_{11}+\varrho^1 & c_{21} & \cdot\;\cdot & c_{n_1} & U_1^1 & \cdot\;\cdot & U_1^k \\ c_{12} & c_{22}+\varrho^1 & \cdot\;\cdot & c_{n_2} & U_2^1 & \cdot\;\cdot & U_2^k \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdot\;\cdot & c_{nn}+\varrho^1 & U_n^1 & \cdot\;\cdot & U_n^k \\ V_1^1 & V_2^1 & \cdot\;\cdot & V_n^1 & (u^1 v^1) & \cdot\;\cdot & (u^k v^1) \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\ V_1^k & V_2^k & \cdot\;\cdot & V_n^k & (u^1 v^k) & \cdot\;\cdot & u^k v^k) \end{vmatrix}$$

falls zur Abkürzung die Bezeichnungen

$$U_l^\alpha = \frac{1}{\varrho^2} \Sigma u_m^\alpha a_{ml},$$

$$V_l^\alpha = \Sigma v_s^\alpha \alpha_{sl},$$

$$(u^\alpha v^\beta) = \frac{1}{\varrho} \Sigma u_i^\alpha v_i^\beta;$$

$$\alpha, \beta = 1, 2 \ldots k,$$

eingeführt werden.

Aus 2) folgt für $k = 1$, wenn man die ersten Unterdeterminanten der Determinante

$$\Delta(\varrho) = \begin{vmatrix} c_{11}+\varrho & \cdot & \cdot & c_{1n} \\ \cdot & & \cdot\ \cdot & \cdot \\ c_{n1} & & \cdot\ \cdot & c_{nn}+\varrho \end{vmatrix}$$

durch $\gamma_{ik}$ bezeichnet, durch Vergleichung der Coefficienten der $u$, $v$ auf beiden Seiten die Identität

$$-\varepsilon\gamma_{ik} = \varrho^{n-2}\Sigma a_{is}\alpha_{km}\gamma^1_{ms} - \varrho^{n-1}\Delta(\varrho^1)(ik),$$

wobei unter $\gamma^1_{ik}$ die zu $\Delta(\varrho^1)$ gehörige Unterdeterminante verstanden wird. Multiplicirt man noch mit $a_{kt}$ und summirt über $k$, so entsteht

$$3)\qquad -\varepsilon\Sigma\gamma_{ik}a_{kt} = \varrho^{n-2}\Sigma a_{ik}\gamma^1_{tk} - \varrho^{n-1}a_{it}\Delta(\varrho^1);$$

$$i,\ t = 1,\ 2\ldots n.$$

Setzt man hier

$$\varrho = \pm 1$$

so wird

$$\gamma_{ik} = \gamma^1_{ik}$$

und die Formel 3) liefert lineare Gleichungen zur Bestimmung der Unterdeterminanten der characteristischen Function von $U$, aus denen man, wenn nur eine der Determinanten

$$|U+E|,\ |U-E|$$

nicht verschwindet, die $c_{ik}$ finden kann.[1])

Die Gleichungen 3) besitzen aber eine weniger übersichtliche Form, wie diejenigen, die bei Benutzung einer anderen characteristischen Function sich ergeben. Es spricht sich das namentlich durch den Umstand aus, dass die geränderte Determinante rechter Hand in 2) die Grössenreihen $U$, $V$ an Stelle der ursprünglichen $u$, $v$ enthält, während es bei orthogonalen Formen gerade von besonderem Vortheil erscheint, dass die $U$, $V$ den $u$, $v$ gleich werden. Dies lässt sich zum Theil aber auch bei beliebigen Formen $S$ erreichen.

Setzt man

$$(S)^{-1} = \Sigma\alpha_{ki}x_iy_k,$$
$$(S^1)^{-1} = \Sigma\alpha_{ik}x_iy_k,$$

1) Vgl. meine Note, Ueber bilineare Formen, Nachrichten von der k. Gesellschaft der W. zu Göttingen, Juli 1887.

und

$$V = U(S^1)^{-1}$$

so genügt, die Form $V$ der Gleichung

$$V^1 S V = (S^1)^{-1};$$

sie transformirt die Form $S$ in die Form $(S^1)^{-1}$, welche ihre beigeordnete heissen möge. Dabei ist

$$V + \varrho(S^1)^{-1} = (U + E\varrho)(S^1)^{-1}$$
$$S(V + \varrho S^{-1}) = (V^1)^{-1}(V^1\varrho + (S^1)^{-1}).$$

d. h. die Gleichung

$$|V + \varrho S^{-1}| = o$$

hat auch jetzt nur reciproke Wurzeln. Bezeichnet man auch hier die Substitutionscoefficienten, deren Determinante jetzt gleich

$$\frac{\varepsilon}{A}$$

wird, durch $c_{ik}$, so haben dieselben dem System der $n^2$ Gleichungen

4) $$\Sigma a_{ik} c_{im} c_{kn} = \alpha_{mn}$$

zu genügen. Aus

$$V^1 S V = (S^1)^{-1}$$

ergiebt sich durch Uebergang zu den conjugirten und reciproken Formen

$$V^1 S^1 V = S^{-1},$$
$$V^{-1}(S^1)^{-1}(V^1)^{-1} = S$$

oder

$$V S V^1 = V^1 S V = (S^1)^{-1},$$

so dass neben den Gleichungen 4) auch das äquivalente System von $n^2$ Gleichungen

5) $$\Sigma a_{ik} c_{mi} c_{nk} = \alpha_{mn}$$

besteht.

Vermöge der Gleichungen

$$V^1 S V = (S^1)^{-1}$$
$$S^1 V S = (V^1)^{-1}$$

besteht jetzt zwischen den Formen $V$ und $S$ eine vollständige Reciprocität, so dass man sagen kann:

Wird durch die Substitution $V$ die Form $S$ in ihre beigeordnete Form transformirt, so wird umgekehrt durch die Substitution $S$ die Form $V$ in ihre beigeordnete transformirt.

Multiplicirt man nun die Determinante

$$
6)\qquad \psi(\varrho) = \begin{vmatrix} c_{11} + \varrho\alpha_{11}, & c_{12} + \varrho\alpha_{22} & \cdot & \cdot & u_1^1 & \cdot & u_1^k \\ c_{21} + \varrho\alpha_{21}, & c_{22} + \varrho\alpha_{22} & \cdot & \cdot & u_2^1 & \cdot & u_2^k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} + \varrho\alpha_{n1} & c_{n2} + \varrho\alpha_{n2} & \cdot & \cdot & u_n^1 & \cdot & u_n^k \\ v_1^1 & v_2^1 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_1^k & v_2^k & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & 0 \end{vmatrix}
$$

zuerst mit der Determinante der $a_{ik}$, dann mit der der Substitutionscoefficienten $c_{ik}$, so ergiebt sich vermöge ähnlicher Transformationen wie vorhin:

$$
7)\qquad \varepsilon\,\psi(\varrho) = (-1)^k \varrho^n \begin{vmatrix} c_{11} + \varrho^1\alpha_{11}, & c_{12} + \varrho^1\alpha_{12} & \cdot & \cdot & v_1^1 & \cdot & v_1^k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} + \varrho^1\alpha_{n1}, & c_{n2} + \varrho^1\alpha_{n2} & \cdot & \cdot & v_n^1 & \cdot & v_n^k \\ U_1^1 & U_2^1 & \cdot & \cdot & (u^1 v^1) & \cdot & (u^1 v^k) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ U_1^k & U_2^k & \cdot & \cdot & (u^k v^1) & \cdot & (u^k v^k) \end{vmatrix}
$$

falls

$$
U_l^h = \frac{1}{\varrho^2} \Sigma u_k^h a_{ki} \alpha_{il},
$$

$$
(u^h v^j) = \frac{1}{\varrho} \Sigma u_i^h v_k^j a_{ik}
$$

gesetzt wird. Man erhält auf demselben Wege die Gleichung:

$$
7^a)\qquad \varepsilon\,\psi(\varrho) = (-1)^k \varrho^n \begin{vmatrix} c_{11} + \varrho^1\alpha_{11} & c_{21} + \varrho^1\alpha_{21} & \cdot & \cdot & u_1^1 & \cdot & u_1^k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{1n} + \varrho^1\alpha_{1n} & c_{2n} + \varrho^1\alpha_{2n} & \cdot & \cdot & u_n^1 & \cdot & u_n^k \\ V_1^1 & V_2^1 & \cdot & \cdot & (u^1 v^1) & \cdot & (u^k v^1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ V_1^k & V_2^k & \cdot & \cdot & (u^1 v^k) & \cdot & (u^k v^k) \end{vmatrix}
$$

wobei die Bezeichnungen

$$V_l^h = \frac{1}{\varrho^2} \Sigma v_i^h a_{ki} \alpha_{lk},$$

$$(u^h v^j) = \frac{1}{\varrho} \Sigma v_i^j u_k^h a_{ki},$$

zu gelten haben.

Bezeichnet man wieder die ersten Unterdeterminanten der characteristischen Function

$$\varDelta(\varrho) = |c_{ik} + \varrho \alpha_{ik}|$$

durch $\gamma_{ik}$, so hat man aus 7) für $k = 1$

$$8) \qquad -\varepsilon \Sigma \alpha_{is} \gamma_{ik} = \varrho^{n-2} \Sigma \alpha_{si} \gamma_{ki}^1 - \varrho^{n-1} \varDelta(\varrho^1)(ks),$$

und ebenso aus 7^a^)

$$8^a) \qquad -\varepsilon \Sigma \alpha_{si} \gamma_{ki} = \varrho^{n-2} \Sigma \alpha_{is} \gamma_{ik}^1 - \varrho^{n-1} \varDelta(\varrho^1)(ks).$$

Wählt man an Stelle von $\varDelta(\varrho)$ die characteristische Function

$$\varDelta_1(\varrho) = |c_{ik} + \varrho \alpha_{ki}|,$$

so erhält man auf ganz ähnlichem Wege, falls

$$9) \qquad \psi_1(\varrho) = \begin{vmatrix} c_{11} + \varrho \alpha_{11} & c_{12} + \varrho \alpha_{21} & . & . & u_1^1 & . & u_k^k \\ c_{21} + \varrho \alpha_{12} & c_{22} + \varrho \alpha_{22} & . & . & u_2^1 & . & u_2^k \\ . & . & . & . & . & . & . \\ c_{n1} + \varrho \alpha_{1n} & c_{n2} + \varrho \alpha_{2n} & . & . & u_n^1 & . & u_n^k \\ v_1^1 & v_2^1 & . & . & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ v_1^k & v_2^k & . & . & 0 & . & 0 \end{vmatrix}$$

gesetzt wird,

$$10) \quad \varepsilon \psi_1(\varrho) = (-1)^k \varrho^n \begin{vmatrix} c_{11} + \varrho^1 \alpha_{11} & c_{12} + \varrho^1 \alpha_{21} & . & . & v_1^1 & . & v_1^k \\ . & . & . & . & . & . & . \\ c_{n1} + \varrho^1 \alpha_{1n} & c_{n2} + \varrho^1 \alpha_{2n} & . & . & v_n^1 & . & v_n^k \\ U_1^1 & U_2^1 & . & . & (u^1 v^1) & . & (u^1 v^k) \\ . & . & . & . & . & . & . \\ U_1^k & U_2^k & . & . & (u^k v^1) & . & (u^k v^k) \end{vmatrix}$$

$$U_l^h = \frac{1}{\varrho^2} \Sigma u_k^h a_{ik} \alpha_{li},$$

$$(u^h v^j) = \frac{1}{\varrho} \Sigma u_k^h v_i^j a_{ik},$$

also auch, wenn die ersten Unterdeterminanten von $\varDelta_1(\varrho)$ wieder durch $\gamma^1_{ik}$ bezeichnet werden, für $k=1$

$$11)\qquad \begin{cases} -\varepsilon\,\Sigma\alpha_{si}\gamma_{ik} = \varrho_1^{n-2}\,\Sigma\alpha_{is}\gamma^1_{ki} - \varrho^{n-1}\varDelta_1(\varrho^1)(ks), \\ -\varepsilon\,\Sigma\alpha_{is}\gamma_{ki} = \varrho^{n-2}\,\Sigma\alpha_{si}\gamma^1_{ik} - \varrho^{n-1}\varDelta_1(\varrho^1)(ks). \end{cases}$$

Die Formeln 11) können zur Bestimmung der Substitutionscoefficienten gebraucht werden, wenn für $\varrho=\pm 1$ $\varDelta(\varrho)$, dagegen nicht $\varDelta_1(\varrho)$ verschwindet. Ueber den Zusammenhang der Wurzeln beider Gleichungen vgl. § IV.

Aus der Gleichung 7) oder 9) ergeben sich weitere Eigenschaften der Substitutionscoefficienten von $V$.

Es sei $\varrho=\alpha$ eine Wurzel der Gleichung $\varDelta(\varrho)=o$, für die der Exponent des grössten gemeinsamen Theilers aller $k-1^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten gleich $l_{k-1}$, der des grössten gemeinsamen Theilers der $k^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten aber mit $l_k$ bezeichnet sein möge, wobei $l_k < l_{k-1}$ ist. Dann gilt, wie übrigens aus der Gleichung 7) folgt, in welcher $\alpha$ an Stelle von $\varrho^1$ einzusetzen ist, gleiches für die reciproke Wurzel $\alpha^1=\dfrac{1}{\alpha}$.

Entwickelt man beide Seiten der Gleichung 7) nach Potenzen von $\varrho-\alpha$, und bezeichnet die Determinante $\psi(\varrho)$ jetzt durch

$$\psi\left(\varrho\,\begin{matrix}u^1 \cdot\cdot\, u^k\\ v^1 \cdot\cdot\, v^k\end{matrix}\right),$$

so ist

$$12^{a})\qquad \psi\left(\varrho\,\begin{matrix}u^1\cdot\cdot\,u^k\\ v^1\cdot\cdot\,v^k\end{matrix}\right) = A_\alpha\begin{pmatrix}u^1\cdot\cdot\,u^k\\ v^1\cdot\cdot\,v^k\end{pmatrix}(\varrho-\alpha)^{l_k}+\cdots,$$

wo der von $\varrho$ unabhängige Coefficient $A_\alpha$ für $\varrho=\alpha$ nicht verschwindet. Zugleich wird

$$12^{b})\qquad \psi\left(\varrho^1\,\begin{matrix}v^1\cdot\cdot\,v^k\\ U^1_1\cdot\cdot\,U^k_1\end{matrix}\right) = A_{\alpha^1}\begin{pmatrix}v^1\cdot\cdot\,v^k\\ U^1_1\cdot\cdot\,U^k_1\end{pmatrix}(\varrho^1-\alpha^1)^{l_k}+\cdots$$

$$= A_{\alpha^1}\begin{pmatrix}v^1\cdot\cdot\,v^k\\ U^1_1\cdot\cdot\,U^k_1\end{pmatrix}(-1)^{l_k}(\varrho-\alpha)^{l_k}(\varrho\,\alpha)^{-l_k}+\cdots$$

Trägt man diese Werthe unter der Voraussetzung

$$13)\qquad \begin{aligned} &\Sigma u^k_h a_{ki}\alpha_{il} = U^h_{1l};\\ &h=1,\ 2\cdots k,\\ &l=1,\ 2\cdots n,\end{aligned}$$

in die Gleichung 7) ein und bemerkt, dass zur Ermittelung der $l_k^{\text{ten}}$ Potenz von $(\varrho - \alpha)$ rechter Hand die Elemente $(u^h v^j)$ sämmtlich gleich Null gesetzt werden können, da sie mit höheren Potenzen von $\varrho - \alpha$ multiplicirt sind, so ergiebt sich die Gleichung

$$14)\qquad \varepsilon A_\alpha \begin{pmatrix} u^1 \cdots u^k \\ v^1 \cdots v^k \end{pmatrix} = (-1)^{k + l_k} \alpha^{n - 2l_k - 2k} A_{\alpha^1} \begin{pmatrix} v^1 \cdots v^k \\ U_1^1 \cdots U_1^k \end{pmatrix}.$$

Von dieser Gleichung sollen zunächst Anwendungen auf den Fall gemacht werden, wo $S$ eine symmetrische resp. alternirende Form ist.

Ist $S$ eine symmetrische Form, so werden nach 13) die $U_1^h$ den $u^h$ gleich, und man hat

$$15)\qquad \varepsilon A_\alpha \begin{pmatrix} u^1 \cdots u^k \\ v^1 \cdots v^k \end{pmatrix} = (-1)^{k + l_k} \alpha^{n - 2k - 2l_k} A_{\alpha^1} \begin{pmatrix} v^1 \cdots v^k \\ u^1 \cdots u^k \end{pmatrix}.$$

Für eine alternirende Form $S$ wird dagegen $U_1^h = -u^h$ und damit

$$16)\qquad \varepsilon A_\alpha \begin{pmatrix} u^1 \cdots u^k \\ v^1 \cdots v^k \end{pmatrix} = (-1)^{l_k} \alpha^{n - 2k - 2l_k} A_{\alpha^1} \begin{pmatrix} v^1 \cdots v^k \\ u^1 \cdots u^k \end{pmatrix}.$$

Ist nun insbesondere $\alpha = \pm 1$, so folgt aus 15)

$$15^a)\qquad \varepsilon A_{\pm 1} \begin{pmatrix} u^1 \cdots u^k \\ v^1 \cdots v^k \end{pmatrix} = (\pm 1)^n A_{\pm 1} \begin{pmatrix} v^1 \cdots v^k \\ u^1 \cdots u^k \end{pmatrix} (-1)^{k + l_k}$$

und aus 16)

$$16^a)\qquad \varepsilon A_{\pm 1} \begin{pmatrix} u^1 \cdots u^k \\ v^1 \cdots v^k \end{pmatrix} = (-1)^{l_k} A_{\pm 1} \begin{pmatrix} v^1 \cdots v^k \\ u^1 \cdots u^k \end{pmatrix}$$

da für $\alpha = -1$ $n$ nothwendig eine gerade Zahl sein muss, wenn die Determinante der alternirenden Form $S$ von Null verschieden sein soll. Aus $15^a$) und $16^a$) folgt der Satz:

*Verschwinden die sämmtlichen $k - 1^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten der characteristischen Function $\Delta(\varrho)$ für eine Wurzel $\varrho = \alpha$, $\alpha = \pm 1$, und enthalten die sämmtlichen $k^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten noch den Factor $(\varrho - \alpha)^{l_k}$, $l_k \geqq o$, so ist die Form*

$$\left(\frac{\psi(\varrho)}{(\varrho - \alpha)^{l_k}}\right)_{\alpha = \varrho}$$

für ein symmetrisches $S$ symmetrisch oder alternirend, je nachdem

$$\text{für } \alpha = +1 \quad \varepsilon \text{ und } (-1)^{k+l_k}$$
$$\text{für } \alpha = -1 \quad \varepsilon \text{ und } (-1)^{n+k+l_k}$$

gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen haben. Ist dagegen $S$ alternirend, so findet dasselbe statt, je nachdem

$$\varepsilon \text{ und } (-1)^{l_k}$$

von gleichem oder entgegengesetztem Zeichen sind.

Nach Herrn Stickelberger[1]) genügt nun zur Bestimmung der $l_k$ oder der Elementartheiler die jedesmalige Untersuchung einer bilinearen Form $H(uv)$, welche den ersten Coefficienten der mit gewissen Grössen $u^\beta$, $v^\beta$; $\beta = 1, 2 \cdot\cdot k - 1$ und einer letzten Reihe von Grössen $u$, $v$ geränderten Determinante der $c_{ik} + \varrho\alpha_{ik}$ in ihrer Entwickelung nach Potenzen von $\varrho - \alpha$ bildet. So lange $H(uv)$ nicht alternirend ist, kann man die $u$ den $v$ gleich setzen. In dem Falle aber, wo $H(uv)$ eine alternirende Form ist, werden zwei aufeinanderfolgende Elementartheiler gleich. Man kann dann zwar nicht die $u$ den $v$ gleich setzen, aber bei der Untersuchung der $k+1^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten durch geeignete Wahl der Grössen des Randes die verloren gegangene Symmetrie wiederherstellen. Es sei nun $S$ eine symmetrische Form, und das Zeichen von

$$\varepsilon\,\alpha^n (-1)^{k+l_k}, \quad \alpha = \pm 1$$

positiv, während $k$ von 1 bis $k_1$ geht. Dann ist nach 15[a]) jene Form $H(uv)$ eine symmetrische, und man kann die $u^\beta$ den $v^\beta$ gleich wählen, so lange $\beta$ gleich $1, 2 \cdots k_1$ ist. Wird aber jenes Zeichen für $k_1 + 1 + l_{k_1+1}$ negativ, so wird zugleich $H(uv)$ eine alternirende Form. Es ist dann der Elementartheiler $e_{k_1}$ gleich $e_{k_1+1}$. Nun sind alle Zahlen $k + l_k$ für $k = 1, 2 \cdots k_1$ einander nach dem Modul 2 congruent, dagegen $k_1 + 1 + l_{k_1+1}$ denselben nach demselben Modul incongruent. Es ist also in der Gleichung

$$-1 + e_{k_1} = l_{k_1} + k_1 - (l_{k_1+1} + k_1 + 1)$$

---

1) Stickelberger, Ueber Schaaren von bilinearen und quadratischen Formen, Borchardt's Journal, Bd. 86, S. 39.

die rechte Seite eine ungerade, also $e_{k_1}$ eine gerade Zahl. Und umgekehrt muss, wenn $e_{k_1}$ eine gerade Zahl ist, die Differenz rechts aus zwei modulo 2 incongruenten Zahlen bestehen. Bezeichnet man daher mit $\varkappa$ irgend eine der Zahlen, welche kleiner als $k_1$ ist, so ist zufolge der Gleichung

$$e_\varkappa - e_{k_1} = l_\varkappa + \varkappa - (l_{\varkappa+1} + \varkappa + 1) - [l_{k_1} + k_1 - (l_{k_1+1} + k_1 + 1)],$$
$$e_\varkappa \text{ incongruent } e_{k_1} \pmod 2,$$

also $e_\varkappa$ eine ungerade Zahl. Aus der Gleichung

$$-1 + e_{k_1+1} = l_{k_1+1} + k_1 + 1 - (l_{k_1+2} + k_1 + 2),$$

in welcher $e_{k_1+1} = e_{k_1}$ zu setzen ist, geht dann hervor, dass

$$l_{k_1+2} + k_{1+2} \equiv l_{k_1} + k_1 \pmod 2.$$

Es muss also jeder Elementartheiler mit geradem Exponenten paarweise auftreten.

Ist dagegen die Form alternirend, so wird man, so lange das Zeichen von

$$\varepsilon(-1)^{l_k}$$

positiv ist, die $u$ den $v$ gleich setzen können. Wird aber $\varepsilon(-1)^{l_{k+1}}$ gleich $-1$, so wird die Form $H(uv)$ alternirend und zugleich

$$e_k = e_{k+1}$$

In diesem Falle ist aber $l_k - l_{k+1}$ ungerade, also $e_k$ selbst eine ungerade Zahl.

Damit ist der wichtige Satz des Herrn Frobenius[1]) bewiesen: Die Elementartheiler der characteristischen Function jeder Substitution, welche eine symmetrische (oder alternirende) Form von nicht verschwindender Determinante in sich selbst transformirt, sind paarweise von gleichem Grade und verschwinden für reciproke Werthe, mit Ausnahme derer, welche für den Werth $+1$ oder $-1$ Null sind und einen ungeraden (oder geraden) Exponenten haben.

1) F. S. 41. Dass ein Beweis dieses Satzes mit Hülfe des S. 259 benutzten Ränderungsprincipes geführt werden könne, hat schon Herr Stickelberger angegeben, sein Verfahren jedoch nicht entwickelt. Borchardt's Journal, Bd. 86, S. 43.

Aus diesem Satze ergeben sich noch einige weitere Folgerungen.

Verschwindet für eine Form $S$ (gerader Ordnung) keine der beiden Determinanten $|S \pm S^1|$, ist ferner $q$ die grösste Zahl, für welche noch alle Unterdeterminanten $n-q^{\text{ter}}$ Ordnung der characteristischen Function $|U - \varrho E|$ einer Substitution $U$ für $\varrho = \pm 1$ verschwinden, so ist $q$ eine ungerade Zahl.[1])

Verschwindet dagegen $|S - S^1|$, während $|S + S^1|$ von Null verschieden ist, so sind die Elementartheiler mit ungeradem Exponenten, welche für $\varrho = \pm 1$ verschwinden, nicht nothwendig paarweise vorhanden. Bezeichnet man daher die ungeraden Exponenten für $\varrho = -1$ mit

$$\beta_1, \beta_2, \cdots$$

so ist

$$(-1)^{\Sigma\beta} = \varepsilon,$$

also $\Sigma\beta \equiv o$ oder 1 (mod. 2), je nachdem $\varepsilon = +1$ oder $= -1$ ist. Man hat also auch:[2])

Sind $U, V$ zwei zugleich eigentliche (uneigentliche) Substitutionen, welche eine symmetrische Form von nicht verschwindender Determinante in sich transformiren, und verschwindet die Determinante von $|U + V|$, so verschwindet sie mit einer ungeraden Anzahl von Systemen von Unterdeterminanten.

Diese ausgezeichnete Eigenschaft der Wurzel $\varrho = -1$ der characteristischen Function von $U$ bei einer eigentlichen Transformation lässt sich in allerdings beschränkterem Umfange auch erkennen, ohne dass die Existenz einer symmetrischen Form von nicht verschwindender Determinante vorausgesetzt wird.

Man hat nämlich vermöge $U^1 S U = S$ die Identität

$$17) \qquad (U^1 S^1 + S\varrho)(U + \sigma E) = (U^1 \sigma + E) S^1 + \varrho S (U + \sigma E).$$

---

1) Die Substitution in $U$ ist eigentlich, da das Product der Wurzeln der characteristischen Function gleich $+1$ ist.

2) Vgl. Stieltjes, Sur un théorème d'algèbre, Acta Mathem. VI S. 319; Netto, über orthogonale Substitutionen, Acta Math. IX S. 291, sowie meine Note in den Göttinger Nachrichten, Juli 1887.

Setzt man hier $\varrho = \pm 1$ und

$$U^1 S^1 + S = W,$$
$$U^1 S^1 - S = V,$$

so folgt

18)
$$W(U + \sigma E) = W^1 + \sigma W,$$
$$V(U + \sigma E) = -V^1 + \sigma V;$$

und für $\sigma = \pm 1$

19)
$$(U^1 S^1 + S\varrho)(U + E) = (E + U^1) S^1 + \varrho S(E + U)$$
$$(U^1 S^1 + S\varrho)(U - E) = (E - U^1) S^1 - \varrho S(E - U)$$

Die Formen

$$U^1 S^1 + S\varrho,\ S(U + \sigma E)$$

werden dabei durch $U$ in sich transformirt.

Verschwindet nun $|V|$ nicht, so sind die Elementartheiler von der Form $(\varrho + 1)^{2k}$, $(\varrho - 1)^{2k+1}$ in der characteristischen Function von $U$ stets paarweise vorhanden; verschwindet $|W|$ nicht, so gilt dasselbe von den Theilern von der Gestalt $(\varrho - 1)^{2k}$, $(\varrho + 1)^{2k+1}$.

Und ähnlich folgt aus 19)

Verschwindet $|U + E|$ $[|U - E|]$ nicht, so hat die characteristische Function $|U^1 S^1 + S\varrho|$ den Character derjenigen einer Schaar von conjugirten Grundformen $A + \varrho A^1 [A - \varrho A^1]$.

Verschwindet dagegen $|U + E|$ oder $|U - E|$, so transformirt $U$ eine Schaar von conjugirten Grundformen in sich, deren Determinante identisch verschwindet.

Aus der Gleichung 16ª) ergiebt sich ferner der Satz: Eine alternirende Form von nicht verschwindender Determinante lässt keine uneigentliche Transformation zu.[1])

Ist nämlich $\varepsilon = -1$, so sind $\alpha = \pm 1$ Wurzeln der characteristischen Gleichung, und es gilt die Gleichung 16ª). Verschwinden also die $k^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten nicht mehr sämmtlich, so ist $l_k = o$. Dann aber bilden die Werthe conjugirter $k^{\text{ter}}$ Unterdeterminanten ein alternirendes System, und die sich selbst conjugirten Unterdeterminanten sind daher gleich Null. Dies bedingt aber nach einem bekannten Satze, dass alle $k^{\text{ten}}$ Unterdeter-

1) Vgl. Frobenius, Ueber die schiefe Invariante etc. Borchardt's Journ. Bd. 86, S. 50.

minanten überhaupt gleich Null sind, was im Widerspruch mit der Voraussetzung steht. Dagegen bilden bei der eigentlichen Transformation einer alternirenden Form für eine Wurzel von der Form $\varrho = \pm 1$ die $k^{\text{ten}}$ nicht verschwindenden Unterdeterminanten der characteristischen Function immer ein symmetrisches System.

Auf dieselbe Weise ergiebt sich für $l_k = o$ aus 15ª) wenn man

$$\varepsilon = (-1)^{\mu}$$

setzt, dass für die Wurzel $\alpha = +1$ die Zahl $\mu + k$, für $\alpha = -1$ dagegen die Zahl $\mu + n + k$ eine gerade sein muss.

Uebrigens gilt nach 15), 16) der allgemeine Satz:

Bei einer alternirenden oder symmetrischen Form sind die zu $(\varrho - \alpha)^{l_k}$, $(\varrho_1 - \alpha_1)^{l_k}$ gehörigen Coefficienten der Entwickelung conjugirter $k^{\text{ter}}$ Unterdeterminanten der characteristischen Function der Substitution $V$ nach Potenzen von $\varrho - \alpha$, $\varrho_1 - \alpha_1$ einander proportional, so lange alle Unterdeterminanten von höherem als $n - k$-Grade für $\varrho = \alpha$ verschwinden.

Um an die Gleichung 14) für eine beliebige Form $S$ ähnliche Folgerungen anknüpfen zu können, benutze ich den von Herrn Frobenius ausgesprochenen Satz:[1])

„In einem Elementensystem, in welchem alle partiellen Determinanten $m + 1$ Grades verschwinden, verhalten sich die aus irgend $m$ Zeilen gebildeten Determinanten $m^{\text{ten}}$ Grades wie die entsprechenden, aus irgend $m$ anderen Zeilen gebildeten partiellen Determinanten $m^{\text{ten}}$ Grades."

Es ist vielleicht nicht überflüssig, diesen Satz, den Herr Frobenius mittelst der Betrachtung vollständiger Lösungssysteme linearer Gleichungen bewiesen hat[2]), auf einem etwas anderen Wege herzuleiten.

Es seien die 4 Determinanten $m^{\text{ten}}$ Grades,

$$A = |a_{ik}|, \quad C = |c_{ik}|$$
$$B = |b_{ik}|, \quad D = |d_{ik}|$$

gebildet aus irgend welchen Elementen $a$, $b$, $c$, $d$,

1) Frobenius, Ueber das Pfaff'sche Problem, Borchardt's Journal Bd. 82, S. 241.

2) Ebenda S. 236.

$$i, k = 1, 2 \cdots m$$

in dem folgenden Schema

$$\begin{vmatrix} a_{11} & . & . & a_{1m} & b_{11} & . & . & b_{1m} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & . & . & a_{mm} & b_{m1} & . & . & b_{mm} \\ c_{11} & . & . & c_{1m} & d_{11} & . & . & d_{1m} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ c_{m1} & . & . & c_{mm} & d_{m1} & . & . & d_{mm} \end{vmatrix}$$

angeordnet und es werde die Determinante

$$D_{i\varrho} = \begin{vmatrix} b_{11} & . & b_{1m} & a_{1\varrho} \\ . & . & . & . \\ b_{m1} & . & b_{mm} & a_{m\varrho} \\ d_{i1} & . & d_{im} & c_{i\varrho} \end{vmatrix}$$

$$i, \varrho = 1, 2 \cdots m$$

betrachtet. Dann ist

$$B c_{i\varrho} - \Sigma a_{s\varrho} d_{i\sigma} B_{s\sigma} = D_{i\varrho},$$

wenn man unter $B_{s\sigma}$ die adjungirten Determinanten der Elemente $b_{s\sigma}$ versteht, oder

$$|c_{ik} B - D_{i\varrho}| = A D B^{m-1}.$$

Verschwinden nun alle $D_{i\varrho}$, während $B$ zunächst nicht Null ist, so folgt

$$C B - A D = o.$$

Dies ist aber der von Herrn Frobenius angeführte Satz. Nennt man nämlich in einem Elementensystem alle $m$ reihigen Determinanten, welche aus denselben Horizontal- (oder Verticalreihen) gebildet sind, einander horizontal (oder vertical) zugeordnet, versteht man dann unter $B$ irgend eine $m$ reihige Determinante des Systems, unter $A$ irgend eine ihrer horizontal, unter $C$ eine ihrer vertical zugeordneten, so ist $D$ als gleichzeitig zu $B$ und $C$ zugeordnete bestimmt, und es gilt dann die obige Identität.

Ist die $k^{te}$ Potenz eines Linearfactors $s$ der Variabeln $r$, von der die Elemente ganze Functionen sind, die niedrigste, welche in allen $D_{i\varrho}$ vorkommt, so können auch nicht alle $m$ reihigen Determinanten, aus denen

die $B$ gebildet werden, eine höhere Potenz desselben enthalten, denn die $D_{i\varrho}$ sind lineare Functionen der $B$. Es müssen also solche $B$ vorhanden sein, für welche die höchste Potenz des Factors $s$ gleich $k_0 \leqq k$ ist. Dann aber ergiebt sich leicht aus der obigen Identität

$$\left(\frac{B}{s^{k_0}}\right)^{m-1}(CB - AD) = s^k P$$

wo $P$ wieder eine ganze Function ist; d. h. die $BC - AD$ enthalten mindestens den Factor $s^k$.

Ich bezeichne nun die Elemente

$$c_{ik} + \varrho\alpha_{ik}, \;\; c_{ik} + \varrho^1\alpha_{ik}$$

durch

$$p_{ik}, \;\; p^1_{ik}.$$

Setzt man ferner voraus, dass die Unterdeterminanten $m+1^{\text{ten}}$ Grades der characteristischen Function $\Delta(\varrho)$ für $\varrho = \alpha$ noch alle verschwinden, die vom $m^{\text{ten}}$ Grade aber nicht mehr sämmtlich Null sind, d. h. dass die $k = n - m^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten nicht sämmtlich verschwinden, und bezeichnet man der Reihe nach mit

$$\begin{gathered} i_1 \cdot\cdot i_m, \\ k_1 \cdot\cdot k_m, \\ s_1 \cdot\cdot s_m, \\ \varkappa_1 \cdot\cdot \varkappa_m, \end{gathered}$$

irgend eine Combination der Zahlen $n = 1, 2 \cdots n$ zu $m$ Elementen, setzt man ferner zur Abkürzung

$$P_{ik} = \begin{vmatrix} p_{i_1k_1} & \cdot & \cdot & p_{i_1k_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{i_mk_1} & \cdot & \cdot & p_{i_mk_m} \end{vmatrix},$$

und bezeichnet man die analog aus den $p^1_{ik}$ gebildete Determinante durch $P^1_{ik}$, so ist

$$P_{ik}P_{j\varkappa} = P_{i\varkappa}P_{jk}.$$

Setzt man ferner

$$\varepsilon(-1)^k\alpha^{n-2k} = \lambda,$$

so ist nach 14)

$$Q_i = \begin{vmatrix} p_{1i_1} & \cdot & \cdot & p_{1i_m} & u^1_1 & \cdot & \cdot & u^k_1 \\ p_{2i_1} & \cdot & \cdot & p_{2i_m} & u^1_2 & \cdot & \cdot & u^k_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{ni_1} & \cdot & \cdot & p_{ni_m} & u^1_n & \cdot & \cdot & u^k_n \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} p^1_{i_1 1} & \cdot & \cdot & p^1_{i_m 1} & U^1_1 & \cdot & \cdot & U^k_1 \\ p^1_{i_1 2} & \cdot & \cdot & p^1_{i_m 2} & U^1_2 & \cdot & \cdot & U^k_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p^1_{i_1 n} & \cdot & \cdot & p^1_{i_m n} & U^1_n & \cdot & \cdot & U^k_n \end{vmatrix}$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $P^1_{j\varkappa}$ und ersetzt jedes Product zweier Determinanten rechts durch das entsprechende Product nach dem vorher bewiesenen Satze, so wird

$$Q\, P^1_{j\varkappa} = \lambda \begin{vmatrix} p^1_{j_1 1} & \cdot & \cdot & p^1_{j_m 1} & U^1_1 & \cdot & \cdot & U^k_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p^1_{j_1 n} & \cdot & \cdot & p^1_{j_m n} & U^1_n & \cdot & \cdot & U^k_n \end{vmatrix} P_{i\varkappa},$$

oder auch

$$Q_i\, P^1_{j\varkappa} = Q_j\, P^1_{i\varkappa}.$$

Aus dieser Gleichung folgt aber durch Vergleichung der Coefficienten der willkürlichen Grössen $u$

$$P_{hi}\, P^1_{j\varkappa} = P_{hj}\, P^1_{i\varkappa},$$

wenn man unter den

$$h_1, \cdot \cdot h_m,$$

irgend eine Combination der Zahlen $1, 2 \cdot \cdot n$ zu $m$ Elementen versteht, oder

a) $$\frac{P_{hi}}{P^1_{i\varkappa}} = \frac{P_{hj}}{P^1_{j\varkappa}}$$

In analoger Weise schliesst man aber aus 7ᵃ)

b) $$\frac{P_{st}}{P^1_{us}} = \frac{P_{wt}}{P^1_{uw}}.$$

Setzt man nun in a)

$$\varkappa_1, \varkappa_2, \cdot \cdot \varkappa_m = h_1, h_2, \cdot \cdot h_m,$$

dagegen in b)

$$s_1, s_2 \cdot \cdot \cdot s_m = h_1, h_2 \cdot \cdot \cdot h_m,$$
$$t_1, t_2 \cdot \cdot \cdot t_m = j_1, j_2 \cdot \cdot \cdot j_m,$$
$$u_1, u_2 \cdot \cdot \cdot u_m = j_1, j_2 \cdot \cdot \cdot j_m,$$

so wird

$$\frac{P_{hi}}{P^1_{ih}} = \frac{P_{hj}}{P^1_{jh}};\ \frac{P_{hj}}{P^1_{jh}} = \frac{P_{wj}}{P^1_{jw}},$$

oder

$$\frac{P_{hi}}{P^1_{hi}} = \frac{P_{wj}}{P^1_{jw}}.$$

Man hat also folgenden Satz:

Verschwinden die Unterdeterminanten $m$ Grades nicht mehr sämmtlich, während noch alle Unterdeterminanten $m+1$ Grades für eine Wurzel $\varrho = \alpha$ von $\Delta(\varrho)$ Null sind, so ist das Verhältniss der Werthe der conjugirten Unterdeterminanten für die reciproken Wurzelwerthe $\varrho = \alpha,\ \alpha^1$ ein unveränderliches.

Ist insbesondere $\alpha = \pm 1$, so folgt:

Verschwinden für eine Wurzel $\varrho = \pm 1$ von $\Delta(\varrho)$ die Unterdeterminanten $m^{\text{ten}}$ Grades nicht mehr sämmtlich, dagegen noch alle höheren, so bilden die Unterdeterminanten $m^{\text{ten}}$ Grades ein symmetrisches System, d. h. die Werthe conjugirter Unterdeterminanten sind stets einander gleich.

Denn nach dem vorigen Satze sind die Werthe conjugirter Unterdeterminanten nur um einen für alle Determinanten gleichen Factor verschieden. Dieser könnte nur dann von der Einheit verschieden sein, wenn alle Hauptunterdeterminanten gleich Null wären, womit aber überhaupt alle Determinanten $m^{\text{ten}}$ Grades gleich Null werden[1]). Unter einer Hauptunterdeterminante ist dabei eine solche zu verstehen, welche in Bezug auf die Indices der Elemente $p_{ik}$ symmetrisch gebildet ist.

## § III.

### Die reelle Transformation reeller Formen.

Die besonderen Verhältnisse, welche stattfinden, wenn eine reelle symmetrische definite Form durch eine reelle Substitution in sich transformirt wird, sind von Herrn Frobenius insbesondere für eine orthogonale Form dargelegt worden[2]). Eine ähnliche Untersuchung

1) Vgl. die Anmerkung von Herrn Frobenius, Borchardt's Journal, Bd. 82, S. 242.

2) F. S. 51 ff.

lässt sich auch für beliebige Formen führen. Dabei ergeben sich etwas allgemeinere Sätze, als deren Specialfall dann das Theorem über definite Formen entspringt.

Ist nämlich $\alpha$ eine Wurzel der characteristischen Gleichung

$$\varDelta(\varrho) = |c_{ik} + \varrho\, \alpha_{ki}| = o,$$

so sei, nach steigenden Potenzen von $\varrho - \alpha$ entwickelt,

$$1) \qquad \frac{\gamma_{si}}{\varDelta(\varrho)} = \delta_{si}(\varrho - \alpha)^{-e_0} + \cdots,$$

wo der grösste Elementartheiler $e_0$ mindestens gleich eins ist, und nicht alle $\delta_{si}$ verschwinden. Zugleich folgt aus der Identität

$$2) \qquad \Sigma(c_{ki} + \varrho\, \alpha_{ki})\gamma_{si} = (ks)\varDelta(\varrho)$$

nach 1), wenn man ebenfalls nach Potenzen von $\varrho - \alpha$ entwickelt

$$3) \qquad \Sigma c_{ki}\delta_{si} = -\alpha\, \Sigma \alpha_{ki}\delta_{si}.$$

Multiplicirt man, unter $\beta$ irgend eine andere Wurzel, unter $\delta^0_{si}$ die zugehörigen Werthe verstanden, mit der Gleichung 3) die folgende

$$\Sigma c_{lj}\delta^0_{\sigma j} = -\beta\, \Sigma \alpha_{lj}\delta^0_{\sigma l},$$

ferner mit $a_{kl}$, und summirt dann über $k$ und $l$, so folgt

$$4) \qquad \Sigma \alpha_{ij}\delta_{si}\delta^0_{\sigma j} = \alpha\beta\, \Sigma \alpha_{ij}\delta_{si}\delta^0_{\sigma j}.$$

Die Form

$$5) \qquad M = \Sigma \alpha_{ij}\delta_{si}\delta^0_{\sigma j}x_s y_\sigma$$

muss demnach für je zwei nicht reciproke Wurzeln $\alpha$, $\beta$ identisch verschwinden.

Für $\alpha = \beta$ folgt aus 4)

Für jede von $\pm 1$ verschiedene Wurzel muss die Form

$$N = \Sigma \alpha_{ij}\delta_{si}\delta_{\sigma j}x_s y_\sigma$$

identisch verschwinden.

Ist insbesondere die Form $S$ reell, und

$$\delta_{si} = p_{si} + i\, q_{si}$$
$$\delta_{\sigma j} = p_{\sigma j} + i\, q_{\sigma j}$$

so müssen für jede von $\pm 1$ verschiedene Wurzel die Formen

$$
6)\qquad \begin{aligned} n &= \Sigma \alpha_{ij}(p_{si}p_{\sigma j} - q_{si}q_{\sigma j})\, x_s y_\sigma \\ n^1 &= \Sigma \alpha_{ij}(p_{si}q_{\sigma j} + q_{si}p_{\sigma j})\, x_s y_\sigma \end{aligned}
$$

verschwinden.

Für zwei reciproke Wurzeln $\alpha$ und $\alpha^1$, bei denen die zugehörigen Werthe der $\delta$ durch $\delta_{si}$, $\delta^1_{si}$ bezeichnet werden, braucht die Form $M$ nicht Null zu sein.

Dabei gilt der folgende Satz:

Zu denjenigen reciproken Wurzelpaaren, für welche die Form $M$ nicht identisch verschwindet, gehören lauter einfache Elementartheiler der characteristischen Function $\varDelta(\varrho)$.

Differentiirt man nämlich die Gleichung 1) so entsteht

$$
7)\qquad \frac{1}{\varDelta}\frac{\partial \gamma_{sj}}{\partial \varrho} - \frac{1}{\varDelta^2}\gamma_{sj}\frac{\partial \varDelta}{\partial \varrho} = -\, e_0\, \delta_{sj}(\varrho - \alpha)^{-(e_0+1)} + \cdot\cdot
$$

Durch Differentiation von 2) folgt dagegen

$$
\Sigma \alpha_{ki}\gamma_{si} + \Sigma (c_{ki} + \varrho\, \alpha_{ki})\frac{\partial \gamma_{si}}{\partial \varrho} = (k\, s)\frac{\partial \varDelta}{\partial \varrho}
$$

oder nach Multiplication mit $\gamma_{kj}$ und Summation nach $k$

$$
\frac{1}{\varDelta}\frac{\partial \gamma_{sj}}{\partial \varrho} - \frac{1}{\varDelta^2}\gamma_{sj}\frac{\partial \varDelta}{\partial \varrho} = -\,\frac{1}{\varDelta^2}\,\Sigma \alpha_{ki}\gamma_{si}\gamma_{kj}.
$$

Setzt man hierin nach 1)

$$
\frac{\gamma_{si}\ \gamma_{kj}}{\varDelta^2} = \delta_{si}\,\delta_{kj}(\varrho - \alpha)^{-2e_0} + \cdot\cdot,
$$

so folgt aus 7) die Identität

$$
8)\qquad (\varrho - \alpha)^{-2e_0}\Sigma \alpha_{ki}\,\delta_{si}\,\delta_{kj} + \cdots = a\,(\varrho - \alpha)^{-(e_0+1)}\,\delta_{sj} + \cdots
$$

Bezeichnet man die zu der reciproken Wurzel $\alpha^1 = \frac{1}{\alpha}$ gehörigen Werthe der $\gamma$ durch $\gamma^1_{ki}$, so ist

$$
\frac{\gamma^1{}_{ki}}{\varDelta(\varrho^1)} = \delta^1_{ki}(\varrho^1 - \alpha^1)^{-e_0} + \cdots,
$$

$$
\varepsilon\, \varDelta(\varrho) = \varrho^n \varDelta(\varrho^1).
$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung

$$\frac{\varrho^2}{\Delta(\varrho)} \Sigma \alpha_{ki} \gamma_{kj} + \frac{1}{\Delta(\varrho^1)} \Sigma \alpha_{ik} \gamma^1_{jk} = \varrho(ij)$$

ein, so wird

$$\varrho^2 \Sigma \alpha_{ki} \delta_{kj} (\varrho - \alpha)^{-e_0} + \cdots + \Sigma \alpha_{ik} \delta^1_{jk} \varrho^{e_0} \alpha^{e_0} (\alpha - \varrho)^{-e_0} + \cdots = \varrho(ij);$$

mithin folgt durch Coefficientenvergleichung

9) $$\Sigma \alpha_{ki} \delta_{kj} + (-1)^{l_0} \alpha^{2e_0 - 2} \Sigma \alpha_{ik} \delta^1_{jk} = o.$$

Setzt man den hieraus für $\Sigma \alpha_{ki} \delta_{kj}$ folgenden Werth linkerhand in 8) ein, so folgt

$$(\varrho - \alpha)^{-2e_0} (-1)^{e_0 + 1} \alpha^{2e_0 - 2} \Sigma \alpha_{ik} \delta^1_{kj} \delta_{si} + \cdots = \alpha (\varrho - \alpha)^{-(e_0 - 1)} \delta_{sj} + \cdots$$

Unter der Voraussetzung dass die Form

$$M = \Sigma \alpha_{ik} \delta^1_{jk} \delta_{si} x_j y_s$$

nicht identisch verschwindet, sollen nun in dieser Identität die Exponenten der niedrigsten Potenzen von $\varrho - \alpha$ verglichen werden. Wählt man ein Werthsystem der $x$, $y$ für das $M$ nicht Null ist, und ist dann etwa

$$\Sigma \delta_{si} x_j y_s$$

gleich Null, so ist der niedrigste Exponent rechts gleich $-(e_0 + 1) + \varrho$, $\varrho > o$; also

$$-2 e_0 = -(e_0 + 1) + \varrho,$$
$$e_0 = 1 - \varrho$$

oder, da $e_0 > o$ sein muss, $\varrho = o$ und $e_0 = 1$.

Man hat also folgenden Satz:

V e r s c h w i n d e t d i e F o r m $M$ f ü r i r g e n d z w e i r e c i p r o k e W u r z e l n d e r c h a r a c t e r i s t i s c h e n G l e i c h u n g n i c h t i d e n t i s c h, s o s i n d a l l e z u d e n s e l b e n g e h ö r i g e n E l e m e n t a r t h e i l e r g l e i c h E i n s.

Hat die Gleichung $\Delta(\varrho) = o$ irgend zwei conjugirt complexe Wurzeln $\alpha$ und $\alpha^{11}$, zu denen die Werthe $\delta_{si}$, $\delta^{11}_{si}$ gehören, so folgt aus 4):

V e r s c h w i n d e t d i e F o r m

$$N = \Sigma \alpha_{ij} \delta_{si} \delta^{11}_{\sigma j} x_s y_\sigma$$

für irgend zwei conjugirte Wurzeln nicht, so ist der absolute Betrag derselben gleich Eins, d. h. sie sind reciprok, und ist umgekehrt der Betrag nicht gleich Eins, so muss $N$ verschwinden. Unter der Voraussetzung, dass die Form $S$ und die Substitution $V$ reell sind, sind nun für zwei conjugirte Wurzeln $\alpha$ und $\alpha^{11}$ auch $\delta$ und $\delta^{11}$ conjugirt, also

$$\delta_{si} = p_{si} + i q_{si},$$
$$\delta^{11}_{\sigma j} = p_{\sigma j} - i q_{\sigma j},$$

und

$$10) \quad N = \Sigma\big(\Sigma(p_{si} p_{\sigma j} + q_{si} q_{\sigma j}) \alpha_{ij} - i \Sigma(q_{si} p_{\sigma j} - p_{si} q_{\sigma j}) \alpha_{ij}\big) x_s y_\sigma.$$

Ist nun

$$\Sigma^1 = \Sigma x_i x_k \alpha_{ik} \text{ oder auch } \Sigma = \Sigma x_i x_k a_{ik}$$

eine definite Form, so ist $N$ von Null verschieden. Daraus folgt:

Alle Wurzeln der characteristischen Gleichung einer reellen Substitution, welche eine reelle Form $S$, bei welcher $\Sigma$ definit ist, in sich transformiren, sind vom absoluten Betrage Eins.

Dann aber sind je zwei complex conjugirte Wurzeln auch reciprok; d. h. es wird die Form $M$ mit $N$ identisch. Hieraus folgt weiter:

Die characteristische Function einer reellen Substitution, welche eine reelle Form $S$, für die $\Sigma$ definit ist, in sich transformirt, hat lauter einfache Elementartheiler.

Man kann diesen Satz noch etwas verallgemeinern.

Es sei $\alpha$ eine imaginäre Wurzel $\beta + i\gamma$. Dann können in

$$\delta_{si} = p_{si} + i q_{si}$$

die Grössen $q_{si}$ nicht sämmtlich Null oder den $p_{si}$ proportional sein. Denn die Gleichungen

$$\Sigma\big(c_{ki} + (\beta + i\gamma) \alpha_{ki}\big) p_{si} = o; \; k = 1, \; 2 \cdots n,$$

können nicht bestehen, so lange $\gamma$ nicht Null ist und die Determinante von $S$ nicht verschwindet, da sonst auch alle $p_{si}$ Null sein müssten. Dagegen müssen für jede imaginäre Wurzel die beiden Formen 6) verschwinden, da das Quadrat derselben nicht gleich Eins sein kann. Verschwindet nun auch die Form $N$ (10), so müssen die Ausdrücke

$$\Sigma \alpha_{ij} p_{si} p_{\sigma j}, \ \Sigma \alpha_{ij} p_{si} q_{\sigma j}, \ \Sigma \alpha_{ij} p_{\sigma j} q_{si}, \ \Sigma \alpha_{ij} q_{si} q_{\sigma j}$$

also auch insbesondere

$$\Sigma \alpha_{ij} (p_{si} + \lambda q_{si})(p_{sj} + \lambda q_{sj})$$

verschwinden, wobei man unter $p_{si}$, $q_{si}$ zwei verschiedene Puncte der Mannigfaltigkeit

$$\Sigma \alpha_{ij} x_i x_j = 0$$

zu verstehen hat. Das erfordert aber, dass diese Mannigfaltigkeit reelle gerade Linien enthält, oder dass sie in ihrer Tangentialmannigfaltigkeit sich nicht definit verhält[1]). Man hat daher den folgenden Satz:

Ist die Form $\Sigma \alpha_{ij} x_i x_j$ in ihrer Tangentialmannigfaltigkeit definit, und ist $\alpha$ eine imaginäre Wurzel der characteristischen Function einer reellen Substitution, welche die reelle Form $S$ in sich transformirt, so ist die Form $N$ nothwendig von Null verschieden, d. h. der Betrag von $\alpha$ ist gleich Eins und die zu dieser Wurzel gehörigen Elementartheiler sind sämmtlich einfach.

Es sei endlich noch eine Eigenschaft der characteristischen Function für eine symmetrische Form angeführt.

Bezeichnet man die Coefficienten der niedrigsten Potenzen der Entwicklung einer $k^{\text{ten}}$ Unterdeterminante der characteristischen Function $\Delta(\varrho)$ nach Potenzen von $\varrho - \alpha$ durch $P$ und ebenso für die reciproke Wurzel in Bezug auf die conjugirte $k^{\text{te}}$ Unterdeterminante durch $P^1$, so gilt nach § II, 14 die Gleichung

$$P = \varepsilon (-1)^{k + l_k} \alpha^{n - 2k - 2l_k} P^1 .$$

Hat nun die Wurzel $\alpha$ den Betrag Eins, und sind ihre zugehörigen Elementartheiler alle einfach, so ist $k + l_k = s$, wo $s$ die Multiplicität der betreffenden Wurzel. Versteht man unter $P$ speciell eine $k^{\text{te}}$ Hauptunterdeterminante, so ist unter Voraussetzung eines reellen $S$ und $V$

$$P = A + iB,$$
$$P^1 = A - iB,$$

1) Also z. B. so wie ein Hyperboloid erster Art, oder ein hyperbolisches Paraboloid für $n = 4$.

und man hat

$$A + iB = (-1)^s \varepsilon e^{(n-2s)\varphi i} (A - Bi),$$

wenn

$$\alpha = e^{i\varphi}$$

gesetzt wird. Setzt man

$$A + iB = a e^{i\psi}, \quad \frac{B}{A} = t_0 \operatorname{tang} \psi,$$

so wird

$$\psi = \tfrac{1}{2}\big(\pi s + (n - 2s)\varphi\big) + m\pi,$$
$$\psi = \tfrac{1}{2}\big(\pi(s + 1) + (n - 2s)\varphi\big) + m_1 \pi,$$

je nachdem $\varepsilon = \pm 1$ ist. Daraus folgt:

Das Verhältniss $\frac{B}{A}$ hat für alle $k^{\text{ten}}$ Hauptunterdeterminanten, $k = 1, 2 \cdots s$ der characteristischen Function ein und denselben Werth.

## § IV.

### Bestimmung der Transformationscoefficienten mit Hülfe einer Gleichung $n$. Grades.

Unter gewissen Voraussetzungen lassen sich die im § III entwickelten Sätze noch erweitern. Setzt man

$$\binom{u}{U} = \begin{vmatrix} c_{ik} + \varrho^1 \alpha_{ik}, & u_i \\ U_k & o \end{vmatrix},$$

und benutzt die analoge Bezeichnung auch bei mehrfacher Ränderung der characteristischen Function, so besteht die Identität

$$1) \qquad \Delta(\varrho^1)\binom{u\,v}{U\,V} = \binom{u}{U}\binom{v}{V} - \binom{u}{U}\binom{v}{V},$$

deren rechte Seite entwickelt lautet

$$\Sigma u_k U_i v_l V_m (\gamma^1_{ki}\gamma^1_{lm} - \gamma^1_{km}\gamma^1_{li}).$$

Führt man nun an Stelle der Grössen $U_i$, $i = 1, 2 \cdots n$ die Coefficienten $\alpha_{si}$ ein, und bezeichnet mit $l_o$, $l_1$, $l_2$ die Exponenten der grössten gemeinsamen Theiler $o^{\text{ten}}$, $1^{\text{ten}}$, $2^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten um $\Delta(\varrho^1)$ für irgend

eine Wurzel $\varrho^1 = \alpha^1$ dieser Function, so enthält die linke Seite von 1) den Factor

$$(\varrho^1 - \alpha^1)^{l_0 + l_2 + \xi}$$

wo $\xi > o$ ist. Die rechte Seite wird dagegen, wenn nach 8), § III

$$\Sigma \alpha_{si} \gamma^1_{ki} = -\frac{\varepsilon}{\varrho^{n-2}} \Sigma \alpha_{is} \gamma_{ik} + \varrho \Delta(\varrho^1)(ks) \tag{2}$$

gesetzt wird, gleich

$$\begin{aligned} -\varepsilon \varrho^{1\,n-2} \Sigma u_k v_l V_m \alpha_{is} (\gamma_{ik} \gamma^1_{lm} - \gamma^1_{km} \gamma_{il}) \\ + \varrho \Delta(\varrho^1) \Sigma V_m \gamma^1_{lm} (u_s v_l - u_l v_s), \end{aligned} \tag{3}$$

und der zweite Theil von 3) enthält sicher den Factor

$$(\varrho^1 - \alpha^1)^{l_0 + l_1 + \eta},$$

wo $\eta > o$. Entwickelt man nun $\gamma_{ik}$, $\gamma^1_{lm}$ nach Potenzen von $\varrho^1 - \alpha^1$, so entsteht

$$\begin{aligned} \gamma^1_{lm} &= \beta_{lm} (\varrho^1 - \alpha^1)^{l_1} + \cdots, \\ \gamma_{ik} &= \beta_{ik} (\varrho - \alpha)^{l_1} + \cdots, \\ &= (-1)^{l_1} (\varrho^1 - \alpha^1)^{l_1} (\varrho \alpha)^{-l_1} \beta_{ik} + \cdots, \end{aligned}$$

so dass der erste Theil von 3) mit dem Gliede

$$\Sigma u_k v_l V_m \alpha_{is} (\beta_{ik} \beta^1_{lm} - \beta^1_{km} \beta_{il}) (\varrho^1 - \alpha^1)^{2 l_1},$$

abgesehen von einer Constanten, beginnt. Da dasselbe einen niedrigeren Exponenten $2\,l_1$ hat, als das zweite, so muss es verschwinden, sobald

$$l_0 + l_2 + \xi > 2\,l_1$$

ist, was jedenfalls stattfindet, sobald

$$l_0 + l_2 > 2\,l_1,$$

oder

$$l_0 - l_1 > l_1 - l_2$$

ist. Aus der Gleichung

$$\Sigma u_k v_l V_m \alpha_{is} (\beta_{ik} \beta^1_{lm} - \beta^1_{km} \beta_{il}) = o,$$

folgt aber

$$\beta_{ik} \beta^1_{lm} - \beta^1_{km} \beta_{il} = o. \tag{4}$$

Wenn also der höchste zu irgend einer Wurzel $\varrho$ der characteristischen Function gehörige Elementartheiler grösser ist, wie der nächstfolgende, so besteht zwischen den aus den ersten Unterdeterminanten der characteristischen Function hergeleiteten Entwicklungscoefficienten $\beta, \beta^1$ welche zu reciproken Wurzeln gehören, das System der Gleichungen

$$\frac{\beta_{ik}}{\beta_{il}} = \frac{\beta^1_{km}}{\beta^1_{lm}}.$$

Ebenso erhält man aber

$$\frac{\beta_{km}}{\beta_{lm}} = \frac{\beta^1_{ik}}{\beta^1_{il}}.$$

Schreibt man diese Gleichungen in der Form

$$\frac{\beta_{ik}}{\beta^1_{km}} = \frac{\beta_{in}}{\beta^1_{nm}}, \quad \frac{\beta_{im}}{\beta^1_{ki}} = \frac{\beta_{lm}}{\beta^1_{kl}},$$

setzt in der ersten $i = m$, in der zweiten $m = k$, so wird

$$\frac{\beta_{ik}}{\beta^1_{ki}} = \frac{\beta_{in}}{\beta^1_{ni}}, \quad \frac{\beta_{ik}}{\beta^1_{ki}} = \frac{\beta_{lk}}{\beta^1_{kl}}$$

und hieraus folgt

$$\frac{\beta_{in}}{\beta^1_{ni}} = \frac{\beta_{lk}}{\beta^1_{kl}}.$$

Bezeichnet man den gemeinsamen Werth aller dieser Quotienten durch $\Theta$, so wird

5) $$\beta^1_{ki} = \beta_{ik} \Theta.$$

Die Werthe der Coefficienten $\beta, \beta^1$, welche zu conjugirten ersten Unterdeterminanten in Bezug auf zwei reciproke Wurzeln der characteristischen Function gehören, sind einander proportional, wenn der erste Elementartheiler $l_0 - l_1$ grösser ist als der Nächstfolgende.

Insbesondere folgt unter dieser Voraussetzung für die Wurzel $\varrho = \pm 1$ dass die Coefficienten $\beta$, welche conjugirten ersten Unterdeterminanten zugehören, einander gleich sind. Denn für $k = i$ ergiebt sich aus 5)

$$\Theta = 1,$$

also

$$\beta_{ki} = \beta_{ik}.$$

Für $l_1 = l_2 = o$ erhält man wieder den Satz des § II S. 267. Führt man nun die Relationen 5) in die Gleichung 2) ein, so folgt durch Coefficientenvergleichung

$$6) \qquad \Sigma \beta_{ik} (\alpha_{is} + \varepsilon \alpha^{n-2} \Theta \alpha_{si}) = o,$$
$$\Sigma \beta_{ki} (\alpha_{si} + \varepsilon \alpha^{n-2} \Theta \alpha_{is}) = o;$$

und zugleich ist

$$7) \qquad \Sigma (c_{is} + \alpha \alpha_{is}) \beta_{ik} = o,$$ [1]
$$\Sigma (c_{si} \alpha + \alpha_{si}) \beta_{ik} = o;$$

also auch nach 6)

$$\Sigma (c_{is} + \varepsilon \alpha^{n} \Theta c_{si}) \beta_{ik} = o,$$
$$\Sigma (c_{is} - \varepsilon \alpha^{n-1} \Theta \alpha_{si}) \beta_{ik} = o.$$

Unter der Voraussetzung $l_0 - l_1 > l_1 - l_2$ bestehen also für eine Wurzel $\varrho = \alpha$ der characteristischen Function gleichzeitig die Relationen:

$$|c_{ik} + \alpha \alpha_{ik}| = o,$$
$$|\alpha_{is} + \alpha^{n-2} \varepsilon \Theta \alpha_{si}| = o,$$
$$|c_{is} + \alpha^{n} \varepsilon \Theta c_{si}| = o,$$
$$|c_{is} - \varepsilon \alpha^{n-1} \Theta \alpha_{si}| = o.$$

und insbesondere für $\varrho = \pm 1$ diejenigen, welche hieraus für $\Theta = 1$ folgen.

Hieraus ergiebt sich der folgende Zusammenhang zwischen den Functionen

---

1) Ist überhaupt

$$a) \qquad \Sigma (c_{is} + \varrho \alpha_{is}) h_s = o,$$

so ist immer auch

$$b) \qquad \Sigma (c_{si} \varrho + \alpha_{si}) h_s = o.$$

Aus den Gleichungen

$$\Sigma c_{ms} c_{ki} a_{mk} = \alpha_{si}$$

folgt nämlich durch Multiplication mit $h_s$ und Anwendung von a)

$$\Sigma \alpha_{si} h_s = - \varrho \Sigma a_{mk} \alpha_{ms} c_{ki} h_s = - \varrho \Sigma c_{si} h_s$$

mithin das System b).

$$\Delta(\varrho) = |c_{ik} + \varrho\,\alpha_{ik}|,$$
$$\Delta^1(r) = |c_{ik} + r\,\alpha_{ki}|.$$

Ist $\varrho$ eine Wurzel von $\Delta(\varrho)$, welche der angegebenen Bedingung genügt, und $\sigma$ eine geeignete Wurzel von

8) $$A(\sigma) = |\alpha_{is} + \sigma\,\alpha_{si}| = o,$$

so ist

$$\sigma = \varrho^{n-2}\,\Theta\,\varepsilon,$$
$$r = -\varrho^{n-1}\,\Theta\,\varepsilon,$$

also

$$r = -\varrho\,\sigma,$$

eine Wurzel von $\Delta^1(r) = o$, und zugleich $t = \sigma\varrho^2$ eine Wurzel von

$$|c_{is} + t\,c_{si}| = o.$$

Weiter folgt:

Hat die characteristische Function $\Delta(\varrho)$ der Substitution lauter verschiedene Wurzeln, so muss die Function $A(\sigma)$ lauter einfache Elementartheiler haben.

Hat nämlich $\Delta(\varrho)$ die $n$ einfachen Wurzeln

$$\varrho_1,\ \varrho_2 \cdots \varrho_n,$$

so gehört zu jeder Wurzel $\varrho_h$ ein gewisses System von Werthen

$$\gamma_{ik_h} = x_{ih};$$

und man kann den Index $k$ so wählen, dass nicht alle $\gamma$ gleich Null sind. Zugleich ist die Determinante der $n^2$ Grössen $x_{ih}$; $i, h = 1, 2 \cdots n$ nicht Null.

In den Gleichungen 6) oder

9) $$\Sigma x_{ih}(\alpha_{is} + \sigma_h\,\alpha_{si}) = o,$$
$$s, h = 1, 2 \cdots n;$$

in denen

$$\sigma_h = \varrho_h^{n-2}\,\varepsilon\,\Theta_h$$

gesetzt ist, können nun alle $\sigma_h$ von einander verschieden sein. Dann ist dasselbe der Fall mit den Wurzeln von 8). Ist aber z. B. $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = \cdots \sigma_p$ so hat $A(\sigma)$ eine $p$-fache Wurzel, zu welcher nach 9) $p$ linear unab-

hängige Grössenreihen $x_{i1}, x_{i2}, \cdots x_{ip}$ gehören, d. h. zu dieser $p$-fachen Wurzel gehören nur einfache Elementartheiler von $A(\sigma)$.

Aus diesem Zusammenhang ergiebt sich gleichzeitig die Herleitung der Transformationscoefficienten $c_{ik}$, zunächst in dem allgemeinen Falle einer völlig willkürlichen Form $S$, den zuerst die Herren Christoffel und Kronecker behandelt haben[1]).

Ich nehme an, dass die Gleichung 8)

$$|\alpha_{is} + \alpha\, \alpha_{si}| = o$$

lauter verschiedene Wurzeln besitze, und dass auch keine derselben gleich $-1$ sei. Dann ist $m$ gerade und die $n$ Wurzeln

$$z_1, z_2 \cdots z_n,$$

sind paarweise zu einander reciprok. Sind nun

$$z_h, \quad z_l$$

irgend zwei derselben, so gehört zu jeder je ein System von Grössen

$$g_{hi}, \quad g_{li};$$
$$i = 1, 2 \cdots n,$$

welches die Gleichungen

$$\Sigma g_{hi}(\alpha_{ki} + z_h \alpha_{ik}) = o,$$
$$\Sigma g_{lj}(\alpha_{kj} + z_l \alpha_{jk}) = o,$$

befriedigt. Multiplicirt man die letzteren mit $g_{lk}$, $g_{hk}$ und summirt über $k$, so entsteht

$$\text{10)} \qquad \sum_{ik} g_{hi} g_{lk} \alpha_{ki} + z_h \sum_{ik} g_{hi} g_{lk} \alpha_{ik} = o,$$
$$\sum_{ik} g_{lk} g_{hi} \alpha_{ik} + z_l \sum_{ik} g_{lk} g_{hi} \alpha_{ki} = o,$$

wenn man gleichzeitig in der zweiten Gleichung die Indices $j$ und $k$ vertauscht und schliesslich $j$ durch $i$ ersetzt.

Setzt man

$$\Sigma g_{lk} g_{hi} \alpha_{ik} = [l\,h],$$

so folgt

$$[l\,h](1 - z_h z_l) = o.$$

1) a. a. O. Borchardt's Journal. Bd. 68.

Es ist demnach $[lh]$ gleich Null, sobald die Indices $h$ und $l$ zu nicht reciproken Wurzeln gehören.

Nunmehr bezeichne man die Unterdeterminanten der $g_{hi}$; $i, h = 1, 2 \cdots n$ durch $\Gamma_{hi}$. Dann ist

$$\Sigma \Gamma_{hm} g_{hn} = (mn),$$

und

$$\sum_{h,l} \Gamma_{ht} \Gamma_{l\tau} [lh] = \sum_{h,l,i,k} \Gamma_{ht} \Gamma_{l\tau} g_{lk} g_{hi} \alpha_{ik}$$

$$= \Sigma \alpha_{tk} \Gamma_{l\tau} g_{lk} = \alpha_{t\tau}.$$

Setzt man ferner

$$\text{11)} \qquad \sum_s (c_{is} - \varrho_h \alpha_{is}) g_{hs} = o,$$

wo die $\varrho_h$ vorläufig ganz willkürlich sein mögen, so wird durch Multiplication mit $\Gamma_{ht}$

$$\text{12)} \qquad c_{it} = \Sigma \varrho_h \alpha_{is} g_{hs} \Gamma_{ht},$$

$$c_{k\tau} = \Sigma \varrho_l \alpha_{k\sigma} g_{l\sigma} \Gamma_{l\tau},$$

also

$$\Sigma c_{it} c_{k\tau} a_{ik} = \Sigma \varrho_h \varrho_l \alpha_{s\sigma} g_{hs} g_{l\sigma} \Gamma_{ht} \Gamma_{l\tau}$$

$$= \Sigma \varrho_h \varrho_l [lh] \Gamma_{ht} \Gamma_{l\tau}.$$

Setzt man nun für den Fall, wo $[lh]$ nicht Null ist, d. h. die Indices $h$ und $l$ zu reciproken Wurzeln gehören,

$$\varrho_h \varrho_l = 1,$$

so wird

$$\Sigma c_{it} c_{k\tau} a_{ik} = \Sigma [lh] \Gamma_{ht} \Gamma_{l\tau} = \alpha_{t\tau};$$

und zugleich ist die Determinante der $c_{ik}$ gleich der Determinante der $\alpha_{ik}$ oder gleich

$$\frac{1}{A}$$

also die Transformation 12) eine eigentliche.

Diese Transformation gilt übrigens auch für den Fall eines ungeraden $n$, nur ist dann der betreffende Werth von $\varrho_h$, welcher der einen Wurzel $z = -1$ entspricht, gleich $\pm 1$ zu setzen. In diesem Falle bleiben also nur $\frac{1}{2}(n-1)$ Parameter $\varrho_h$ willkürlich, während im ersten $\frac{1}{2}n$ will-

kürliche Parameter vorhanden sind, wie schon Herr Christoffel angegeben hat.[1])

Um diese Darstellung der Transformationscoefficienten für den Fall nur einfacher Elementartheiler der Resolvente $n^{\text{ten}}$ Grades 8) zu erweitern, beweise ich zunächst einen allgemeinen Satz, der sich überhaupt auf die Lösungen der Gleichung[2])

$$|c_{ik} + \varrho d_{ik}| = o$$

bezieht.

Es seien

$$\varrho_1, \varrho_2 \cdots \varrho_p,$$

unter einander und von Null verschiedene Wurzeln dieser Gleichung, und

$$\begin{array}{l} \xi_i^{11}, \xi_i^{12}, \cdots \xi_i^{1h_1}; \\ \xi_i^{21}, \xi_i^{22}, \cdots \xi_i^{2h_2}; \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \xi_i^{p1}, \xi_i^{p2}, \cdots \xi_i^{ph_p}; \end{array}$$

solche $p$ Systeme von je $h_q$ Werthen, welche den Gleichungen

$$\Sigma(c_{ik} + \varrho d_{ik}) \xi_i = o$$

genügen. Es möge ferner eine lineare Relation zwischen den Werthen der $\xi$ stattfinden, dergestalt, dass

$$\Sigma \alpha_{qq_1} \xi_i^{qq_1} = o,$$

oder

$$\sum_{m=1}^{h_1} \alpha_{1m} \xi_i^{1m} + \sum_{m=1}^{h_2} \alpha_{2m} \xi_i^{2m} + \cdots \sum_{m=1}^{h_p} \alpha_{pm} \xi_i^{pm} = o$$

ist für $i = 1, 2 \cdots n$. Multiplicirt man dieselbe mit $c_{ik}$ und summirt nach $i$, so wird

$$\varrho_1 \sum_1^{h_1} \alpha_{1m} \xi_i^{1m} d_{ik} + \varrho_2 \sum_1^{h_2} \alpha_{2m} \xi_i^{2m} d_{ik} + \cdots + \varrho_p \sum_1^{h_p} \alpha_{pm} \xi_i^{pm} d_{ik} = o.$$

Unter der Voraussetzung, dass die Determinante der $d_{ik}$ nicht Null ist, folgt hieraus

---

1) Ebenda, S. 262.

2) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man hier die Determinanten der $c_{ik}$, $d_{ik}$ als von Null verschieden annehmen.

$$\varrho_1 \Sigma \alpha_{1m} \xi_i^{1m} + \varrho_2 \Sigma \alpha_{2m} \xi_i^{2m} + \cdots \varrho_p \Sigma \alpha_{pm} \xi_i^{pm} = o,$$

und somit auch

$$(\varrho_2 - \varrho_1) \Sigma \alpha_{2m} \xi_i^{2m} + \cdots (\varrho_p - \varrho_1) \Sigma \alpha_{pm} \xi_i^{pm} = o.$$

Aber aus dieser Identität folgt auf demselben Wege

$$\varrho_2 (\varrho_2 - \varrho_1) \Sigma \alpha_{2m} \xi_i^{2m} + \cdots \varrho_p (\varrho_p - \varrho_1) \Sigma \alpha_{pm} \xi_i^{pm} = o,$$

oder

$$(\varrho_3 - \varrho_2)(\varrho_3 - \varrho_1) \Sigma \alpha_{3m} \xi_i^{3m} + \cdots (\varrho_p - \varrho_2)(\varrho_p - \varrho_1) \Sigma \alpha_{pm} \xi_i^{pm} = o.$$

Indem man dies Verfahren fortsetzt, erhält man

$$\sum_{s=t+1}^{s=p} \prod_{\sigma=1}^{\sigma=t} (\varrho_s - \varrho_\sigma) \Sigma \alpha_{sm} \xi_i^{sm} = o.$$

Da keines der Producte

$$\prod_{\sigma=1}^{\sigma=t} (\varrho_s - \varrho_\sigma)$$

verschwinden kann, so folgt

Eine lineare Relation kann zwischen den Werthen der $\xi_i$ nur dann stattfinden, wenn sie unter den zu ein und derselben Wurzel gehörigen $\xi_i$ besteht. Sind die letzteren linear von einander unabhängig, so sind sie also überhaupt von einander linear unabhängig.

Insbesondere hat man also den Satz:

Sind die Elementartheiler der Function

$$|c_{ik} + \varrho\, d_{ik}|$$

alle einfach, so sind die Werthe der zugehörigen Grössen $\xi_i$ von einander linear unabhängig, d. h. ihre Determinante ist von Null verschieden.

Hat demnach die characteristische Function

$$|\alpha_{is} + z\, \alpha_{si}|$$

lauter einfache Elementartheiler, so verschwindet die Determinante der zugehörigen Grössen $g_{hi}$; $h, i = 1, 2 \cdots n$ nicht. Bezeichnet man die letztere durch $G$, so ist

$$G^2 : A$$

gleich der Determinante der Grössen $[lh]$. Diese Determinante zerfällt aber zufolge der Gleichungen

$$[lh] = o,$$

welche für je zwei nicht reciproke Wurzeln bestehen, in ebensoviele partiale Determinanten, als von einander verschiedene Wurzeln der characteristischen Function vorhanden sind. Man hat also den Satz:

Hat die characteristische Function

$$|a_{ik} + z\,a_{ki}|$$

lauter einfache Elementartheiler, so gehört zu jeder $k$ fachen Wurzel derselben eine $k$ reihige Determinante von zugehörigen Grössen

$$[l\,h]$$

welche von Null verschieden ist.[1])

Es seien nun unter dieser Voraussetzung die Wurzeln

$$\begin{aligned} z &= +1 && \alpha \text{ fach}, \\ z &= -1 && \beta \text{ fach}, \\ z &= z_h, z_h^{-1} && \gamma_h \text{ fach}; \; h = 1, 2 \cdots l, \end{aligned}$$

vorhanden. Der Wurzel $z = +1$ mögen die Gleichungen

$$\begin{aligned} &\Sigma g_{1i}(\alpha_{ki} + \alpha_{ik}) = o, \\ &\Sigma g_{2i}(\alpha_{ki} + \alpha_{ik}) = o, \\ &\cdot \quad \cdot \qquad\qquad\quad \cdot, \\ &\Sigma g_{\alpha i}(\alpha_{ki} + \alpha_{ik}) = o, \end{aligned}$$

entsprechen. Die Grössen

$$[lh] = \Sigma g_{lk}\, g_{hi}\, \alpha_{ik},$$

in denen die $l$, $h$ irgend zwei Indices aus der Reihe $1, 2 \cdots \alpha$ sind, bilden zufolge der Relationen 10)

$$[lh] + [hl] = o,$$

1) In dem S. 278 f. behandelten Falle lauter ungleicher Wurzeln sind daher die zu reciproken Wurzeln gehörigen $[lh]$ sämmtlich von Null verschieden.

ein alternirendes System, dessen Determinante nach dem zuvor bewiesenen Satze nicht verschwinden kann.[1]) Man kann daher durch eine congruente Transformation von nicht verschwindender Determinante nach Herrn Kronecker[2]) bewirken, dass die alternirende Form

$$\Sigma x_m y_n [mn]$$

übergeht in die canonische Form

$$\Sigma (X_i Y_k - X_k Y_i),$$

welche aus $\frac{1}{2}\alpha$ elementaren Formen besteht. Es giebt daher ein System von Coefficienten $\beta_{pq}$, $p, q = 1, 2 \cdots \alpha$ von nicht verschwindender Determinante, für welches identisch

$$\Sigma X_m \beta_{lm} Y_n \beta_{hn} [mn] = \Sigma (X_i Y_k - X_k Y_i) \tag{13}$$

wird. Setzt man nun

$$\begin{aligned} g_{01i} &= \Sigma \beta_{1m} g_{mi}, \\ g_{02i} &= \Sigma \beta_{2m} g_{mi}, \\ &\cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \\ g_{0\alpha i} &= \Sigma \beta_{\alpha m} g_{mi}; \\ m &= 1, 2 \cdot \cdot \alpha; \end{aligned}$$

so wird der entsprechende Ausdruck $[lh]_0$ für die $g_{0pi}$ gegeben durch

$$[lh]_0 = \Sigma \beta_{lm} \beta_{hn} [mn];$$

d. h. es wird nach 13)

$$\begin{aligned} [1\,2]_0 &= -[2\,1]_0 = 1, \\ [3\,4]_0 &= -[4\,3]_0 = 1, \\ &\vdots \\ [\alpha-1\,\alpha]_0 &= -[\alpha\,\alpha-1]_0 = 1, \end{aligned} \tag{14}$$

während alle übrigen Ausdrücke $[lh]_0$ gleich Null werden.

Der Wurzel $z = -1$ entsprechend, erhält man dagegen nach 10) ein symmetrisches System von $\beta^2$ Grössen $[mn]$, und durch eine geeignete Transformation lässt sich dann jedenfalls bewirken[3]), dass bei geradem $\beta$ die aus den den Gleichungen

1) $\alpha$ ist also nothwendig eine gerade Zahl, wie auch aus dem Kronecker'schen Satze folgt.

2) K. S. 405.

3) Vgl. wieder die Transformation des Herrn Kronecker, K. S. 405.

$$\Sigma g^0_{1i}(\alpha_{ki} - \alpha_{ki}) = o,$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\Sigma g^0_{\beta i}(\alpha_{ki} - \alpha_{ki}) = o,$$

genügenden Grössen $g^0_{pi}$ gebildeten Ausdrücke

$$[lh]^0;\ l, h = 1, 2 \cdots \beta;$$

die Bedingungen

$$\begin{aligned} [1\,2]^0 &= [2\,1]^0 = 1, \\ [3\,4]^0 &= [4\,3]^0 = 1, \\ &\vdots \\ [\beta - 1\,\beta]^0 &= [\beta\,\beta - 1]^0 = 1, \end{aligned} \tag{15}$$

erfüllen, während wieder alle übrigen Werthe $[lh]^0$ verschwinden. Bei ungeradem $\beta$ wird an Stelle der letzten der so eben angegebenen Gleichungen der nicht verschwindende Ausdruck

$$[\beta\,\beta]^0$$

treten.

Da endlich für die von $\pm 1$ verschiedenen Wurzeln überhaupt alle Ausdrücke $[mn]$ verschwinden, sobald sie nicht zu reciproken Wurzeln $z_h$, $z_h^{-1}$ gehören, so bedürfen die übrigen Grössen $g_{ih}$ keiner weiteren Transformation. Gehört also etwa zu der $\gamma_h$ fachen Wurzel $z_h$ das System

$$g^h_{j1},\ g^h_{j2} \cdots g^h_{jn};\ j = 1,\ 2 \cdots \gamma_h;$$

zu der Wurzel $z_h^{-1}$ das System

$$g_h{}^{j1},\ g_h{}^{j2} \cdots g_h{}^{jn};\ j = 1,\ 2 \cdots \gamma_h;$$

so sind nur die Ausdrücke

$$\Sigma g^h_{jk}\, g_h{}^{j_1 i}\, \alpha_{ik}$$

von Null eventuell verschieden. Diese Coefficienten sollen der Einfachheit halber durch

$$g_{j1},\ g_{j2} \cdots g_{jn}$$

bezeichnet werden, so dass der Index $j$ alle Werthe von 1 bis $n - (\alpha + \beta)$ durchläuft, und die Ausdrücke

$$[j_\mu\, j_\nu]$$

nur dann von Null verschieden sein können, wenn die aus der Reihe $1 \cdots n-(\alpha+\beta)$ gewählten Indices $j_\mu$, $j_\nu$ zu reciproken Wurzeln gehören.

Vermöge des so bestimmten Systems canonischer Elemente, dessen Determinante nicht Null ist, bilde man nun die Gleichungen

$$16)\qquad \begin{aligned} &\Sigma(c_{is}-\varrho_{0l}\,\alpha_{is})\,g_{0ls}=o;\; l=1,\ 2\cdots\alpha,\\ &\Sigma(c_{is}-\varrho_k^0\,\alpha_{is})\,g_{ks}^0=o;\; k=1,\ 2\cdots\beta,\\ &\Sigma(c_{is}-\varrho_j\,\alpha_{is})\,g_{js}=o;\; j=1,\ 2\cdots n-(\alpha+\beta), \end{aligned}$$

wobei die Parameter $\varrho_0$, $\varrho^0$, $\varrho$ vorläufig ganz willkürlich sind. Bezeichnet man die Unterdeterminanten der Coefficienten $g$, je nachdem sie nach $g_{0ps}$, $g_{ps}^0$, $g_{ps}$ genommen sind, durch $\Gamma_{0ps}$, $\Gamma_{ps}^0$, $\Gamma_{ps}$, so findet man wie vorhin

$$16)\qquad \begin{aligned} \alpha_{t\tau}=&(\Gamma_{01t}\Gamma_{02\tau}-\Gamma_{02t}\Gamma_{01\tau})+\cdots+(\Gamma_{0\alpha-1t}\Gamma_{0\alpha\tau}-\Gamma_{0\alpha t}\Gamma_{0\alpha-1\tau})\\ &+(\Gamma_{1t}^0\Gamma_{2\tau}^0+\Gamma_{2t}^0\Gamma_{1\tau}^0)+\cdots+(\Gamma_{\beta-1t}^0\Gamma_{\beta\tau}^0+\Gamma_{\beta t}^0\Gamma_{\beta-1\tau}^0)\\ &+\Sigma\Gamma_{j_\mu t}\Gamma_{j_\nu\tau}\,[j_\mu j_\nu], \end{aligned}$$

und zugleich wird

$$17)\qquad \begin{aligned} &\Sigma c_{it}\,c_{k\tau}\,a_{ik}\\ &=\varrho_{01}\varrho_{02}(\Gamma_{01t}\Gamma_{02\tau}-\Gamma_{02t}\Gamma_{01t})+\cdots\varrho_{0\alpha-1}\varrho_{0\alpha}(\Gamma_{0\alpha-1t}\Gamma_{0\alpha\tau}-\Gamma_{0\alpha t}\Gamma_{0\alpha-1\tau})\\ &+\varrho_1^0\varrho_2^0(\Gamma_{1t}^0\Gamma_{2\tau}^0+\Gamma_{2t}^0\Gamma_{1\tau}^0)+\cdots\varrho_{\beta-1}^0\varrho_\beta^0(\Gamma_{\beta-1t}^0\Gamma_{\beta\tau}^0+\Gamma_{\beta t}^0\Gamma_{\beta-1\tau}^0)\\ &+\Sigma\varrho_{j_\mu}\varrho_{j_\nu}\Gamma_{j_\mu t}\Gamma_{j_\nu\tau}[j_\mu j_\nu]. \end{aligned}$$

Die Transformationsbedingungen sind daher erfüllt, wenn man setzt

$$\begin{gathered} \varrho_{01}\varrho_{02}=\cdots=\varrho_{0\alpha-1}\varrho_{0\alpha}=1;\\ \varrho_1^0\varrho_2^0=\cdots=\varrho_{\beta-1}^0\varrho_\beta^0=1;\\ \varrho_1\varrho_2=1,\ \varrho_3\varrho_4=1,\ \cdots\varrho_{n-(\alpha+\beta)-1}\varrho_{n-(\alpha+\beta)}=1. \end{gathered}$$

Die Determinante der $c_{is}$ wird nach 16) gleich der mit dem Producte aller Parameter $\varrho_0$, $\varrho^0$, $\varrho$ multiplicirten Grösse $\frac{1}{A}$; d. h. die Transformation ist eine eigentliche mit $\frac{1}{2}n$ willkürlichen Parametern, während bei ungeradem $n$, wie leicht zu sehen, nur $\frac{1}{2}(n-1)$ willkürliche Parameter auftreten.

Man erhält vermöge eines anderen Systemes canonischer Elemente auch uneigentliche Transformationen, sobald $\beta > o$

ist. Man kann nämlich durch eine cogrediente Transformation bewirken, dass die symmetrische zu den $\beta^2$ Grössen $[mn]$ gehörige Form in eine Summe von Quadraten verwandelt wird, d. h. dass an Stelle der Relationen 15) die folgenden

$$[ii]^0 = 1;\ i = 1,\ 2 \cdots \beta,$$
$$[ik]^0 = o;\ i \gtrless k$$

treten. Alsdann treten an Stelle der zweiten Gruppe von Formen auf den rechten Seiten von 16) und 17) die Ausdrücke

$$\Gamma^0_{1t}\Gamma^0_{1\tau} + \Gamma^0_{2t}\Gamma^0_{2\tau} + \cdots \Gamma^0_{\beta t}\Gamma^0_{\beta\tau},$$
$$(\varrho^0_1)^2\Gamma^0_{1t}\Gamma^0_{1\tau} + (\varrho^0_2)^2\Gamma^0_{2t}\Gamma^0_{2\tau} + \cdots (\varrho^0_\beta)^2\Gamma^0_{\beta t}\Gamma^0_{\beta\tau}.$$

Den Transformationsbedingungen genügt man nun durch die Annahme

$$\varrho^0_i = \pm 1;$$

und man erhält daher uneigentliche Transformationen mit $\frac{1}{2}(n-\beta)$ oder $\frac{1}{2}(n-\beta-1)$ Parametern, wenn für eine ungerade Anzahl von Indices $i$ der Werth $-1$ gewählt wird. In der That ist auch für die Existenz uneigentlicher Transformationen nothwendig und hinreichend[1]), dass die Function

$$|S + \varrho S^1|$$

einen Elementartheiler von der Form $(\varrho + 1)^{2k+1}$ hat.

## § V.

### Transformation von Formen mit verschwindender Determinante.

Ich schliesse hieran einige Bemerkungen über die Transformation von Formen mit verschwindender Determinante, welche, soviel mir bekannt, überhaupt bisher nicht näher in Betrachtung gezogen ist.

Wenn die Substitution $U$ die Form $S + \varrho S^1$ in sich transformirt, so transformirt sie auch die Form $S$ in sich selbst, falls $\varrho^2$ nicht gleich Eins ist.

---

1) Vgl. Frobenius, Borchardt's Journal Bd. 86, S. 47.

Denn aus

$$U^1(S+\varrho S^1)U=S+\varrho S^1$$

folgt durch Uebergang zu den conjugirten Formen

$$U^1(S^1+\varrho S)U=S^1+\varrho S,$$

also auch

$$U^1SU(1-\varrho^2)=S(1-\varrho^2);$$

mithin unter der genannten Voraussetzung

$$U^1SU=S.$$

Wofern daher die Determinante von $S+\varrho S^1$ nicht identisch verschwindet, kann man $\varrho$ einen von $\pm 1$ verschiedenen Werth ertheilen, und damit die Transformation auf die einer Form von nicht verschwindender Determinante zurückführen.

Verschwindet aber jene Determinante identisch, so kann $S$ durch eine cogrediente Transformation $V$ auf eine Form $\Sigma$ reducirt werden, welche nur von den einer Form $E_2$ entsprechenden Variabelen $x_1y_1$, $x_2y_2, \cdots x_{n_1}y_{n_1}$, wo $n_1 \leqq n$, abhängig ist[1]).

Setzt man nämlich

$$V^1SV=\Sigma,$$
$$V^{-1}UV=W,$$

so ist

$$W^1\Sigma W=\Sigma.$$

Falls nun die Determinante $|\Sigma+\varrho\Sigma^1|$ nicht identisch verschwindet, kann man gleich $|\Sigma|$ als von Null verschieden voraussetzen. Dann ist aber

$$E_2W^1E_2\Sigma E_2WE_2=\Sigma, \tag{1}$$

also auch

$$u=E_2WE_2$$

eine Form von $n_1$ Variabeln, welche $\Sigma$ in sich transformirt und deren Determinante $|u|$ nicht Null sein darf. Und zugleich ist für $E_1+E_2=E$

$$E_1W^1\Sigma W=o,$$

oder, da die Determinanten $|W|$ und $|\Sigma|$ nicht Null sind,

1) Vgl. K., § 3, IV. 1 ff.

$$E_2 W E_1 = o;$$

d. h. es verschwinden alle Coefficienten $W_{i_2 k_1}$ in der Form

$$W = \Sigma W_{ik} x_i y_k = \Sigma W_{i_1 k_1} x_{i_1} y_{k_1} + \Sigma W_{i_2 k_1} x_{i_2} y_{k_1} + \Sigma W_{i_1 k_2} x_{i_1} y_{k_1} + \Sigma W_{i_2 k_2} x_{i_2} y_{k_2}.$$

Damit ist die Transformation vollständig bestimmt, denn die Coefficienten $W_{i_2 k_2}$ sind aus der Gleichung 1) zu entnehmen, während die $W_{i_1 k_1}$, $W_{i_1 k_2}$ vollkommen willkürlich bleiben.

Wenn aber die Determinante von $\Sigma + \varrho \Sigma^1$ identisch verschwindet, so ist, da die Anzahl der in $\Sigma$ vorkommenden Variabeln durch cogrediente Transformation nicht mehr verkleinert werden kann,

$$\Sigma = S_\alpha + S_\beta,$$

wo

$$S_\alpha = x_1 y_2 + x_2 y_3 + \cdots x_{m-1} y_m,$$ [1])

und $m$ eine ungerade Zahl ist, während $S_\beta$ nur von den in $E_\beta$ vorkommenden Variabeln abhängt und die Determinante von $S_\beta$ nicht Null ist. Man erhält alsdann die Gleichungen

$$2) \qquad E_2 W^1 E_2 \Sigma E_2 W E_2 = \Sigma,$$

$$3) \qquad \begin{cases} E_1 W^1 E_2 \Sigma = o, \\ \Sigma E_2 W E_1 = o, \end{cases}$$

die im Wesentlichen auf die Gleichungen 2) zurückkommen, da die Gleichungen 3) linear sind. Aber auch die Gleichungen 2) lassen sich noch weiter reduciren.

Ich betrachte zunächst den Fall, wo $\Sigma = S_\alpha$, d. h. ich bestimme alle cogredienten Transformationen von $m$ Variabeln der Form $S_\alpha$ in sich selbst. Setzt man an Stelle von $x_i$

$$\Sigma c_{ik} x_k,$$

so lauten die Transformationsrelationen

$$c_{1k} c_{2l} + c_{2k} c_{3l} + \cdots c_{m-1\,k} c_{ml} = (k\,l);$$

---

1) Vgl. K. § 3, IV, 1.

wo $(kl)$ gleich Eins zu setzen ist, wenn $k = l - 1$, sonst aber die Null bedeutet. Bezeichnet man die ersten Unterdeterminanten der $c_{ik}$ durch $\Gamma_{ik}$, so erhält man die Bedingungen

$$\begin{array}{ll} c_{s-1,1} = \Gamma_{s2}, & c_{s+1,1} = o, \\ c_{s-1,2} = \Gamma_{s3}, & c_{s+1,2} = \Gamma_{s1}, \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ c_{s-1,n-1} = \Gamma_{sn}, & c_{s+1,n-1} = \Gamma_{s,n-2} \\ c_{s-1,n} = o, & c_{s+1,n} = \Gamma_{s,n-1}. \end{array}$$

Diesen Gleichungen zufolge wird eine grosse Zahl von Coefficienten $c_{ik}$ gleich Null. Führt man die so reducirte Anzahl in das Transformationsproblem ein, und beachtet, dass die Determinante der $c_{ik}$ nicht verschwinden darf, so ergiebt sich für die $c_{ik}$ folgendes Schema

$$\begin{array}{ccccccccc} \alpha & \beta & o & \gamma & o & \delta & o & \cdot\cdot\cdot \\ o & \frac{1}{\alpha} & o & o & o & o & o & \cdot\cdot\cdot \\ o & -\beta & \alpha & \beta & o & \gamma & o & \cdot\cdot\cdot \\ o & o & o & \frac{1}{\alpha} & o & o & o & \cdot\cdot\cdot \\ o & -\gamma & o & -\beta & \alpha & \beta & o & \cdot\cdot\cdot \\ o & o & o & o & o & \frac{1}{\alpha} & o & \cdot\cdot\cdot \\ o & -\delta & o & -\gamma & o & -\beta & \alpha & \cdot\cdot\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot \end{array}$$

dessen Anordnung sofort verständlich ist, sowie man die der Hauptdiagonale parallelen Elemente betrachtet; die $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ sind dabei vollkommen willkürliche Parameter; die Substitution selbst lautet:

$$\begin{array}{ll} x_1 = & \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_4 + \delta x_6 + \cdots \\ x_2 = & \frac{1}{\alpha} x_2 \\ x_3 = & -\beta x_2 + \alpha x_3 + \beta x_4 + \gamma x_6 + \cdots \\ x_4 = & \frac{1}{\alpha} x_4 \\ x_5 = & -\gamma x_2 - \beta x_4 + \alpha x_5 + \beta x_6 + \cdots \\ x_6 = & \frac{1}{\alpha} x_6 \\ x_7 = & -\delta x_2 - \gamma x_4 - \beta x_6 + \alpha x_7 + \cdots \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{array}$$

Daraus ergiebt sich:

Jede Transformation welche die Form $S_\alpha$ in sich cogredient verwandelt, hat die Determinante $\alpha$, sie enthält im allgemeinen $p+1$ Parameter, und ihre characteristische Function hat nur $p+1$ einfache Elementartheiler $\varrho-\alpha$ und $p$ einfache Elementartheiler von der Form $\varrho-\frac{1}{\alpha}$, wenn $m=2p+1$.

Die Form

$$a_1 x_1 y_2 + a_2 x_2 y_3 + \cdots a_{m-1} x_{m-1} y_m$$

reducirt man durch die cogrediente Transformation

$$x_i = \alpha_i \xi_i$$

auf die Form $S_\alpha$, wenn man setzt

$$\alpha_{2p+1} = \frac{a_1\, a_3 \cdot\cdot\, a_{2p-1} \cdot \alpha_1}{a_2\, a_4 \cdot\cdot\, a_{2p}},$$

$$\alpha_{2p} = \frac{a_2\, a_4 \cdot\cdot\, a_{2p-2}}{a_1\, a_3 \cdot\cdot\, a_{2p-1} \cdot \alpha_1}.$$

Auch bei geradem $m=2p$ lässt sich die cogrediente Transformation leicht bewerkstelligen, wie hier beiläufig bemerkt werden mag. Man erhält zunächst folgendes System von Coefficienten $c_{ik}$

$$\begin{array}{cccccccccc}
\alpha & 0 & c_{13} & 0 & c_{15} & 0 & c_{17} & 0 & \cdot & \cdot \\
0 & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \alpha & 0 & c_{13} & 0 & c_{15} & 0 & \cdot & \cdot \\
0 & c_{42} & 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & c_{13} & 0 & \cdot & \cdot \\
0 & c_{62} & 0 & c_{42} & 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & \cdot & \cdot \\
0 & c_{82} & 0 & c_{62} & 0 & c_{42} & 0 & \frac{1}{\alpha} & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

und eine directe Vergleichung der Transformationsbedingungen liefert dann noch $p-1$ Gleichungen, aus denen man linear die Werthe der $c_{42}, c_{62}, c_{82} \cdots$ bestimmen kann.

Ich betrachte endlich noch die cogrediente Transformation der Form

$$S_\alpha + S_\beta.$$

Ist $m$ wieder eine ungerade Zahl $2p+1$, so findet man für die mit den Grössen $u$, $v$ geränderte Determinante der Form

$$S_\alpha - \varrho S_\alpha^1$$

oder

$$H = \begin{vmatrix} o & 1 & o & o & . & . & u_1 \\ -\varrho & o & 1 & o & . & . & u_2 \\ o & -\varrho & o & 1 & . & . & u_3 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ o & o & o & o & . & . & u_m \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & . & . & o \end{vmatrix},$$

den Ausdruck

$$H = -(v_m \varrho^p + v_{m-2}\varrho^{p-1} + \cdot\cdot + v_1)(u_m + \varrho u_{m-2} + \cdot\cdot u_1 \varrho^p)$$

Versieht man jetzt die Determinante von

4) $$S_\alpha - \varrho S_\alpha^1 + S_\beta - \varrho S_\beta^1$$

mit einem Rande gebildet aus den Grössen $u_i$, $v_k$ $i, k = 1, 2 \cdot\cdot n$, so entsteht als Werth dieser geränderten Determinante

5) $$H \,|\, S_\beta - \varrho S_\beta^1 \,|$$

da die Determinante von $S_\alpha - \varrho S_\alpha^1$ identisch verschwindet. Multiplicirt man ferner unter der Voraussetzung

$$\sum a_{ik} c_{im} c_{kn} = a_{mn},$$

die Form

$$A_{uv} = \begin{vmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} & u_1 \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & a_{nn} & u_n \\ v_1 & . & . & v_n & v \end{vmatrix}$$

mit dem Quadrat der Substitutionsdeterminante, so entsteht, falls letztere gleich $\varepsilon$ und

6) $$\sum c_{si} u_s = u_i^1; \quad i = 1, 2 \cdot\cdot n,$$

$$\sum c_{sk} v_s = v_k^1; \quad k = 1, 2 \cdot\cdot n,$$

gesetzt wird,

7) $$\varepsilon^2 A_{uv} = A_{u^1 v^1}.$$

Ersetzt man in dieser Gleichung die Coefficienten $a_{ik}$ durch die der Form 4) und berücksichtigt den in 5) gegebenen Werth, so ergiebt sich die Identität

$$\varepsilon^2 (v_m \varrho^p + v_{m-2} \varrho^{p-1} + \cdots v_1)(u_m + \varrho u_{m-2} + \cdots u_1 \varrho^p)$$
$$= (v_m^1 \varrho^p + v_{m-2}^1 \varrho^{p-1} + \cdots v_1^1)(u_m^1 + \varrho u_{m-2}^1 + \cdots u_1^1 \varrho^p),$$

welche unter der Voraussetzung von 6) besteht. Differentiirt man dieselbe nach den Variabeln $v_i$, $u_j$ wenn $i$ und $j$ irgend zwei Zahlen aus der Reihe

$$2, 4, 6, \cdots 2p, \; 2p+2, \; 2p+3, \cdots n$$

sind, so folgt, da diese linkerhand gar nicht vorkommen

$$o = (c_{im} \varrho^p + c_{im-2} \varrho^{p-1} + \cdots c_{i1})(c_{jm} + \varrho c_{jm-2} + \cdots \varrho^p c_{j1})$$

d. h. es sind alle Coefficienten

$$c_{i1}, \; c_{i3}, \; c_{i5} \cdots c_{i\,2p+1},$$

gleich Null.

Differentiirt man dagegen nach $v_{m-2i}$, $u_{m-2j}$ wo $i, j$ irgend zwei Zahlen aus der Reihe

$$o, \; 1, \; 2 \cdots p,$$

sind, so folgt

$$\varepsilon^2 \varrho^{p+j-i} = (\varrho^p c_{m-2i,m} + \varrho^{p-1} c_{m-2i,m-2} + \cdots c_{m-2i,1})$$
$$+ (c_{m-2j,m} + \varrho c_{m-2j,m-2} + \cdots \varrho^p c_{m-2j,1})$$

und hieraus folgert man leicht, dass alle Coefficienten $c_{qr}$, welche nur ungerade Indices aus der Reihe

$$1, 3, \cdots 2p+1$$

enthalten, Null sind, mit Ausnahme von

$$c_{11} = c_{33} = \cdots = c_{mm} = \alpha,$$

wobei

$$\alpha = \pm \varepsilon$$

ist.

Die Substitution hat daher folgende Gestalt:

$$
\begin{array}{l}
c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{14}x_4 + c_{16}x_6 + \cdots c_{1\,2p}x_{2p} + \Sigma c_{1h}x_h \\
\qquad c_{22}x_2 + c_{24}x_4 + c_{26}x_6 + \cdots c_{2\,2p}x_{2p} + \Sigma c_{2h}x_h \\
c_{33}x_3 + c_{32}x_2 + c_{34}x_4 + c_{36}x_6 + \cdots c_{3\,2p}x_{2p} + \Sigma c_{3h}x_h \\
\qquad c_{42}x_2 + c_{44}x_4 + c_{46}x_6 + \cdots c_{4\,2p}x_{2p} + \Sigma c_{4h}x_h \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\qquad c_{2p,\,2}x_2 + c_{2p,\,4}x_4 + \cdots c_{2p,\,2p}x_{2p} + \Sigma c_{2p\,h}x_h \\
c_{2p+1,\,2p+1}x_{2p+1} + c_{2p+1,\,2}x_2 + c_{2p+1,\,4}x_4 + \cdots c_{2p+1,\,2p}x_{2p} + \Sigma c_{2p+1h}x_h \\
\qquad c_{s,\,2}x_2 + c_{s4}x_4 + \cdots c_{s,\,2p}x_{2p} + \Sigma c_{sh}x_h \\
\qquad s,\ h = 2p+2,\ 2p+3, \cdots n.
\end{array}
$$

Führt man diese Coefficienten in die Bedingung ein, dass die Form $S_\alpha + S_\beta$ in sich selbst übergehen soll, so ergiebt sich

$$
\begin{array}{l}
c_{24} = c_{26} = \cdots = c_{2\,2p} = c_{2h} = o, \\
c_{42} = c_{46} = \cdots = c_{4\,2p} = c_{4h} = o, \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
c_{2p\,2} = c_{2p\,6} = \cdots = c_{2p\,2p} = c_{2p\,h} = o,
\end{array}
$$

so dass schliesslich die Substitution die Gestalt

$$
\begin{array}{l}
c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{14}x_4 + \cdots c_{1\,2p}x_{2p} + \Sigma c_{1h}x_h \\
\quad c_{22}x_2 \\
c_{33}x_3 + c_{32}x_2 + c_{34}x_4 + \cdots c_{3\,2p}x_{2p} + \Sigma c_{3h}x_h \\
\qquad c_{44}x_4 \\
c_{55}x_5 + c_{52}x_2 + c_{54}x_4 + \cdots c_{5\,2p}x_{2p} + \Sigma c_{5h}x_h \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\qquad\qquad c_{2p\,2p}x_{2p} \\
c_{2p+1,\,2p+1}x_{2p+1} + c_{2p+1,\,2}x_2 + c_{2p+1,\,4}x_4 + \cdots c_{2p+1,\,2p}x_{2p} + \Sigma c_{2p+1\,h}x_h \\
\qquad c_{s2}x_2 + c_{s4}x_4 + \cdots c_{s\,2p}x_{2p} + \Sigma c_{sh}x_h \\
\qquad s,\ h = 2p+2,\ 2p+3, \cdots n
\end{array}
$$

erhält, wobei

$$c_{11}c_{22} = c_{33}c_{44} = c_{55}c_{66} = c_{2p+1,\,2p+1}c_{2p,\,2p} = 1$$

sein muss.[1])

---

1) Für die Coefficienten

$$c_{l2},\ c_{l4}, \cdots c_{l,\,2p}$$
$$l = 1, 3, \cdots 2p+1$$

ergeben sich Bedingungen, durch welche dieselben linear durch die übrigen ausgedrückt werden.

Die characteristische Function jeder Substitution, welche die Form $S_\alpha + S_\beta$ in sich transformirt, hat demnach den Werth

$$(\alpha - \varrho)^{p+1} (\tfrac{1}{\alpha} - \varrho)^p M$$

wo $M$ die aus denjenigen $c_{ik}$ gebildete characteristische Function ist, die den

$$i, k = 2p+2, \ 2p+3, \cdots n$$

entsprechen.

## § VI.

**Symmetrische und alternirende Transformation einer bilinearen Form in sich.**

Die Substitution $U$, welche $S$ in sich transformirt, ist eine symmetrische, resp. alternirende, wenn

$$U = \pm U^1$$

ist. Die Gleichung $U^1 S U = S$ geht dadurch über in

1) $$U S U = \pm S.$$

Aus 1) folgt

$$US^2 = (US) S = \pm S (U^{-1} S) = S^2 U.$$

Jede Substitution dieser Art ist daher mit $S^2$ vertauschbar. Aber im allgemeinen ist sie auch schon mit $S$ selbst vertauschbar. Setzt man nämlich

$$US - SU = X,$$

so wird

$$SX = SUS - S^2 U,$$

$$XS = US^2 - SUS,$$

also

2) $$SX + XS = o.$$

Damit die Gleichung 2) eine von Null verschiedene Lösung für $X$ zulasse, ist nothwendig und hinreichend, dass die characteristische Function von $S$ entgegengesetzt gleiche Wurzeln habe.[1]) Man hat daher in

diesem Sinne zwei wesentlich verschiedene Transformationen zu unterscheiden. Die der ersten Art sind mit $S$ vertauschbar, die der zweiten sind es nur mit $S^2$, können aber nur bei Formen speciellen Characters vorhanden sein.

Ich betrachte zunächst die symmetrischen Transformationen der ersten Art.

Unter der Voraussetzung $US = SU$ folgt aus 1)

$$U^2 = E; \tag{3}$$

und umgekehrt wird jede symmetrische Transformation, welche dieser Gleichung genügt, und mit $S$ vertauschbar ist, auch $S$ in sich transformiren. Denn es ist

$$S = SU^2 = (SU)U = USU.$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung 3) erhält man aber leicht auf folgendem Wege. Da die characteristische Function einer Form $U$, die der Gleichung 3) genügt, nur einfache Elementartheiler von der Form $\varrho \pm 1$ haben kann, so ist $U$ der Form

$$E_1 - E_2$$

ähnlich, also

$$U = V(E_1 - E_2)V^{-1}.$$

Damit $U$ symmetrisch sei, muss

$$V(E_1 - E_2)V^{-1} = (V^1)^{-1}(E_1 - E_2)V^1,$$

oder

$$V^1 V(E_1 - E_2) = (E_1 - E_2)V^1 V \tag{4}$$

sein. Nun ist $V^1 V$ eine symmetrische Form $W$,[2]) deren Determinante nicht verschwindet. Aus der Gleichung 4) oder

$$W(E_1 - E_2) = (E_1 - E_2)W$$

folgt aber

$$E_2 W E_1 = - E_2 W E_1,$$

$$E_1 W E_2 = - E_1 W E_2;$$

1) Vgl. F. S. 41.
2) F. S. 4.

d. h. es ist $W$ zerlegbar in die beiden symmetrischen Formen $W_1 + W_2$, also auch

$$V^1 V = W_1 + W_2.$$

Nun bezeichne man mit $T = T_1 + T_2$ zwei cogrediente Substitutionen, welche die symmetrischen Formen $W_1$, $W_2$ von nicht verschwindender Determinante in $E_1$ und $E_2$ verwandeln. Dann wird

$$T^1 V^1 V T = E,$$

oder, wenn

$$V T = Z$$

gesetzt wird

$$Z Z^1 = E.$$

Es ist also $Z$ eine orthogonale Transformation.[1]) Und umgekehrt wird, wenn man unter $Z$ eine orthogonale Transformation versteht

$$V = Z T^{-1};$$

also auch

$$U = Z T^{-1} (E_1 - E_2) T Z^{-1} = Z (E_1 - E_2) Z^1.$$

Das heisst:

Jede symmetrische Form, welche der Gleichung 3) genügt, ist von der Gestalt

$$U = Z (E_1 - E_2) Z^1$$

wenn unter $Z$ eine orthogonale Form verstanden wird.

Die Bedingung der Vertauschbarkeit von $S$ und $U$ geht nun über in

$$Z(E_1 - E_2) Z^1 S = S Z (E_1 - E_2) Z^1,$$

oder

$$(E_1 - E_2) Z^1 S Z = Z^1 S Z (E_1 - E_2);$$

und dies erfordert, dass auch

$$Z^1 S Z$$

in zwei Formen $S_1 + S_2$ zerlegbar sei. Daraus folgt:

Soll eine Form symmetrische Transformationen der

1) F. S. 48.

ersten Art in sich zulassen, so muss sie durch orthogonale Transformation in die Summe zweier Formen zerlegbar sein.[1])

Für eine symmetrische Form ist diese Bedingung immer erfüllt, und es giebt hiernach ebensoviele symmetrische Transformationen der Form in sich selbst, als Zerlegungen dieser Art, die man mit Hülfe bekannter Untersuchungen leicht bewerkstelligen kann, vorhanden sind.

Eine alternirende Transformation der ersten Art muss nach 1) der Gleichung

$$5) \qquad U^2 = -E$$

genügen, d. h. es ist

$$U = i\,V(E_1 - E_2)\,V^{-1}.$$

Die Bedingung der Alternanz aber ist, wenn $V^1 V$ wieder durch $W$ bezeichnet wird,

$$W(E_1 - E_2) + (E_1 - E_2)\,W = o.$$

Die symmetrische Form $W$ muss also den Bedingungen

$$E_1 W E_1 = o, \qquad E_2 W E_2 = o$$

genügen.[2]) Da zugleich die Determinante von $W$ nicht Null sein darf, muss $n$ eine gerade Zahl $2m$ und die Anzahl der Variabelnpaare in $E_1$ und $E_2$ dieselbe sein.[3]) Die Bedingung der Vertauschbarkeit von $S$ und $U$ wird ferner

$$S V(E_1 - E_2) V^{-1} = V(E_1 - E_2) V^{-1} S$$

oder nach einigen Umformungen

$$V^1 S V(E_1 - E_2) + (E_1 - E_2) V^1 S V = o.$$

---

1) Dass dies auch hinreichend ist, erkennt man ohne weiteres.

2) Dies ist auch hinreichend. Denn aus den Gleichungen

$$E_1 Z E_1 = o, \qquad E_2 Z E_2 = o$$

folgt

$$E_1 Z E_2 + E_2 Z E_1 = Z;$$

also

$$Z(E_1 - E_2) + (E_1 - E_2) Z = o.$$

3) Man vergleiche den Satz X, F. S. 26.

Hieraus ergiebt sich wieder

$$E_1 V^1 S V E_1 = o, \quad E_2 V^1 S V E_2 = o.$$

Damit also eine Form $S$ von $2m$ Variabelnpaaren durch alternirende Transformation in sich transformirt werden könne, muss die Schaar

$$S + \varrho E$$

durch eine cogrediente Transformation $V$ in die Summe zweier Formen verwandelt werden können, von denen die erste nur die Variabeln $x_1, x_2, \cdot \cdot x_m; y_{m+1}, y_{m+2} \cdot \cdot y_n$ die zweite nur die Variabeln $y_1, y_2, \cdot \cdot y_m; x_{m+1}, x_{m+2} \cdot \cdot x_n$ enthält. Diese Bedingung ist auch hinreichend.

Man kann übrigens auch auf anderen Wegen leicht sämmtliche Lösungen der Gleichung 3) oder 5) erhalten. Da die characteristische Function von $U$ für den Fall $U^2 = E$ nur einfache Elementartheiler $\varrho \pm 1$ besitzt,[1]) so müssen $n$ von einander unabhängige Grössenreihen $\alpha$, $\beta$ vorhanden sein, welche die Gleichungen

$$\begin{aligned} &\Sigma c_{ik} \alpha_k^r = \alpha_i^r, \qquad r = 1, 2 \cdots \varrho, \\ &\Sigma c_{ik} \beta_k^s = -\beta_i^s \qquad s = 1, 2 \cdots \sigma; \\ &\varrho + \sigma = n, \end{aligned}$$

befriedigen, und die Determinante der $\alpha$, $\beta$ verschwindet dabei nicht. Hieraus folgt sofort, wenn man unter $\gamma$ irgend eine der $n$ Grössenreihen $\alpha$ oder $\beta$ versteht

$$\Sigma c_{ik} c_{li} \gamma_k = \gamma_l;$$

oder, da die Determinante der $\gamma$ nicht Null ist

$$\Sigma c_{li} c_{ik} = (lk).$$

Soll endlich $c_{ik} = c_{ki}$ sein, so folgt

$$6) \qquad \begin{aligned} &\Sigma \alpha_i^p \beta_i^q = o; \\ &p = 1, 2 \cdots \varrho, \\ &q = 1, 2 \cdots \sigma; \end{aligned}$$

und diese Bedingungen 6) sind auch hinreichend, wenn die Substitution

1) Vgl. F., S. 15.

eine symmetrische werden soll;[1]) diese selbst endlich eigentlich oder uneigentlich, je nachdem $\sigma$ eine gerade oder ungerade Zahl ist. Soll dagegen $U$ alternirend sein, so ist zu setzen

$$\Sigma c_{ik} \alpha_k^r = i \alpha_i^r, \qquad r = 1, 2 \cdots \varrho$$
$$\Sigma c_{ik} \beta_k^s = -i \beta_i^s \quad s = 1, 2 \cdots \sigma; \ \varrho + \sigma = n.$$

Demgemäss wird

$$\Sigma c_{ik} \alpha_k^r \alpha_i^{r1} = -\Sigma \alpha_i^r \alpha_i^{r1},$$
$$\Sigma c_{ik} \alpha_k^{r1} \alpha_i^r = -\Sigma \alpha_i^r \alpha_i^{r1}.$$

Damit $c_{ik} + c_{ki} = o$ werde, muss also

7)
$$\Sigma \alpha_i^r \alpha_i^{r1} = o,$$
$$\Sigma \beta_i^s \beta_i^{s1} = o,$$

sein für alle

$$r, r^1 = 1, 2 \cdots \varrho$$
$$s, s^1 = 1, 2 \cdots \sigma.$$

Da die Determinante der $\alpha$, $\beta$ nicht Null sein darf, so folgt noch $\varrho = \sigma = \frac{n}{2}$, und es ergiebt sich auch hier, dass die characteristische Function der alternirenden orthogonalen Formen je $\frac{n}{2}$ einfache Elementartheiler von der Gestalt $\varrho \pm i$ besitzt. Diese Transformationen können aber nicht wie die symmetrischen rational hergestellt werden, sondern erfordern die Lösung des Systems von quadratischen Gleichungen 7).

Dass die Gleichungen 6), 7) hinreichend zur Bestimmung der $c_{ik}$ sind, ergiebt sich leicht. Setzt man

$$\Sigma c_{ik} \alpha_k^r = \alpha_i^r, \qquad r = 1, 2 \cdots \varrho,$$
$$\Sigma c_{ik} \beta_k^s = -\beta_i^s, \quad s = 1, 2 \cdots \sigma,$$
$$\Sigma c_{ik} u_k = X,$$

so wird

1) Diese Formeln zur Bildung aller symmetrischen orthogonalen Formeln habe ich in etwas anderer Gestalt bereits in meiner Arbeit, Die Liniengeometrie in ihrer Anwendung auf die Flächen zweiten Grades, Mathematische Annalen, Bd. X, S. 154, angegeben.

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^1 & . & . & \alpha_n^1 & -\alpha_i^1 \\ . & . & . & . & . \\ \alpha_1^\varrho & . & . & \alpha_n^\varrho & -\alpha_i^\varrho \\ \beta_1^1 & . & . & \beta_n^1 & +\beta_i^1 \\ . & . & . & . & . \\ \beta_1^\sigma & . & . & \beta_n^\sigma & +\beta_i^\sigma \\ u_1 & . & . & u_n & -X \end{vmatrix} = o,$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit der Determinante der $\alpha$, $\beta$, so entsteht vermöge der Gleichungen 6) wenn man

$$\Sigma \alpha_i^p \alpha_i^q = (pq) = (qp); \qquad p, q = 1, 2 \cdots \varrho$$

$$\Sigma \beta_i^{p^1} \beta_i^{q^1} = (p^1 q^1) = (q^1 p^1); \quad p^1, q^1 = 1, 2 \cdots \sigma$$

setzt,

$$\begin{vmatrix} (1\,1) & . & . & (1\varrho) & o & . & . & o & -\alpha_i^1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ (\varrho\,1) & . & . & (\varrho\varrho) & o & . & . & o & -\alpha_i^\varrho \\ o & . & . & o & (1\,1) & . & . & (1\sigma) & \beta_i^1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ o & . & . & o & (\sigma 1) & . & . & (\sigma\sigma) & \beta_i^\sigma \\ \alpha_k^1 & . & . & \alpha_k^\varrho & \beta_k^1 & . & . & \beta_k^\sigma & c_{ik} \end{vmatrix} = o;$$

d. h. es ist

$$c_{ik} = c_{ki}.$$

Ist andererseits

$$\Sigma c_{ik} \alpha_k^r = i \alpha_i^r, \qquad r, s = 1, 2 \cdots m; \; m = \tfrac{n}{2},$$

$$\Sigma c_{ik} \beta_k^s = -i \beta_i^s,$$

$$\Sigma c_{ik} u_k = X,$$

so wird unter der Voraussetzung

$$\Sigma \alpha_i^p \beta_i^q = (pq); \qquad p, q = 1, 2 \cdots m$$

$$\begin{vmatrix} o & . & . & o & (1\,1) & . & . & (1m) & -i\alpha_i^1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ o & . & . & o & (m1) & . & . & (mm) & -i\alpha_i^m \\ (1\,1) & . & . & (m1) & o & . & . & o & +i\beta_i^1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ (1m) & . & . & (mm) & o & . & . & o & +i\beta_i^m \\ \alpha_k^1 & . & . & \alpha_k^m & \beta_k^1 & . & . & \beta_k^m & -c_{ik} \end{vmatrix} = o$$

und hieraus folgt sofort

$$c_{ik} + c_{ki} = o.$$

Die Bestimmung der symmetrischen resp. alternirenden Transformation zweiter Art kann hier nicht weiter ausgeführt werden. Ich behandele hier nur diejenigen Transformationen $U$, für welche $|U+E|$ oder $|U-E|$ von Null verschieden ist, bei denen also die allgemeinen Formeln des § VII zur Anwendung kommen.

Soll die Form

$$U = (E - TS)(E - T^1 S^1)^{-1},$$

in welcher $T$ der Gleichung

$$8) \qquad ST + S^1 T^1 = o,$$

zu genügen hat, symmetrisch sein, so folgt

$$9) \qquad TS + ST = o.$$

Aus den Gleichungen 8) und 9) folgt

$$ST = T^1 S^1.$$

d. h. $ST$ ist eine symmetrische Form $Z$. Setzt man aber

$$ST = Z,$$

so tritt an Stelle von 8) und 9) die Gleichung

$$10) \qquad ZS + SZ = o,$$

welche durch eine symmetrische Form $Z$ befriedigt werden muss.

Unter der Voraussetzung, dass $S$ eine Form ist, deren characteristische Function entgegengesetzt gleiche Wurzeln besitzt, existiren nun überhaupt Lösungen der Gleichung

$$XS + SX = o.$$

Ist aber $S$ eine symmetrische Form, so wird gleichzeitig

$$X^1 S + SX^1 = o,$$

also auch

$$(X + X^1)S + S(X + X^1) = o,$$

so dass in diesem Falle

$$Z = X + X^1$$

gesetzt werden kann.

Ist dagegen $S$ eine alternirende Form, so hat die Gleichung 10) immer Lösungen. Es existiren daher auch immer symmetrische Transformationen der zweiten Art, welche eine alternirende Form (von nicht verschwindender Determinante) in sich transformiren. In der That ist das System der Gleichungen 10), wenn man die Coefficienten von $Z$ durch $p_{ik}$ bezeichnet,

$$11) \qquad \Sigma a_{ik} p_{kl} + \Sigma p_{ik} a_{kl} = o$$
$$k, l = 1, 2 \cdots n.$$

Dieselben reduciren sich, wenn die $a_{ik}$ alternirend, die $p_{ik}$ symmetrisch vorausgesetzt werden, auf $n\left(\frac{n-1}{2}\right)$ Gleichungen, durch welche also die $p_{ik}$ von $n$ homogenen Parametern $p_{11}, p_{22} \cdots p_{nn}$ abhängig werden. Eine allgemeine alternirende Form lässt also immer symmetrische Transformationen mit $n$ Parametern in sich zu.

Sind dagegen die $a_{ik}$ symmetrisch, so reduciren sich die Gleichungen 11) nur auf $n\left(\frac{n+1}{2}\right)$ zwischen den homogenen Parametern $p_{ik}$, und die Bedingung einer gemeinsamen Lösung ist eben das Vorhandensein entgegengesetzt gleicher Wurzeln der characteristischen Function von $S$.

In speciellen Fällen kann die Mannigfaltigkeit der symmetrischen Transformationen einer alternirenden Form viel grösser werden. Die Kronecker'sche Normalform[1]) der alternirenden Formen von $2n = m$ Variabeln

$$S = (x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_3 y_4 - x_4 y_3) + \cdots (x_{m-1} y_m - x_m y_{m-1})$$

ergiebt z. B. im ganzen

$$\tfrac{1}{4} m(m+2)$$

von einander unabhängige Parameter in der symmetrischen Form $Z$, wovon man sich leicht überzeugt, so wie man beachtet, dass die Coefficienten des folgenden symmetrischen Schema's den Gleichungen 10) genügen

1) K. S. 405.

$$\begin{array}{rrrrrrl}
11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & \cdot\ \cdot \\
12 & -11 & 14 & -13 & 16 & -15 & \cdot\ \cdot \\
13 & 14 & 33 & 34 & 35 & 36 & \cdot\ \cdot \\
14 & -13 & 34 & -33 & 36 & -35 & \cdot\ \cdot \\
15 & 16 & 35 & 36 & 55 & 56 & \cdot\ \cdot \\
16 & -15 & 36 & -35 & 56 & -55 & \cdot\ \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot
\end{array}$$

in welchem jedes Paar von Ziffern einen völlig willkürlichen Parameter bedeutet, und die Form $Z$ wird daher:

$$\begin{aligned}
&p_{11}(x_1 y_1 - x_2 y_2) + p_{12}(x_1 y_2 + x_2 y_1) + p_{13}(x_1 y_3 + x_3 y_1 - x_2 y_4 - x_4 y_2) \\
&\quad + p_{14}(x_4 y_1 + x_1 y_4 + x_2 y_3 + x_3 y_2) + p_{15}(x_1 y_5 + x_5 y_1 - x_2 y_6 - x_6 y_2) \\
&\quad + p_{33}(x_3 y_3 - x_4 y_4) + \cdots .
\end{aligned}$$

## § VII.

### Rationale Lösung des Transformationsproblems.

Es sei $U$ eine Substitution, welche die Form $S$ (von nicht verschwindender Determinante) in sich cogredient transformirt. Dann bestehen die Gleichungen

$$1)\qquad \begin{aligned} U^1 S U &= S, \\ U^1 S^1 U &= S^1. \end{aligned}$$

Setzt man nun

$$2)\qquad R_\varrho = S(E\varrho - U)(E\varrho + U)^{-1},$$

so wird

$$R_\varrho^1 = (E\varrho + U^1)^{-1}(E\varrho - U^1)S^1;$$

oder unter Anwendung der Gleichung

$$U^1 S^1 = S^1 U^{-1}$$

auf den zweiten Factor, der Gleichung

$$(S^1)^{-1} U^1 = U^{-1}(S^1)^{-1}$$

auf den ersten

$$R_\varrho^1 = [(S^1)^{-1}\varrho + (S^1)^{-1}U^1]^{-1}(E\varrho - U^{-1}) = [(S^1)^{-1}\varrho + U^{-1}(S^1)^{-1}]^{-1}(E\varrho - U^{-1})$$
$$= S^1(E\varrho + U^{-1})^{-1}(E\varrho - U^{-1});$$

also

$$3)\qquad R_\varrho^1 = S^1\left(U + \frac{E}{\varrho}\right)^{-1}\left(U - \frac{E}{\varrho}\right).$$

Man hat demnach durch Vergleichung von 2) und 3), falls

$$\varrho_1\varrho = 1,$$

gesetzt wird

$$4)\qquad (S^1)^{-1}R_\varrho^1 = -S^{-1}R_{\varrho 1}.$$

Versteht man unter $\eta$ die positive oder negative Einheit, und setzt

$$5)\qquad R_\eta = S(E\eta - U)(E\eta + U)^{-1},$$

so muss diese Form der linearen Gleichung

$$6)\qquad R_\eta^1 = -S^1S^{-1}R_\eta$$

genügen.

Führt man endlich an Stelle der Form $R_\eta$ die neue Form

$$7)\qquad T_\eta = S^{-1}R_\eta S^{-1} = (E\eta - U)(E\eta + U)^{-1}S^{-1}$$

ein, so genügt dieselbe der Gleichung

$$8)\qquad T_\eta^1 S^1 = -T_\eta S,$$

oder

$$S^1T_\eta^1 = -ST_\eta,$$

wobei vorausgesetzt ist, dass die Determinante

$$|E\eta + U|$$

nicht verschwindet.

Aus der Gleichung 7) folgt aber umgekehrt

$$U(T_\eta S + E) = (E - T_\eta S)\eta,$$

oder

$$U = \eta(E - T_\eta S)(E + T_\eta S)^{-1};$$

und nach 8)

$$U = \eta(E - T_\eta S)(E - T_\eta^1 S^1)^{-1},$$
$$= \eta(S^{-1} - T_\eta)S(S^1)^{-1}(S^{1-1} - T_\eta^1)^{-1}.$$

Hieraus geht hervor, dass die Determinante von $U$ den Werth $\eta^n$ hat, da das Product der reciproken Formen rechterhand die Determinante $+1$ besitzt. Da nun bei ungeradem $n$ und eigentlicher Substitution die Determinante $|U-E|$ verschwindet, so wird diese Transformation im allgemeinen nur eine eigentliche sein können, indem $\eta=+1$ zu setzen ist. Denn die Determinante von

$$E+T_\eta S$$

kann im allgemeinen nicht verschwinden, da sie für hinreichend kleine Werthe der homogenen Coefficienten von $T_\eta$ sich von der Einheit beliebig wenig unterscheidet.

Eine uneigentliche Transformation kann bei geradem $n$ überhaupt aus der Formel 8) nicht erhalten werden, da in diesem Falle $|U+E\eta$ eine verschwindende Determinante hat. Dagegen wird bei ungeradem $n$ und uneigentlicher Transformation $\eta$ gleich $-1$ gesetzt werden können.

Man hat also den folgenden Satz:

Jede Substitution $U$, welche die Form $S$ von nicht verschwindender Determinante in sich cogredient transformirt, und für welche die Determinante von

$$U+E\eta$$

nicht verschwindet, lässt sich in einer einzigen Art auf die Gestalt

$$9) \qquad U=\eta(E-TS)(E+TS)^{-1}$$

bringen, falls $T$ der Gleichung

$$8) \qquad TS+T^1S^1=o$$

genügt. Unter Zugrundelegung der Form $R$, welche der Gleichung

$$8^a) \qquad (S^1)^{-1}R^1+S^{-1}R=o$$

genügt, wird dagegen $U$ die Form

$$9^a) \qquad U=\eta(S+R)^{-1}(S-R)$$

annehmen.

Dass aber umgekehrt auch jede Form $U$, welche aus der Gleichung

9) entnommen wird, $S$ cogredient in sich transformirt, sobald $T$ der Gleichung 8) genügt, ergiebt sich leicht auf folgendem Wege.

Man hat nämlich aus 9), wenn in dem ersten Factor

$$E - TS = 2E - (E + TS)$$

und

$$(E + TS)(E + TS)^{-1} = E$$

gesetzt wird,

$$\frac{U}{\eta} = 2(E + TS)^{-1} - E.$$

Nimmt man beiderseits die conjugirte Form, so ist[1])

$$\frac{U^1}{\eta} = 2(E + S^1 T^1)^{-1} - E,$$

also, wenn man diese letzteren Gleichungen mit einander multiplicirt und $\eta^2 = 1$ setzt,

$$U^1 S U = 4(E + S^1 T^1)^{-1} S (E + TS)^{-1} - 2(E + S^1 T^1)^{-1} S$$
$$- 2S(E + TS)^{-1} + S.$$

oder wenn

$$S^1 T^1 = -ST$$

gesetzt wird

$$U^1 S U =$$
$$4(E - ST)^{-1} S(E + TS)^{-1} - 2(E - ST)^{-1} S - 2S(E + TS)^{-1} + S.$$

Setzt man nun

$$X = 4(E - ST)^{-1} S(E + TS)^{-1} - 2(E - ST)^{-1} S - 2S(E + TS)^{-1},$$

so wird

$$(E - ST)X = 4S(E + TS)^{-1} - 2S - 2(E - ST)S(E + TS)^{-1},$$
$$(E - ST)X(E + TS) = 4S - 2S(E + TS) - 2(E - ST)S = o.$$

Wird jetzt vorausgesetzt, dass die Determinanten

---

1) Es ist also auch

$$U + \eta E = 2\eta(E + TS)^{-1},$$
$$U - \eta E = 2\eta TS(E + TS)^{-1},$$

d. h. die Determinante von $U - \eta E$ verschwindet nur dann, wenn $|T|$ Null ist, falls $T$ bereits den im Text angegebenen Bedingungen gemäss gewählt ist.

$$|E - ST|, \quad |E + TS|$$

was immer erfüllbar ist, nicht verschwinden, so folgt aus

$$(E - ST) X (E + TS) = o$$

für die Form $X$

$$X = o;$$

d. h. es ist

$$U^1 S U = X + S = S.$$

Damit ist der folgende Satz bewiesen:

Bezeichnet man mit $T$ eine Form, die der Gleichung 8) genügt, wobei $S$ eine beliebige Form ist, deren Determinante auch verschwinden kann, und verschwinden die Determinanten von

$$TS + E, \quad ST - E\text{[1]}$$

nicht, so wird durch die Substitution 9) die Form $S$ cogredient in sich transformirt, und zwar ist die Determinante von

$$U + \eta E = 2\eta (E + TS)^{-1}$$

nicht Null, während die Determinante von $U$ selbst den Werth

$$\eta^n$$

hat.

Der Beweis dieses Satzes lässt sich weit einfacher führen, wenn die Determinante von $S$ nicht verschwindet, was bei der so eben ausgeführten Betrachtung nicht vorausgesetzt zu werden braucht.

---

1) Diese Bedingungen reduciren sich übrigens, wie man leicht bemerkt auf eine einzige. Denn vermöge der Gleichung 8) ist

$$ST - \varrho E = -(S^1 T^1 + \varrho E),$$
$$|ST - \varrho E| = (-1)^n |TS + \varrho E|,$$

da conjugirte Formen gleiche Determinanten haben. Und wenn $|S|$ nicht Null ist, so folgt aus der Identität

$$ST - \varrho E = -S(T^1 S^1 + \varrho E) S^{-1}$$

ebenso die Gleichung

$$|ST - \varrho E| = (-1)^n |ST + \varrho E|.$$

Durch die vorige Untersuchung wird die Ermittelung aller nicht singulären Substitutionen $U$ auf die Lösung des linearen Systems 8), welches $n^2$ Gleichungen für die Coefficienten der Form $T$ repräsentirt, zurückgeführt. Alle diese Substitutionen können somit durch rationale Operationen bestimmt werden, insofern es nur erforderlich ist, das Verschwinden der Unterdeterminantensysteme der Coefficienten jener $n^2$ Gleichungen zu untersuchen. Der eigenthümliche Bau jener Gleichungen scheint es indessen nicht zu ermöglichen, eine solche Untersuchung mit den Hülfsmitteln der Determinantentheorie allein auszuführen, wenigstens ist mir dies nur in den einfachsten Fällen $n = 2, 3, 4$ in befriedigender Weise gelungen.

In etwas allgemeinerer Form lässt sich der vorhergehende Satz auch so ausdrücken:

Die vorhergehende Untersuchung liefert alle cogredienten Transformationen einer bilinearen Form in sich selbst auf rationalem Wege, mit alleiniger Ausnahme derjenigen Transformationen, welche mit jeder nicht singulären verbunden wieder eine singuläre bilden.

Ist nämlich $V$ irgend eine Transformation, $U$ eine nicht singuläre Transformation, so ist auch

$$W = UV$$

eine cogrediente Transformation von $S$. Ist nun $W$ nicht singulär, so lässt sich $W$ auf dem angegebenen Wege erhalten, und es wird

$$V = U^{-1} W.$$

Nur diejenigen Transformationen, deren Product mit jeder nicht singulären immer wieder eine singuläre liefert, und die auch nicht durch Grenzübergang aus den nicht singulären ableitbar sind, sind daher als „eigentlich singulär“ zu bezeichnen. Von dieser Art sind z. B. die uneigentlichen Transformationen einer Form gerader Ordnung.

## § VIII.

### Die Gleichung $TS + T^1 S^1 = o$.

Bezeichnet man die Coefficienten von $S$ durch $a_{ik}$, die der Form $T$ durch $p_{ik}$, so hat man das System der $n^2$ linearen Gleichungen zwischen den homogenen Unbekannten $p_{ik}$

$$1)\qquad \sum_k p_{ik} a_{kl} + \sum_k p_{ki} a_{lk} = o;\ i, l = 1, 2 \cdots n;$$

welches mit der Gleichung

$$2)\qquad TS + T^1 S^1 = o$$

gleichbedeutend ist. Dieses System von Gleichungen ist ein an und für sich sehr merkwürdiges. Bezeichnet man nämlich mit $N$ die grösste ganze in $\frac{n}{2}$ enthaltene Zahl, so lässt sich dasselbe bei völlig willkürlichen Werthen der $a_{ik}$ durch Werthe der $p_{ik}$ lösen, welche $N$ lineare homogene Parameter enthalten. Es müssen daher im allgemeinsten Falle noch sämmtliche $N-1^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten des Systemes 1) verschwinden. Hieraus folgt, dass die Zahl der von einander unabhängigen Lösungen des Systemes 1) mindestens gleich $N$ ist, welches auch die Werthe der $a_{ik}$ sein mögen, deren Determinante übrigens, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil angegeben wird, als nicht verschwindend vorausgesetzt werden soll.

Ich entwickele zunächst einige Eigenschaften derjenigen Formen, welche der Gleichung 2) genügen.

Wird die Determinante der Form $T$ durch $P$ bezeichnet, so ist

$$P = (-1)^n P.$$

1) Bei ungeradem $n$ verschwindet die Determinante von $T$ identisch.

Ferner folgt aus 2)

$$T(S - \varrho S^1) + (T^1 + \varrho T) S^1 = o.$$

also:

2) Verschwindet die Determinante von $T$, so muss die

Determinante der linearen Schaar $T+\varrho T^1$ identisch verschwinden.

3) Verschwindet die Determinante von $T$ nicht, so sind die Elementartheiler von $|S-\varrho S^1|$ identisch mit denen von

$$|T^1+\varrho T|.$$

Das Verhalten der Determinante $T+\varrho T^1$ kann man näher durch folgende Betrachtung präcisiren. Multiplicirt man die Determinante

$$\varDelta = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdot & \cdot & p_{1n} & p_{11} & p_{21} & \cdot & \cdot & p_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdot & \cdot & p_{nn} & p_{1n} & p_{2n} & \cdot & \cdot & p_{nn} \\ u_1^1 & u_2^1 & \cdot & \cdot & u_n^1 & v_1^1 & v_2^1 & \cdot & \cdot & v_n^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1^n & u_2^n & \cdot & \cdot & u_n^n & v_1^n & v_2^n & \cdot & \cdot & v_n^n \end{vmatrix}$$

mit

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdot & \cdot & a_{n1} & a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdot & \cdot & a_{nn} & a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn} \\ U_1^1 & U_2^1 & \cdot & \cdot & U_n^1 & V_1^1 & V_2^1 & \cdot & \cdot & V_n^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ U_1^n & U_2^n & \cdot & \cdot & U_n^n & V_1^n & V_2^n & \cdot & \cdot & V_n^n \end{vmatrix}$$

so ergiebt sich zufolge der Gleichungen

$$\Sigma p_{ik} a_{kl} + \Sigma p_{ki} a_{lk} = o$$

die Beziehung

$$\varDelta D = |\alpha_{ik}|\;|\beta_{ik}|,$$

wo

$$\alpha_{ik} = \Sigma p_{im} U_m^k + \Sigma p_{mi} V_m^k,$$

$$\beta_{ik} = \Sigma a_{mi} u_m^k + \Sigma a_{im} v_m^k.$$

Zerlegt man die Zahlen $1, 2 \cdots n$ das einemal in die Gruppe

$$i_1,\; i_2 \cdots i_\alpha; \quad k_1,\; k_2 \cdots k_\beta;$$

und ein zweites mal in die Gruppe

$$j_1,\; j_2 \cdots j_a; \quad \varkappa_1,\; \varkappa_2 \cdots \varkappa_b;$$

so, dass $\alpha + a = n$, während die Zahlen $i$ von den Zahlen $j$ nicht verschieden zu sein brauchen, setzt man ferner alle $U_r^\lambda$ gleich Null, deren

Indices $r$ gleich den $k_1, k_2 \cdots k_\beta$ sind, ebenso alle $V_s^\mu$ gleich Null, deren Indices $s$ gleich den $\varkappa_1\, \varkappa_2 \cdots \varkappa_b$ sind, und vergleicht die beiden Seiten der vorstehenden Determinantenrelation, so findet man:

$$P\begin{vmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_2 1} & \cdot & \cdot & a_{i_\alpha 1} & a_{1 j_1} & a_{1 j_2} & \cdot & \cdot & a_{1 j a} \\ a_{i_1 2} & a_{i_2 2} & \cdot & \cdot & a_{i_\alpha 2} & a_{2 j_1} & a_{2 j_2} & \cdot & \cdot & a_{2 j a} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_1 n} & a_{i_2 n} & \cdot & \cdot & a_{i_\alpha n} & a_{n j_1} & a_{n j_2} & \cdot & \cdot & a_{n j a} \end{vmatrix}$$

$$= A\begin{vmatrix} p_{1 i_1} & p_{1 i_2} & \cdot & \cdot & p_{1 i_\alpha} & p_{j_1 1} & p_{j_2 1} & \cdot & \cdot & p_{j a 1} \\ p_{2 i_1} & p_{2 i_2} & \cdot & \cdot & p_{2 i_\alpha} & p_{j_1 2} & p_{j_2 2} & \cdot & \cdot & p_{j a 2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n i_1} & p_{n i_2} & \cdot & \cdot & p_{n i_\alpha} & p_{j_1 n} & p_{j_2 n} & \cdot & \cdot & p_{j a n} \end{vmatrix}$$

wobei die letztere Determinante aus $P$ dadurch entsteht, dass in $P$ die Elemente in einer beliebigen Anzahl von Reihen durch die Elemente irgend welcher Reihen aus den conjugirten Elementen ersetzt werden. Es verschwindet daher mit $|T|$ nicht nur die Determinante von $|T + \varrho T^1|$ sondern überhaupt die Determinante

$$\begin{vmatrix} p_{11} + \varrho_1 p_{11} & p_{12} + \varrho_2 p_{21} & \cdot & \cdot & p_{1n} + \varrho_n p_{n1} \\ p_{21} + \varrho_1 p_{12} & p_{22} + \varrho_2 p_{22} & \cdot & \cdot & p_{2n} + \varrho_n p_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} + \varrho_1 p_{1n} & p_{n2} + \varrho_2 p_{2n} & \cdot & \cdot & p_{nn} + \varrho_n p_{nn} \end{vmatrix}$$

für alle Werthe von $\varrho_1, \varrho_2, \cdots \varrho_n$. Das letztere kann man übrigens durch Multiplication dieser Determinante mit $A$ leicht bestätigen.

4) Verschwindet die Determinante von $T$, so kann die Form $T$ stets durch congruente Transformation in eine Form $t$ verwandelt werden, welche weniger als $n$ Variabeln enthält, und deren Determinante nicht verschwindet.

Entweder ist dies nämlich von vorneherein der Fall, oder es giebt eine Form $W$ von nicht verschwindender Determinante, vermöge der die Gleichung

$$W^1 T W = A + t$$

besteht, in welcher

$$A = x_1 y_2 + x_2 y_3 + \cdots x_{k-1} y_k,$$

und $k$ eine ungerade Zahl ist, dagegen $t$ die Variabelnpaare $x_1 y_1, \cdots x_k y_k$

nicht enthält und eine nicht verschwindende Determinante besitzt. Setzt man nun

$$W^{-1} S^1 (W^1)^{-1} = s$$

so kann die Gleichung 2) auch in der Form

$$(W^1 T W)(W^{-1} S (W^1)^{-1}) + (W^1 T^1 W)(W^{-1} S^1 (W^1)^{-1}) = o$$

oder

$$(A + t) s + (A^1 + t^1) s^1 = o$$

geschrieben werden, und die Determinante von $s$ ist nicht Null. Durch Multiplication mit der der Form $A$ zugehörigen Form $E_1$ ergiebt sich

$$A s + A^1 s^1 = o,$$

oder

$$\frac{\partial s}{\partial y_1} y_2 + \frac{\partial s}{\partial y_2} y_3 + \cdots \frac{\partial s}{\partial y_{k-1}} y_k$$

$$+ \frac{\partial s^1}{\partial y_2} y_1 + \frac{\partial s^1}{\partial y_3} y_2 + \cdots \frac{\partial s^1}{\partial y_k} y_{k-1} = o$$

Daraus folgt aber

$$\frac{\partial s^1}{\partial y_2} = o, \quad \frac{\partial s}{\partial y_{k-1}} = o,$$

was mit der Bedingung, dass die Determinante von $s$ nicht Null ist, unverträglich ist. Daher kann $T$ auch nicht der zerlegbaren Form $A + t$ congruent sein, d. h. es kann überhaupt kein solcher Bestandtheil $A$ auftreten.

Man kann dies auch direct beweisen. Verschwindet nämlich die Determinante von

$$T = \Sigma p_{ik} x_i y_k,$$

so giebt es mindestens ein System von nicht sämmtlich verschwindenden Grössen $z$,

$$z_1, \; z_2 \cdot \cdot z_n,$$

für welches

$$\Sigma z_i p_{ik} = o; \quad k = 1, 2 \cdots n,$$

wird. Aus den Gleichungen 1) folgt dann durch Multiplication mit $z$ und Summation nach $i$

$$\Sigma z_i p_{ki} a_{lk} = o,$$

oder, da die Determinante von $S$ nicht Null ist,

$$\Sigma z_i p_{ki} = o.$$

Es sei nun $z_h$ eines der nicht verschwindenden $z$. Dann setze man:

$$3) \quad \begin{array}{llll} x_1 = X_1 + \frac{z_1}{z_h} X_h, & y_1 = Y_1 + \frac{z_1}{z_h} Y_h, \\ x_2 = X_2 + \frac{z_2}{z_h} X_h, & y_2 = Y_2 + \frac{z_2}{z_h} Y_h, \\ \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\ x_{h-1} = X_{h-1} + \frac{z_{h-1}}{z_h} X_h, & y_{h-1} = Y_{h-1} + \frac{z_{h-1}}{z_h} Y_h, \\ x_h = X_h \qquad , & y_h = Y_h \qquad , \\ \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\ x_n = X_n + \frac{z_n}{z_h} X_h, & y_n = Y_n + \frac{z_n}{z_h} Y_h. \end{array}$$

Führt man diese cogrediente Substitution mit der Determinante $+1$ an der Form $T$ aus, so ergiebt sich

$$T = \Sigma p_{ik} x_i y_k = \Sigma y_k p_{i_1 k} X_{i_1} = \Sigma p_{i_1 k_1} X_{i_1} Y_{k_1},$$

wo der Index 1 anzeigt, dass die Variabeln $X_h$, $Y_h$ rechter Hand nicht mehr auftreten. Bezeichnet man die Substitution 3) durch $V$, so geht $S$ durch die Substitution $(V')^{-1}$ in eine Form $s$ von $n$ Variabeln

$$s = \Sigma b_{ik} X_i Y_k$$

über, deren Determinante nicht Null ist. Die Coefficienten $p_{i_1 k_1}$ der transformirten Form $T$ müssen daher den Gleichungen

$$\Sigma p_{i_1 k_1} b_{k_1 l} + \Sigma p_{k_1 i_1} b_{l k_1} = o$$

genügen. Verschwindet nun wieder die Determinante der $p_{i_1 k_1}$, so giebt es auch ein System von Grössen

$$\zeta_1, \zeta_2 \cdots, \zeta_{n-1}$$

die nicht sämmtlich Null sind, und für welches

$$\Sigma p_{i_1 k_1} \zeta_{i_1} = o.$$

Dann ist aber auch

$$\Sigma p_{k_1 i_1} \zeta_{i_1} b_{lk_1} = o,$$

und hieraus folgt, wenn man mit den Unterdeterminanten der Elemente $b_{lk_1}$ multiplicirt und nach $l$ summirt,

$$\Sigma p_{k_1 i_1} \zeta_{i_1} = o.$$

Man kann demnach dieses Verfahren so lange fortsetzen, als überhaupt die Determinante der aus $T$ durch cogrediente Transformation entspringenden Formen verschwindet. Die Form $T$ kann also stets durch cogrediente Transformation in eine Form $t$ verwandelt werden, die nur noch die $n^1$ einer Form $E_1$ entsprechenden Variabelnpaare enthält, und deren Determinante nicht Null ist, d. h. es ist

$$V^1 T V = t.$$

Dabei ist nicht nur die Determinante von $V$ gleich Eins, sondern es ist auch

4) $$|E_1 V E_1| = 1, \quad E_1 V E_2 = o.$$

Bei geeigneter Bezeichnung der Indices der Variabeln von $T$ kann man es nämlich so einrichten, dass die Grössen $z, \zeta, \cdots$ welche nicht verschwinden, gerade den Indices $1, 2 \cdots k$ $(k = n - n^1)$ entsprechen. Die Substitution $V$ ist demnach so beschaffen, dass an Stelle von

$$x_1, \; x_2, \; x_3 \cdots x_k, \; x_{k+1}, \cdots x_n,$$

die Ausdrücke

4ª) $$\begin{array}{l} x_1 \\ \alpha_{21} x_1 + x_2 \\ \alpha_{31} x_1 + \alpha_{32} x_2 + x_3 \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_{k1} x_1 + \alpha_{k2} x_2 + \cdots + x_k \\ \alpha_{k+1,1} x_1 + \cdots + \alpha_{k+1,k} x_k + x_{k+1} \\ \alpha_{k+2,1} x_1 + \cdots + \alpha_{k+2,k} x_k + x_{k+2} \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_{n,1} x_1 + \cdots + \alpha_{n,k} x_k + x_n \end{array}$$

treten.

Setzt man also

$$V = \Sigma q_{ik} x_i y_k,$$

so sind ersichtlich alle Coefficienten $q_{i_1 k_2}$ gleich Null, d. h. es ist

$$E_1 V E_2 = o.$$

Da nun

$$T = (V^1)^{-1} t V^{-1},$$

$$E_1 T E_1 = E_1 (V^1)^{-1} E_1 t E_1 V^{-1} E_1$$

ist, so muss die Determinante von $E_1 T E_1$ ebenfalls von Null verschieden sein. Es ist dies aber eine der $n - n^{1\text{ten}}$ Unterdeterminanten von $T$, und daher ist $n^1$ um so viele Einheiten kleiner, als $n$, wie die um 1 vermehrte Anzahl der verschwindenden Unterdeterminantensysteme von $T$ beträgt. Insbesondere ergiebt sich aus der angeführten Betrachtung:

Jede alternirende Form kann durch cogrediente Transformation in die Kronecker'sche Normalform

$$(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_3 y_4 - x_4 y_3) + \cdot \cdot$$

transformirt werden, welche nur von einer geraden Zahl von Variabeln abhängt.

5) Aus der Gleichung

$$T(S + S^1) = -(T^1 - T) S^1$$

folgt, wenn $|S + S^1|$ nicht Null ist,

$$TS = -(T^1 - T) S^1 (S + S^1)^{-1} S.$$

Die Form $TS$ ist also das Product einer alternirenden Form in eine symmetrische von nicht verschwindender Determinante. Eine solche Form ist aber stets einer alternirenden Form ähnlich. Das heisst:

Verschwindet $|S + S^1|$ nicht, so ist $TS$ einer alternirenden Form ähnlich[1]).

1) Vgl. meine Note über die conjugirte Transformation einer bilinearen Form in sich selbst, Sitzungsb. d. bayer. Akad. Juni 1889. — Andererseits ist, falls $|S - S^1|$ nicht verschwindet,

$$(S(S^1)^{-1} - E) T$$

einer symmetrischen Form ähnlich, wie aus der Gleichung

$$(S(S^1)^{-1} - E) T = (S - S^1)(S^1)^{-1}(T + T^1) S^1 (S - S^1)^{-1}$$

hervorgeht.

6) Die Form $T$ kann nur dann eine symmetrische resp. alternirende Form von nicht verschwindender Determinante sein, wenn $S$ selbst eine alternirende resp. symmetrische Form ist. Denn aus der Beziehung

$$T = \pm T^1$$

folgt unter dieser Voraussetzung

$$S = \mp S^1,$$

und umgekehrt ist $T$ eine alternirende resp. symmetrische übrigens ganz willkürliche Form, sobald $S$ eine symmetrische resp. alternirende Form (von nicht verschwindender Determinante) ist. Auf dieser Eigenschaft von $T$ beruht die Transformation der alternirenden und symmetrischen Formen in sich selbst[1]).

7) Ist dagegen die Determinante von $T$ gleich Null und $T$ symmetrisch, so folgt

$$(S + S^1) T = o;$$

d. h. es muss die Determinante von $S + S^1$ verschwinden. Diese Bedingung ist aber auch hinreichend. Denn wenn $|S + S^1|$ gleich Null ist, so kann man durch eine congruente Transformation von nicht verschwindender Determinante $W$ bewirken, dass

$$W(S + S^1)\, W^1 = E_1$$

wird, wo $E_1$ nur die Variabelnpaare $x_1 y_1, \cdot \cdot x_k y_k$ enthält. Ist nun $H$ eine willkürliche symmetrische Form der übrigen Variabelnpaare, so wird

$$W(S + S^1)\, W^1 H = o$$

oder

$$(S + S^1)\, W^1 H\, W = o;$$

also auch

$$T = W^1 H\, W = T^1,$$

und

$$S T + S^1 T^1 = o.$$

1) Man vergleiche die von Herrn Frobenius (F. S. 38) gegebenen Formeln mit der Formel 9[a]) des § VII.

Soll dagegen $T$ eine alternirende Form von verschwindender Determinante sein, so muss die Determinante von $S - S^1$ verschwinden. Man kann daher durch eine congruente Transformation $W$ von nicht verschwindender Determinante bewirken, dass

$$W(S - S^1) W^1$$

nur von den in $E_1$ befindlichen Variabelnpaaren abhängt. Bezeichnet man also mit $H$ eine alternirende Form der übrigen Variabeln, so ist

$$(S - S^1) W^1 H W = o,$$

und für

$$T = W^1 H W = - T^1$$

ist wieder die Gleichung 2) erfüllt.

8) Verschwindet die Determinante von $S + S^1$ nicht, so ist die Determinante von $T$, wenn sie nicht verschwindet, das Quadrat einer rationalen Function ihrer eigenen Elemente. Denn es ist

$$T(S + S^1) = (T - T^1) S^1,$$

also $|T|$ nur um einen Factor von der schiefen Determinante $|T - T^1|$ verschwinden. Aus dieser Gleichung geht zugleich hervor:

Verschwindet die Determinante von $T$, während die von $S + S^1$ nicht Null ist, so verschwinden auch noch ihre sämmtlichen ersten bis $k^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten, wo $k$ eine gerade oder ungerade Zahl ist, je nachdem $n$ eine ungerade oder gerade Zahl ist.

Man kann diese Sätze noch erweitern. Aus der Gleichung

$$5) \qquad T(S + \varrho S^1) + (T^1 - \varrho T) S^1 = o$$

folgt:

$$(-1)^n P = A \frac{|T^1 - \varrho T|}{|S + \varrho S^1|}$$

oder für

$$r = \frac{\varrho - 1}{\varrho + 1}.$$

$$(-1)^n P = A \frac{|T^1 - T - r(T + T^1)|}{|S + S^1 + r(S^1 - S)|}.$$

Ist nun $|T| = P$ nicht Null, verschwindet dagegen $|S + S^1|$, so ist auch $|T^1 - T| = o$; und aus der letzten Gleichung geht hervor, dass Zähler und Nenner auf der rechten Seite mit der nämlichen Potenz von $r$ beginnen. Es wird demnach auch für $r = o$

$$P = A \frac{|T^1 - T - r(T + T^1)|}{|S + S^1 + r(S^1 - S)|}.$$

Nun hat Herr Frobenius den folgenden Satz bewiesen: „Ist $A$ eine symmetrische, $B$ eine alternirende Form, ist die Determinante $|rA + B|$ nicht identisch Null, und haben ihre für $r = o$ verschwindenden Elementartheiler alle einen geraden Exponenten, so ist in der Entwickelung dieser Determinante nach steigenden Potenzen von $r$ der Coefficient des Anfangsgliedes das Quadrat einer rationalen Function der Coefficienten von $A$ und $B$." [1])

Da nach Nr. 3 die Elementartheiler von $T^1 - \varrho T$ zugleich die von $S + \varrho S^1$ sind, so folgt:

Haben die für $\varrho = 1$ verschwindenden Elementartheiler der Function $S + \varrho S^1$ sämmtlich einen geraden Exponenten, und verschwindet $|T|$ nicht, so ist diese Determinante das Quadrat einer rationalen Function ihrer eigenen Elemente.

9) Es seien $t$, $T$ zwei Formen, von denen wenigstens eine, etwa $T$, eine nicht verschwindende Determinante hat, und welche die Gleichung 2) befriedigen. Dann folgt nach 5)

$$(t + \varrho t^1)S + t^1(S^1 - \varrho S) = o,$$

$$(T + \varrho T^1)S + T^1(S^1 - \varrho S) = o,$$

oder

$$(t + \varrho t^1) = t^1(T^1)^{-1}(T + \varrho T^1);$$

das heisst, die aus conjugirten Grundformen gebildeten beiden Schaaren

$$t + \varrho t^1, \quad T + \varrho T^1$$

sind äquivalent, sobald die Determinante von $t$ nicht Null ist. Sollte $t$ dieser Bedingung nicht genügen, so kann man jedenfalls an Stelle von

1) Frobenius, Ueber die schiefe Invariante etc., Borchardt's Journal, Bd. 86, S. 57.

$t\ t+hT$ setzen, sobald man unter $h$ eine solche Constante versteht, dass $|t+hT|$ nicht Null ist. Dann aber sind jene Schaaren auch congruent, und man hat den folgenden Satz:

Ist $T$ eine Lösung der Gleichung 2), und verschwindet die Determinante von $T$ nicht, so ist jede andere Lösung derselben in der Form

$$t = hT + V^1 T V$$

enthalten.

Die Gleichung

$$tS + t^1 S^1 = o$$

verwandelt sich damit aber in

$$V^1 T V S + V^1 T^1 V S^1 = o,$$

oder nach Entfernung des Factors $V^1$, wenn noch

$$(T)^{-1} T^1 = -S(S^1)^{-1}$$

gesetzt wird, in

$$VS(S^1)^{-1} = S(S^1)^{-1} V;$$

d. h. die Form $V$ ist mit der antisymmetrischen Form $S(S^1)^{-1}$ vertauschbar. Es lassen sich daher aus einer Lösung von nicht verschwindender Determinante der Gleichung 2) alle anderen mittelst des Problems der vertauschbaren Formen herleiten, und insbesondere ist jede Lösung, deren Determinante gleichfalls nicht verschwindet, dieser Lösung congruent.

10) Der so eben bewiesene Satz lässt sich in der folgenden Form erweitern:

Je zwei Formen $R$, $T$ welche der Gleichung 2) genügen, und deren Unterdeterminantensysteme bis zu derselben Ordnung verschwinden, sind einander congruent, sobald sie gleichzeitig durch zwei auf dieselben Indices erstreckte Substitutionen $V$, $W$ von der Gestalt 4[a]) in Formen von nicht verschwindender Determinante cogredient transformirt werden. Seien nämlich

$$t = V^1 T V,$$
$$\tau = W^1 R W,$$

die beiden Formen von nicht verschwindender Determinante welche nur die Variabelnpaare einer Form $E_1$ enthalten, in welche nach Nr. 4) $T$ und $R$ cogredient transformirt werden können, so ist

$$t V^{-1} S + t^1 V^{-1} S^{-1} = o,$$
$$\tau W^{-1} S + \tau^1 W^{-1} S^1 = o.$$

Multiplicirt man unter der Voraussetzung

$$E = E_1 + E_2,$$

diese Gleichungen mit

$$(t^1)^{-1} + E_2, \quad (\tau^1)^{-1} + E_2,$$

so entsteht

$$(t^1)^{-1} t V^{-1} = - E_1 V^{-1} S^1 S^{-1},$$
$$(\tau^1)^{-1} \tau W^{-1} = - E_1 W^{-1} S^1 S^{-1}.$$

Es ist ferner nach Nr. 4)

$$V = E_1 V E_1 + E_2 V,$$

oder

$$E = E_1 V E_1 V^{-1} + E_2;$$

also

$$E_1 = E_1 V E_1 V^{-1}, \; E_1 = E_1 W E_1 W^{-1}.$$

Multiplicirt man also die vorhergehenden Gleichungen mit

$$E_1 V E_1 + E_2, \; E_1 W E_1 + E_2,$$

so wird

$$E_1 V E_1 (t^1)^{-1} t E_1 V^{-1} = - E_1 S^1 S^{-1},$$
$$E_1 W E_1 (\tau^1)^{-1} \tau E_1 W^{-1} = - E_1 S^1 S^{-1}.$$

Da nun nach Nr. 4) die Determinanten von $E_1 V E_1$ und $E_1 W E_1$ nicht verschwinden, so kann man setzen

$$E_1 V E_1 = P_1, \quad E_1 W E_1 = Q_1$$

und es wird

$$P_1 [(t^1)^{-1} t + \varrho E_1)] P_1^{-1} = Q_1 [(\tau^1)^{-1} \tau + \varrho E_1] Q_1^{-1},$$

oder

$$P_1 (t^1)^{-1} [t + \varrho t^1] P_1^{-1} = Q_1 (\tau^1)^{-1} [\tau + \varrho \tau^1] Q_1^{-1}.$$

Die beiden Formen $t + \varrho t^1$ und $\tau + \varrho \tau^1$ sind also äquivalent, daher auch congruent. D. h. es ist

$$U_1^1 t U_1 = \tau,$$

wo $U_1$ eine Form von nicht verschwindender Determinante der in $E_1$ vorkommenden Variabeln ist. Bezeichnet man mit $U_2$ eine Form der übrigen Variabeln, deren Determinante ebenfalls nicht Null ist, und setzt

$$U = u_1 + u_2,$$

so ist

$$U^1 t U = \tau,$$

oder

$$(W^1)^{-1} U^1 V^1 T V U W^{-1} = R,$$

wie zu zeigen war.

11) Multiplicirt man die mit den Grössen $u_i$, $v_i$ geränderte Determinante der Coefficienten $p_{ik}$ von $T$

$$\text{6)} \qquad \begin{vmatrix} p_{ik} & u_i \\ v_k & o \end{vmatrix}$$

mit der Determinante von $S$, und bezeichnet die ersten Unterdeterminanten der $p_{ik}$ durch $P_{ik}$, so ergiebt sich

$$\text{7)} \qquad \Sigma P_{il} \alpha_{lk} = (-1)^{n-1} \Sigma P_{li} \alpha_{kl}.$$

Durch Multiplication der Gleichungen 7) mit den $p_{im}$ und Summation nach $i$ folgt aus 7)

$$P \alpha_{mk} = (-1)^{n-1} \Sigma P_{li} \alpha_{kl} p_{im};$$

mit $P$ mus also auch

$$\Sigma P_{li} p_{im}$$

verschwinden. Da aber andererseits

$$\Sigma P_{il} p_{im} = (m\, l)\, P = o,$$

ist, so folgt, falls die $P_{il}$ nicht sämmtlich verschwinden

$$P_{il} = P_{li}.$$

Verschwindet die Determinante von $T$, ohne dass ihre ersten Unterdeterminanten sämmtlich Null sind, so bilden

diese letzteren ein symmetrisches System, d. h. die Werthe conjugirter erster Unterdeterminanten sind einander gleich.

Man erhält daher aus 7)

$$\Sigma P_{il}\left(\alpha_{lk} - (-1)^{n-1}\alpha_{kl}\right) = o.$$

Hat also bei ungeradem $n$, wo $P$ verschwindet, die Function $|S - \varrho S^1|$ nicht mehrere Elementartheiler von der Gestalt $(\varrho - 1)^k$, so sind die ersten Unterdeterminanten der Formen $T$ demselben Systeme von Coefficienten proportional, falls sie nicht sämmtlich verschwinden.

Der nämliche Satz gilt bei geradem $n$, falls $|S + \varrho S^1|$ nicht mehrere Elementartheiler von der Form $(\varrho - 1)^k$ enthält.

Dieser Satz lässt sich aber erweitern. Verschwinden die $k-1^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten von $T$ noch sämmtlich, die $k^{\text{ten}}$ dagegen nicht alle, so bilden die letzteren ein symmetrisches System, d. h. die Werthe conjugirter $k^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten sind gleich, und unter denselben befinden sich auch nicht verschwindende Hauptunterdeterminanten.

Man hat nämlich

$$\begin{vmatrix} p_{11} & \cdot & \cdot & p_{1n} & u_1^1 & u_1^2 & \cdot & \cdot & u_1^k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} & \cdot & \cdot & p_{nn} & u_n^1 & u_n^2 & \cdot & \cdot & u_n^k \\ W_1^1 & \cdot & \cdot & W_n^1 & o & o & \cdot & \cdot & o \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ W_1^k & \cdot & \cdot & W_n^k & o & o & \cdot & \cdot & o \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-k} \begin{vmatrix} \Sigma p_{i1} a_{1i} & \cdot & \cdot & \Sigma p_{i1} a_{ni} & u_1^1 & \cdot & \cdot & u_1^k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Sigma p_{in} a_{1i} & \cdot & \cdot & \Sigma p_{in} a_{ni} & u_n^1 & \cdot & \cdot & u_n^k \\ w_1^1 & \cdot & \cdot & w_n^1 & o & \cdot & \cdot & o \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ w_1^k & \cdot & \cdot & w_n^k & o & \cdot & \cdot & o \end{vmatrix}$$

falls

$$W_i^l = \Sigma w_s^l a_{is}$$

genommen wird.

Ebenso wird aber

$$\begin{vmatrix} p_{11} & \cdot & \cdot & p_{n1} & u_1^1 & \cdot & \cdot & u_1^k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{1n} & \cdot & \cdot & p_{nn} & u_n^1 & \cdot & \cdot & u_n^k \\ V_1^1 & \cdot & \cdot & V_n^1 & o & \cdot & \cdot & o \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ V_1^k & \cdot & \cdot & V_n^k & o & \cdot & \cdot & o \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

gleich der in voriger Gleichung rechts stehenden $n+k$ reihigen Determinante, wenn

$$V_i^l = \Sigma w_s^l \alpha_{si}$$

genommen wird. Es gilt daher die Identität

$$\begin{vmatrix} p_{11} & \cdot & \cdot & p_{1n} & u_1^1 & \cdot & u_1^k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} & \cdot & \cdot & p_{nn} & u_n^1 & \cdot & u_n^k \\ W_1^1 & \cdot & \cdot & W_n^1 & o & \cdot & o \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ W_1^k & \cdot & \cdot & W_n^k & o & \cdot & o \end{vmatrix} = (-1)^{n-k} \begin{vmatrix} p_{11} & \cdot & \cdot & p_{n1} & u_1^1 & \cdot & u_1^k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{1n} & \cdot & \cdot & p_{nn} & u_n^1 & \cdot & u_n^k \\ V_1^1 & \cdot & \cdot & V_n^1 & o & \cdot & o \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ V_1^k & \cdot & \cdot & V_n^k & o & \cdot & o \end{vmatrix}$$

unter der Voraussetzung

$$W_i^l = \Sigma w_s^l \alpha_{is}, \quad V_i^l = \Sigma w_s^l \alpha_{si}$$

$$l = 1, \ 2 \cdots k.$$

Dies ist aber die nämliche Identität, welche im § II, S. 265 ff. untersucht wurde, und damit ist zugleich der angegebene Satz bewiesen.

## § IX.

### Fortsetzung.

Ein besonderes Interesse besitzt der Fall, wo bei geradem $n$ die Determinante von $T$ nicht Null ist, oder bei ungeradem $n$ die ersten Unterdeterminanten von $T$ nicht mehr sämmtlich verschwinden.

Nach § VIII, Nr. 3 haben die beiden Schaaren von conjugirten Grundformen

$$\varrho S + S^1 \text{ und } \varrho T^1 - T$$

dieselben Elementartheiler, wenn die Determinante von $T$ nicht verschwindet. Setzt man in der zweiten Schaar $\varrho = -\sigma$, so sind nach dem Kronecker'schen Satze die Elementartheiler von der Form

$$(\varrho + 1)^{2k}, \quad (\varrho - 1)^{2k+1}$$
$$(\sigma + 1)^{2k} = (\varrho - 1)^{2k}, \quad (\sigma - 1)^{2k+1} = (\varrho + 1)^{2k+1}$$

stets paarweise vorhanden. Das heisst:

Verschwindet die Determinante von $T$ nicht, so muss die aus conjugirten Grundformen gebildete Determinante

$$1) \qquad |\varrho S + S^1|$$

nur paarweise Elementartheiler von der Form $(\varrho \pm 1)^\alpha$ enthalten. [Und umgekehrt muss, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, die Determinante von $T$ stets verschwinden.]

Aber diese Bedingung ist auch hinreichend. Sind nämlich die Elementartheiler der Function 1) von der Form $(\varrho \pm 1)^\alpha$ paarweise vorhanden, so lässt sich nach einer Bemerkung des Herrn Frobenius[1]) eine Form

$$\varrho X - X^1$$

construiren, welche genau dieselben Elementartheiler besitzt, und deren Determinante nicht Null ist. Denn es ist möglich, eine Schaar $\varrho X - X^1$ mit conjugirten Grundformen zu bilden, welche vorgeschriebene Elementartheiler hat, vorausgesetzt, dass dieselben paarweise von gleichem Grade sind und für reciproke Werthe verschwinden, mit Ausnahme derjenigen, die für $\varrho = 1$ von einer ungeraden, und für $\varrho = -1$ von einer geraden Ordnung verschwinden. Dann aber giebt es nach dem Weierstrass'schen Satze zwei Substitutionen $P$ und $Q$ von nicht verschwindender Determinante, vermöge welcher

$$PSQ = X;$$
$$PS^1Q = -X^1,$$

wird. Es ist also auch

$$PSQ = -Q^1SP^1.$$

Setzt man nun

$$(Q^1)^{-1}PS = T^{-1},$$
$$S^1P^1Q^{-1} = (T^1)^{-1},$$

---

1) F. S. 22.

so wird

$$T^{-1} = - S(S^1)^{-1}(T^1)^{-1},$$

oder

$$TS + T^1 S^1 = o;$$

und die Determinante von $T$ verschwindet dabei nicht. Daraus folgt:

Wenn die Form gerader Ordnung $|\varrho S + S^1|$ nur paarweise Elementartheiler von der Form $(\varrho + 1)^\alpha$, $(\varrho - 1)^\beta$ hat, so lässt sich immer eine Form $T$ von nicht verschwindender Determinante finden, welche der Gleichung 1) genügt. Zur wirklichen Ermittelung aller Formen $T$ dieser Art, von deren Existenz in § XI Gebrauch gemacht werden wird, kann man freilich weder die so eben gegebene Methode (Vgl. § 1, Nr. 7), noch den in § VIII, Nr. 9) angeführten Satz benutzen, da die so erhaltenen Formen $T$ keineswegs von einander linear unabhängig sind. Der obige Satz lässt sich auch in der folgenden Form aussprechen:

Wenn die Determinante $|\varrho S + S^1|$ nur paarweise Elementartheiler von der Form $(\varrho + 1)^\alpha$, $(\varrho - 1)^\beta$ hat, so giebt es unter denjenigen Transformationen $U$, für die die Determinante von $U + E\eta$ nicht verschwindet, auch solche für die auch die Determinante von $U - E\eta$ von Null verschieden ist.

Ich gehe nun zu dem Falle über, wo bei ungeradem $n$ eine Lösung $T$ existirt, deren erste Unterdeterminanten nicht mehr sämmtlich verschwinden. Dabei mögen folgende Bemerkungen vorausgeschickt werden. Lässt sich die Form $T$ durch die cogrediente Transformation $V$ in eine Form $t$ von nicht verschwindender Determinante verwandeln, welche nur die in $E_1$ vorkommenden Variabelnpaare enthält, so ist

$$t V^{-1} S(S^1)^{-1} V + t^1 = o,$$

und demgemäss

$$t E_1 V^{-1} S(S^1)^{-1} V E_1 + t^1 = o,$$

$$E_1 V^{-1} S(S^1)^{-1} V E_2 = o.$$

Setzt man also

$$V^{-1} S(S^1)^{-1} V = \sigma_1 + \sigma_{21} + \sigma_{12} + \sigma_2$$

$$= \Sigma b_{i_1 k_1} x_{i_1} y_{k_1} + \Sigma b_{i_2 k_1} x_{i_2} y_{k_1} + \Sigma b_{i_1 k_2} x_{i_1} y_{k_2} + \Sigma b_{i_2 k_2} x_{i_2} y_{k_2},$$

so ist nothwendig, dass $\sigma_{12}$, d. h. dass alle Coefficienten $b_{i_1k_2}$ gleich Null sind, dass ferner die Zahl der in $E_1$ vorkommenden Variabeln eine gerade ist, und dass die Gleichung

$$2)\qquad t\sigma_1 + t^1 = o$$

Lösungen von nicht verschwindender Determinante besitze. Da ferner die Determinante von $\sigma_1$ gleich Eins ist, so ist auch die von $\sigma_2$ gleich Eins. Aus der Gleichung

$$t(\sigma_1 - E_1\varrho) + t^1 + t\varrho = o$$

folgt aber, dass die characteristische Function von $\sigma_1$ ausser reciproken Wurzeln mit gleichen Elementartheiler-Exponenten Elementartheiler von der Form

$$(\varrho + 1)^{2k}, \quad (\varrho - 1)^{2k+1}$$

nur paarweise besitzen darf.

Genügt umgekehrt $\sigma_1$ diesen Bedingungen, so existiren zwei Formen $P$, $Q$ von den in $E_1$ vorkommenden Variabeln, für welche

$$P(\sigma_1 - E_1\varrho)Q = X + \varrho X^1$$

wird. Daher ist

$$P\sigma_1 Q = X, \quad PQ = -X^1;$$

mithin auch

$$Q^1 P^1 = -P\sigma_1 Q,$$

oder

$$(Q^1)^{-1} P\sigma_1 + P^1 Q^{-1} = o;$$

mithin ist die Gleichung 2) erfüllt, sobald $t = (Q^1)^{-1} P$ gesetzt wird.

Damit also bei ungeradem $n$ eine Lösung $T$ vorhanden sei, für welche die ersten Unterdeterminanten nicht mehr sämmtlich Null sind, muss $S(S^1)^{-1}$ einer Form ähnlich sein, welche von der Gestalt

$$\sum_1^{n-1} b_{ik}\, x_i y_k + y_n(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots \alpha_{n-1}\alpha_{n-1}) + x_n y_n$$

ist, und in welcher der erste Theil eine Form $\sigma_1$ bezeichnet, die den soeben angegebenen Bedingungen genügt. Hieraus lassen sich aber die Bedingungen herleiten, denen $S$ selbst zu genügen hat.

Ist nämlich allgemein

$$\Phi = \Sigma b_{ik}\, x_i y_k$$

eine Form der $n-1$ Variabeln $x_1 y_1 \cdots x_{n-1} y_{n-1}$ und

$$F = \Phi + y_n(\alpha_1 x_1 + \cdots \alpha_{n-1} x_{n-1}) + x_n y_n$$

so hat die characteristische Function von $F$ dieselben Elementartheiler wie $\Phi$, bis auf einen zu der Wurzel $\varrho = +1$ gehörigen, der einen um eine Einheit höheren Exponenten besitzt.

Bezeichnet man die $k$ fach mit beliebigen Grössenreihen

$$u_i^\alpha,\ v_i^\alpha,\quad i = 1,\ 2 \cdots n-1;$$
$$\alpha = 1,\ 2 \cdots k$$

geränderte Determinante der characteristischen Function von $\Phi$ mit

$$\begin{pmatrix} u^1 u^2 \cdots u^k \\ v^1 v^2 \cdots v^k \end{pmatrix}$$

so ergiebt sich leicht für die ebenso geränderte Determinante der characteristischen Function von $F$ der Ausdruck

$$(1-\varrho)\begin{pmatrix} u^1 u^2 \cdots u^k \\ v^1 v^2 \cdots v^k \end{pmatrix} + A + (-1)^k \left[ u_n^k \begin{pmatrix} \alpha \cdots u^{k-2}\, u^{k-1} \\ v_1 \cdots v^{k-1}\, v^k \end{pmatrix} - u_n^{k-1} \begin{pmatrix} \alpha \cdots u^{k-2}\, u^k \\ v_1 \cdots v^{k-1}\, v^k \end{pmatrix} + \cdots \right]$$

und der mit $A$ bezeichnete Theil enthält nur Producte der $u_n^h,\ v_n^h;\ h = 1,\ 2 \cdots k$ mit Determinanten die weniger als $k$ Ränder enthalten. Es sei nun $\varrho - \varrho_i$ ein Wurzelfactor, der in den $p^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten der characteristischen Fnnction von $\Phi$ $l_p^i$ mal enthalten ist. Dadurch, dass an Stelle der willkürlichen Grössen $u$ in den letzten $k$ Formen des obigen Ausdruckes die gegebenen Coefficienten $\alpha$ eintreten, kann die Multiplicität dieses Wurzelfactors in denselben gleich $l_k^i + \xi_i$ werden, wo $\xi_i \geqq o$. Da aber alle in $A$ befindlichen Glieder denselben in der Multiplicität $l_{k-1}^i$ enthalten, und $l_{k-1}^i > l_k^i$ ist, so sind die Wurzelfactoren der drei Glieder

$$(1-\varrho)\, \Pi(\varrho - \varrho_i)^{l_k^i};\ \Pi(\varrho - \varrho_i)^{l_{k-1}^i};\ \Pi(\varrho - \varrho_i)^{l_k^i + \xi_i}$$

und so lange $\varrho_i$ von 1 verschieden ist, muss daher jene Multiplicität genau gleich $l_k^i$ sein. Ist aber $\varrho_i = 1$, so kann dieselbe gleich $l_k + 1$ oder $l_k$ sein, je nachdem $\xi \geqq 1$, oder $\xi = o$ ist. Daraus folgt:

Die characteristischen Functionen von $F$ und $\Phi$ haben dieselben Elementartheiler in Bezug auf alle von $\varrho - 1$ verschiedenen Wurzelfactoren.

Nun habe ich in den Sitzungsberichten der k. bayer. Akademie[1]) den folgenden Satz bewiesen:

„Bringt in einer $k - 1$ fach geränderten Determinante, deren Elemente rationale Functionen eines Parameters $\varrho$ sind, die Ersetzung einer Reihe willkürlicher Grössen $u$ durch gegebene Grössen $\alpha$ keine Aenderung für den Exponenten $l_{k-1}$ des in dieser $k - 1$ fach geränderten Determinante enthaltenen Wurzelfactors hervor, so ist dies auch bei keiner der höher geränderten Determinanten der Fall". Bezeichnet man also die betreffenden Exponenten für die characteristische Function von $\Phi$ in Bezug auf die Wurzel $\varrho = 1$ durch

$$l_0,\ l_1 \cdot \cdot\ l_{k-1},\ l_k \cdot \cdot\ l_h,\ l_{h+1} = o,$$

in Bezug auf $F$ durch

$$\lambda_0,\ \lambda_1 \cdot \cdot\ \lambda_{k-1},\ \lambda_k \cdot \cdot\ \lambda_h.\ \lambda_{h+1}$$

so gilt der Satz:

Ist $\lambda_{k-1} = l_{k-1}$, so ist auch $\lambda_k = l_k$.

Da nun $\lambda_0 = l_0 + 1$, so ist die Reihe der Exponenten für $F$

$$l_0 + 1,\ l_1 + 1,\ l_2 + 1 \cdot \cdot\ l_p + 1,\ l_{p+1}, \cdot \cdot\ l_h,\ l_{h+1}$$

wobei $p$ irgend eine der Zahlen

$$0,\ 1,\ 2 \cdot \cdot \cdot h,\ h + 1$$

sein kann. Das heisst:

Die characteristische Function von $F$ hat auch in Bezug auf die Wurzel $\varrho = 1$ dieselben Elementartheiler, wie $\Phi$, mit Ausnahme eines einzigen, nämlich des Elementartheilers mit dem Exponenten

$$l_p - l_{p+1} + 1$$

der um eine Einheit grösser ist.

---

1) Ueber einen Satz aus der Theorie der Determinanten, Sitzb. d. math. phys. Classe, November 1889.

Es kann übrigens eine Aenderung in der Zahlenreihe der Exponenten nur an einer Stelle stattfinden, wo zwei aufeinander folgende Elementartheiler nicht gleich sind. Ist nämlich

$$l_{p-1} - l_p = l_p - l_{p-1},$$

und wäre

$$\lambda_{p-1} = l_{p-1} + 1,$$
$$\lambda_p \quad = l_p \quad + 1,$$
$$\lambda_{p+1} = l_{p+1},$$

so ist

$$\lambda_{p-1} - \lambda_p = l_{p-1} - l_p;$$
$$\lambda_p - \lambda_{p+1} = 1 + l_p - l_{p+1},$$

was unmöglich ist, da

$$\lambda_{p-1} - \lambda_p \overline{\overline{>}} \lambda_p - \lambda_{p+1}$$

sein muss.

Hat umgekehrt die Form $F$ dieselben Elementartheiler wie $\Phi$ mit Ausnahme eines einzigen von der Form $(\varrho - \alpha)^q$, der einen um eine Einheit höheren Exponenten hat, wie der correspondirende von $\Phi$, so ist $F$ der Form $\Phi$ ähnlich, vermehrt um die Form

$$y_n[\alpha_1 x_1 + \cdots \alpha_{n-1} x_{n-1}] + \alpha x_n y_n.$$

Denn die Normalformen[1]) von $\Phi$ und $F$ unterscheiden sich, wenn der Elementartheiler $(\varrho - \alpha)^{q-1}$ in $\Phi$, $(\varrho - \alpha)^q$ in $F$ vorkommt, bei geeigneter Bezeichnung der Variabeln nur um die Glieder

$$\alpha x_n y_n + x_{n-1} y_n.$$

Es ist also

$$V^{-1} F V - W^{-1} \Phi W = \alpha x_n y_n + x_{n-1} y_p,$$

wo die Form $W$ von nicht verschwindender Determinante nur von den in $\Phi$ vorkommenden Variabeln $x_1 y_1 \cdot \cdot x_{n-1} y_{n-1}$ abhängt. Daraus folgt aber

1) F. S. 21.

$$(W + E_n)V^{-1}FV(W^{-1} + E_n) - \Phi = (W + E_n)(\alpha x_n y_n + x_{n-1} y_n)(W^{-1} + E_n),$$

oder nach einfacher Rechnung

$$(V(W^{-1} + E_n))^{-1} F(V(W^{-1} + E_n)) = \Phi + \alpha x_n y_n + y_n \frac{\partial W}{\partial y_{n-1}};$$

womit die Behauptung erwiesen ist.

Wendet man diesen Satz auf die vorliegende Frage an, so folgt:

Damit bei ungeradem $n$ nur die Determinante von $T$, nicht aber noch die ersten Unterdeterminanten von $T$ sämmtlich verschwinden, ist nothwendig und hinreichend, dass die sämmtlichen Elementartheiler von

$$|S + \varrho S^1|$$

von der Gestalt $(\varrho \pm 1)^k$ paarweise vorhanden sind, mit Ausnahme eines einzigen von der Form $(\varrho - 1)^\alpha$, der einen um eine Einheit höheren Exponenten hat, als der folgende $(\varrho - 1)^{\alpha - 1}$.

## § X.

### Lösung der Gleichung $TS + T^1 S^1 = o$.

Ich werde in diesem Paragraphen zeigen, wie die Lösung der Gleichung

1) $$ST + S^1 T^1 = o,$$

oder

$$TS + T^1 S^1 = o,$$

auf das Problem der vertauschbaren Formen zurückgeführt werden kann.

Aus 1) folgt durch Elimination von $T^1$

2) $$TS(S^1)^{-1} - (S^1)^{-1} ST = o.$$

Setzt man

$$S(S^1)^{-1} = X,$$

so wird aus 2)

$$X^1 T X = T;$$

d. h. jede Form $T$, welche der Gleichung 1) genügt, wird

durch die antisymmetrische Form $X$ cogredient in sich transformirt.

Setzt man

$$T = S^{-1} Y,$$

so ist nach 2)

3) $$S(S^1)^{-1} Y = Y S (S^1)^{-1};$$

d. h. die Form $Y$ ist mit der antisymmetrischen Form $X$ vertauschbar. Ferner folgt aus 1)

$$Y + S^1 Y^1 (S^1)^{-1} = o,$$

oder

$$Y^1 S^{-1} + S^{-1} Y = o.$$

Demnach wird

4) $$2T = S^{-1} Y - Y^1 S^{-1}.$$

Jede Form $T$, welche der Gleichung 1) genügt, ist also von der Gestalt 4), falls $Y$ die Gleichung 3) befriedigt.

Dieser Satz lässt sich in der folgenden Weise umkehren.

Bezeichnet man mit $Y$ irgend eine Lösung der Gleichung 3), so stellt der Ausdruck 4) alle Lösungen der Gleichung 1) vor.

Denn aus 4) folgt

$$\begin{aligned} 2TS &= S^{-1} Y S - Y^1, \\ 2T^1 S^1 &= Y^1 - (S^{1-1} Y) S^1 = Y^1 - (S^{-1} Y S (S^1)^{-1}) S^1 \\ &= Y^1 - S^{-1} Y S, \end{aligned}$$

also

$$TS + T^1 S^1 = o.$$

Die Anzahl der linear unabhängigen Formen $T$, welche in dem Ausdrucke 4) enthalten sind, werde ich im nächsten Paragraphen bestimmen.

Man kann auch einen anderen Weg zur Lösung der Gleichung 1) einschlagen.

Aus der Identität

$$(1 + \varrho\sigma)(TS + T^1 S^1) = (T + T^1 \varrho)(S + \sigma S^1) + (T^1 - T\sigma)(S^1 - \varrho S)$$

folgt insbesondere für

$$\varrho = \sigma = 1$$

5) $$(T + T^1)(S + S^1) + (T^1 - T)(S^1 - S) = o.$$

Man kann nun versuchen, die symmetrische Form $T + T^1$, sowie die alternirende Form $T^1 - T$ für sich zu bestimmen. Dies kann zunächst in dem Falle geschehen, wo $|S + S^1|$ nicht Null ist.

Aus der leicht zu beweisenden Identität

$$(S + S^1) S^{-1} (S^1 - S) = (S^1 - S) S^{-1} (S + S^1),$$

folgt nämlich

$$S^{-1}(S^1 - S)(S + S^1)^{-1} = (S + S^1)^{-1}(S^1 - S) S^{-1}.$$

Setzt man nun

6) $$W = S^{-1}(S^1 - S)(S + S^1)^{-1} = (S + S^1)^{-1}(S^1 - S) S^{-1},$$

so genügt die Form $W$ der Gleichung

7) $$S W + S^1 W^1 = o,$$

denn es ist

$$W^1 = -(S^1)^{-1}(S^1 - S)(S + S^1)^{-1}$$

nach 6) gleich

$$-(S^1)^{-1} S W.$$

Da ferner

$$\begin{aligned} E + S W &= (S^1 - S)(S + S^1)^{-1} + E \\ &= (S^1 - S + S + S^1)(S + S^1)^{-1} \\ &= 2 S^1 (S + S^1)^{-1}, \end{aligned}$$

so folgt:

Die Determinante von $E + S W$ ist nicht gleich Null.

Aus der Gleichung 5) folgt ferner

$$T + T^1 = -(T^1 - T) S W,$$

und durch Uebergang zu den conjugirten Formen

$$T + T^1 = W^1 S^1 (T^1 - T) = - W S (T^1 - T).$$

Genügt also die alternirende Form $T^1 - T$ der Gleichung

$$(T^1 - T) S W = W S (T^1 - T),$$

so ist

$$(T+T^1) = -(T^1 - T)SW.$$

Schreibt man an Stelle der vorstehenden Gleichung

$$[(T^1 - T)S]WS = WS[(T^1 - T)S]$$

so hat man:

Jede der Formen $(T^1 - T)S$ ist mit der Form $WS$ vertauschbar.

Und umgekehrt erhält man aus jeder Lösung $Z$ der Gleichung

$$8) \qquad ZWS = WSZ$$

eine Lösung $(T^1 - T)S$, welche der genannten Bedingung genügt.

In der That folgt aus 8) für $Z = YS$

$$9) \qquad YSW = WSY,$$

und durch Uebergang zu den conjugirten Formen

$$Y^1S^1W^1 = W^1S^1Y^1,$$

oder nach 7)

$$9^a) \qquad Y^1SW = WSY^1;$$

mithin aus den beiden vorstehenden Gleichungen 9) und 9ª)

$$(Y^1 - Y)SW = WS(Y^1 - Y).$$

Es ist also auch

$$10) \qquad T^1 - T = Y^1 - Y = (S^1)^{-1}Z^1 - ZS^{-1},$$

und

$$T^1 + T = -[(S^1)^{-1}Z^1 - ZS^{-1}]SW,$$

also endlich

$$11) \qquad 2T = [ZS^{-1} - (S^1)^{-1}Z^1](E + SW).$$

Hiermit sind alle Lösungen von 1) gefunden, und die Anzahl der linear unabhängigen Formen $T$ ist gleich der Anzahl der linear unabhängigen Formen von der Gestalt

$$ZS^{-1} - (S^1)^{-1}Z^1$$

wobei $Z$ mit $WS$ vertauschbar ist, da die Determinante von $E+SW$, wie oben gezeigt, nicht verschwindet.

Verschwindet dagegen die Determinante der alternirenden Form $S^1-S$ nicht, so kann in analoger Weise die Bestimmung von $T$ auf die einer symmetrischen Form zurückgeführt werden. Denn aus 5) folgt alsdann

$$12^a) \qquad -(T^1-T)=(T+T^1)(S+S^1)(S^1-S)^{-1}$$

also auch

$$12) \quad (T+T^1)(S+S^1)(S^1-S)^{-1}=(S^1-S)^{-1}(S+S^1)(T+T^1),$$

Setzt man nun

$$S^{-1}(S+S^1)(S^1-S)^{-1}=(S^1-S)^{-1}(S+S^1)S^{-1}=V,$$

so genügt die Form $V$ der Gleichung

$$12^b) \qquad S^1V^1+SV=o,$$

und die Determinante von

$$SV+E=2S^1(S^1-S)^{-1}$$

ist von Null verschieden. Die Gleichung 12) verwandelt sich also in

$$13) \qquad [(T+T^1)S]\,VS=VS[(T^1+T)S].$$

Aber auch umgekehrt folgt aus jeder Lösung $X$ der Gleichung

$$14) \qquad XVS=VSX$$

eine symmetrische Form $T+T^1$, und zwar wird, wenn man ganz wie vorhin verfährt

$$T+T^1=XS^{-1}+(S^1)^{-1}X^1,$$

also auch nach $12^a$)

$$15) \qquad 2T=[XS^{-1}+(S^1)^{-1}X^1](SV+E),$$

und die Anzahl der linear von einander unabhängigen Formen $T$ ist gleich der Anzahl der von einander linear unabhängigen Formen von der Gestalt

$$XS^{-1}+(S^1)^{-1}X^1.$$

Die Anzahl der linear unabhängigen Formen in den Darstellungen 11) und 15) lässt sich aber leicht angeben.

Sind nämlich

$$X_1,\ X_2 \cdots X_k,$$

die $k$ von einander linear unabhängigen Formen welche der Gleichung 14) genügen, so ist

$$X_h^1 S V = S V X_h^1,$$

also auch

$$(S^1)^{-1} X_h^1 S V S = (S^1)^{-1} S V X_h^1 S,$$

oder nach 12^b)

$$[(S^1)^{-1} X_h^1 S]\, V S = V S [(S^1)^{-1} X_h^1 S].$$

Die Formen $X_h$ haben also die characteristische Eigenschaft:

Ist $X_h$ eine Form, welche der Gleichung 14) genügt, so genügt auch

$$(S^1)^{-1} X_h^1 S$$

derselben Gleichung; d. h. die letztgenannten Formen sind lineare Combinationen der $X_l$.

Setzt man nun

$$16)\qquad (S^1)^{-1} X_h^1 S = \sum_1^k \alpha_{hi} X_i,$$

$$X_h = \Sigma (hi) X_i,$$

so wird

$$P_h = X_h S^{-1} + (S^1)^{-1} X_h^1 = \Sigma [\alpha_{hi} + (hi)]\, X_i S^{-1};$$

d. h. zwischen den Formen $P_h$ bestehen so viel lineare Relationen, als zwischen dem System der Coefficienten

$$\alpha_{hi} + (ih),\ i = 1,\ 2 \cdots k$$

enthalten sind.

Aus 16) folgt aber durch Uebergang zu der conjugirten Form

$$S^1 X_h S^{-1} = \Sigma \alpha_{hi} X_i^1,$$

oder

$$X_h = \Sigma \alpha_{hi} (S^1)^{-1} X_i^1 S,$$

also nach 16)

$$17)\qquad X_h = \Sigma \alpha_{hi}\, \alpha_{il}\, X_l.$$

Da nun zwischen den Formen $X_h$ keine lineare Relation besteht, so ist diese Gleichung eine Identität, also

$$\Sigma \alpha_{hi} \alpha_{il} = (h\, l).$$

Die Coefficienten $\alpha_{mn}$, als Coefficienten der bilinearen Form

$$A = \Sigma \alpha_{mn} x_m y_n$$

aufgefasst, genügen also der Gleichung

$$A^2 = E.$$

Die characteristische Function von $A$ hat also[1]) $p$ einfache Elementartheiler von der Form $\varrho - 1$ und $k - p$ einfache Elementartheiler $\varrho + 1$. Mithin giebt es $k - p$ linear von einander unabhängige Grössenreihen

$$\alpha_1^s,\ \alpha_2^s \cdots \alpha_k^s; \quad s = 1,\ 2 \cdots k - p,$$

für welche

$$\Sigma [\alpha_{hi} + (h\, i)]\, \alpha_h^s = o; \quad i = 1,\ 2 \cdots k,$$

ist. Es bestehen also auch zwischen den Formen $P_h$ nicht mehr als $k - p$ linear von einander unabhängige Identitäten

$$\Sigma P_h \alpha_h^s = o,\ s = 1,\ 2 \cdots k - p$$

d. h. die Zahl der linear von einander unabhängigen Formen ist gleich $p$[2]).

---

1) F., S. 15.

2) In derselben Weise lässt sich, worauf ich hier noch aufmerksam machen möchte, auch das Problem lösen:

Alle symmetrischen oder alternirenden Formen zu finden, welche durch eine Substitution $U$, die eine Form $S$ von nicht verschwindender Determinante in sich transformirt, in sich selbst übergehen.

Ist

1) $$U^1 S\, U = S,$$

so sind alle Formen $T$, die gleichfalls durch $U$ in sich übergehen, nach § I Nr. 8 gegeben durch

2) $$T = P S,$$

wenn

3) $$P U^1 = U^1 P.$$

Bezeichnet man die vollständige Lösung von 3) durch

$$P = \Sigma \alpha_s P_s,$$

Analoge Betrachtungen gelten auch für den Fall wo die Determinante von $(S+S^1)$ nicht verschwindet. In dem Falle, wo beide Determinanten gleich Null sind, ist eine Reduction auf das Problem der vertauschbaren Formen auf diesem Wege nicht mehr ausführbar. Aber auch hier lässt sich die Bestimmung der Formen $T^1+T$, $T^1-T$ gesondert vornehmen.

Setzt man nach 2)

$$V^{-1}(T+T^1)(V^1)^{-1}V^1(S+S^1)V+V^{-1}(T^1-T)(V)^{-1}V^1(S^1-S)V=o,$$

so kann man die Substitution $V$ stets so wählen, dass die symmetrische Form in $E_1$ übergeht, wo $E_1$ nur die $n_1$ Variabelnpaare $x_1 y_1 \cdots x_\varrho y_\varrho$ enthält.

---

so ist die zu erfüllende Bedingung, dass $T$ symmetrisch oder alternirend werden soll, ausgedrückt durch

4) $$\Sigma \alpha_s P_s = \pm \Sigma \alpha_s S^1 P_s^1 S^{-1}.$$

Setzt man aber in der aus 3) folgenden Gleichung

$$P^1 U^{-1} = U^{-1} P^1$$

für $U^{-1}$ den aus 1) folgenden Werth:

$$S^{-1} U^1 S = (S^1)^{-1} U^1 S^1$$

ein, so erhält man:

$$S^1 P^1 S^{-1} U^1 = U^1 S^1 P^1 S^{-1};$$

d. h. es ist

5) $$S^1 P_s^1 S^{-1} = \Sigma \beta_{sl} P_l;$$

und nach 4)

$$\Sigma \alpha_s P_s = \pm \Sigma \alpha_l \beta_{ls} P_s,$$

oder wegen der Unabhängigkeit der Formen $P_s$

6) $$\alpha_s = \pm \Sigma \alpha_l \beta_{ls}.$$

Aus 5) folgt aber:

$$P_s^1 = \Sigma \beta_{sl} S^{1^{-1}} P_l S.$$

$$P_s = \Sigma \beta_{sl} S^1 P_l^1 S^{-1} = \Sigma \beta_{sl} \beta_{lj} P_j,$$

und hieraus erhält man

$$\Sigma \beta_{sl} \beta_{lj} = (sj).$$

Die Anzahl der von einander unabhängigen symmetrischen und alternirenden Formen, welche hiernach durch die Anzahl der einfachen Elementartheiler von der Form $(\varrho \pm 1)$ der characteristischen Function der Form

$$\Sigma \beta_{ik} x_i y_k$$

bestimmt ist, ist demnach insgesammt stets gleich der der linear unabhängigen mit der gegebenen Substitution $U$ vertauschbaren Formen.

Ich muss mich hier damit begnügen, auf die mannigfache Bedeutung hinzuweisen, welche diese Betrachtung für die Geometrie der quadratischen Formen hat.

Setzt man also

$$V^1 S^1 V = s^1. \quad V^{-1} T (V^1)^{-1} = t,$$
$$V^1 S V = s, \quad V^{-1} T^1 (V^1)^{-1} = t^1,$$

so wird

$$18) \qquad (t + t^1) E_1 + (t^1 - t)(s^1 - s) = o.$$

Hieraus folgt erstens

$$(t^1 - t)(s^1 - s) E_2 = o,$$

und dies sind $n(n - n_1)$ lineare Gleichungen für die $\frac{1}{2} n(n-1)$ Coefficienten der alternirenden Form $t^1 - t$. Aus der Gleichung

$$[(t + t^1) + (t^1 - t)(s^1 - s)] E_1,$$

in welche 18) nun übergeht, ergeben sich noch $n n_1$ lineare Gleichungen für die $\frac{1}{2} n(n+1)$ Coefficienten der symmetrischen Form $t + t^1$.

Eine besonders elegante Lösung ergiebt sich so in dem Falle, wo $E_1 = E$ ist, d. h. die Determinante von $S + S^1$ nicht Null ist. Setzt man

$$s^1 - s = \sigma,$$

so folgt aus 18)

$$(t + t^1) + (t^1 - t)\sigma = o,$$

oder als Bedingung für $(t^1 - t)$

$$(t^1 - t)\sigma = \sigma (t^1 - t).$$

Ist umgekehrt $X$ eine Form, welche mit der alternirenden Form $\sigma$ vertauschbar ist, so ist

$$t^1 - t = X^1 - X,$$
$$t^1 + t = -(X^1 - X)\sigma,$$

also

$$2t = -(X^1 - X)(\sigma + E).$$

Es möge nun angenommen werden, dass die ersten Unterdeterminanten der characteristischen Function von $\sigma$

$$|\sigma - \varrho E| = |V^1| \, |S^1 - S - \varrho(S + S^1)| \, |V|$$

für keine Wurzel derselben sämmtlich verschwinden, dass also nament-

lich auch $|S^1 - S|$ nicht bei geradem $n$, und ohne seine ersten Unterdeterminanten bei ungeradem $n$ verschwindet. Ist nun[1])

$$|\sigma - \varrho E| = a_0 + a_1 \varrho + a_2 \varrho^2 + \cdots a_n \varrho^n,$$

so besteht zwischen den Potenzen der Form $\sigma$ die Relation

$$a_0 \sigma^0 + a_1 \sigma^1 + a_2 \sigma^2 \cdots a_n \sigma^n = o,$$

während die Formen

$$\sigma^0, \ \sigma^1, \ \sigma^2 \cdots \sigma^{n-1},$$

von einander unabhängig sind. Da nun $\sigma$ eine alternirende Form ist, wird bei geradem $n = 2p$

$$|\sigma - \varrho E| = a_0 + a_2 \varrho^2 + a_4 \varrho^4 + \cdots a_{2p} \varrho^{2p};$$

also

$$a_0 \sigma + a_2 \sigma^3 + \cdots a_{2p} \sigma^{2p+1} = o.$$

Mithin sind die $p = \frac{n}{2}$ alternirenden Formen

$$\sigma, \ \sigma^3, \ \sigma^5 \cdots \sigma^{2p-1},$$

von einander unabhängig.

Ist dagegen $n = 2p + 1$, so wird

$$|\sigma - \varrho E| = a_1 \varrho + a_3 \varrho^3 + \cdots a_{2p+1} \varrho^{2p+1};$$

d. h. es sind nur die $p = \frac{n-1}{2}$ alternirenden Formen

$$\sigma, \ \sigma^3, \cdots \sigma^{2p-1}$$

von einander linear unabhängig. Da ferner unter der angegebenen Voraussetzung die einzigen mit $\sigma$ vertauschbaren Formen die linearen Combinationen der Potenzen von $\sigma$ sind, so ergiebt sich der folgende Satz:

Wenn die characteristische Function

$$|S^1 - S - \varrho (S + S^1)|$$

oder

$$|S - \lambda S^1|$$

keine Wurzel besitzt, für welche ihre sämmtlichen ersten Unterdeterminanten verschwinden, und auch für $\lambda = -1$

1) Vgl. F. S. 11, ff.

nicht verschwindet, so ist die Gesammtheit der linear von einander unabhängigen Lösungen der Gleichung

$$TS + T^1 S^1 = o$$

dargestellt durch

$$t^1 - t = \alpha_1 \sigma + \alpha_3 \sigma^3 + \cdots \alpha_{2p-1} \sigma^{2p-1}$$

$$-(t^1 + t) = \alpha_1 \sigma^2 + \alpha_3 \sigma^4 + \cdots \alpha_{2p-1} \sigma^{2p}$$

oder

$$-2t = (\alpha_1 \sigma + \alpha_3 \sigma^3 + \cdots \alpha_{2p+1} \sigma^{2p-1})(E + \sigma)$$

wobei die Anzahl der $p$ von einander unabhängigen Parameter $\alpha$ gleich der grössten ganzen in $\frac{n}{2}$ enthaltenen Zahl ist.

Für zerlegbare Formen kann man die Lösung der Gleichung 1) nicht unerheblich vereinfachen.

Ist $S$ eine in $S_1 + S_2 + \cdot + S_k$ zerlegbare Form, und sind $S_\alpha$ und $S_\beta$ irgend zwei Bestandtheile derselben, so folgt aus

$$ST + S^1 T^1 = o$$

nach Multiplication mit $E_\alpha$ und $E_\beta$

$$S_\alpha T + S_\alpha^1 T^1 = o,$$

$$S_\beta T + S_\beta^1 T^1 = o,$$

oder, wenn

$$E_\alpha T E_\alpha = t_\alpha; \quad E_\alpha T E_\beta = t_{\alpha\beta},$$

$$E_\beta T E_\beta = t_\beta; \quad E_\alpha T^1 E_\beta = t_{\beta\alpha},$$

gesetzt wird, und

$$t_{\alpha\beta}^1, \; t_{\beta\alpha}^1$$

die conjugirten Formen von $t_{\alpha\beta}$, $t_{\beta\alpha}$ sind:

$$S_\alpha t_\alpha + S_\alpha^1 t_\alpha^1 = o, \tag{19}$$

$$S_\beta t_\beta + S_\beta^1 t_\beta^1 = o,$$

$$S_\alpha t_{\alpha\beta} + S_\alpha^1 t_{\beta\alpha} = o,$$

$$S_\beta t_{\beta\alpha}^1 + S_\beta^1 t_{\alpha\beta}^1 = o.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen 19) ergeben sich die Coefficienten der beiden Formen $t_\alpha$, $t_\beta$. Aus den beiden letzten aber folgt durch Uebergang zu den conjugirten Formen

20) $$-t_{\alpha\beta} = S_\alpha^{-1} S_\alpha^1 t_{\beta\alpha} = t_{\beta\alpha} S_\beta^1 S_\beta^{-1},$$

21) $$-t_{\beta\alpha}^1 = S_\beta^{-1} S_\beta^1 t_{\alpha\beta}^1 = t_{\alpha\beta}^1 S_\alpha^1 S_\alpha^{-1}.$$

Hieraus geht hervor:

Haben die beiden characteristischen Functionen

$$|S_\alpha^1 - \varrho S_\alpha|, \quad |S_\beta^1 - \varrho S_\beta|$$

keinen gemeinsamen Theiler, so ist

$$t_{\alpha\beta} = t_{\alpha\beta}^1 = t_{\beta\alpha} = t_{\beta\alpha}^1 = o;$$

d. h. es ist dann die Form $T$ in derselben Weise zerlegbar.

Haben dagegen jene Functionen einen gemeinsamen Theiler, so existirt eine von Null verschiedene Form $t_{\beta\alpha}$, welche die Gleichung 20)

$$S_\alpha^{-1} S_\alpha^1 t_{\beta\alpha} = t_{\beta\alpha} S_\beta^1 S_\beta^{-1}$$

befriedigt. Bezeichnet man den gemeinsamen Werth der beiden Seiten dieser Gleichung mit

$$-t_{\alpha\beta},$$

so ist auch

$$-t_{\alpha\beta}^1 = t_{\beta\alpha}^1 S_\alpha (S_\alpha^1)^{-1} = (S_\beta^1)^{-1} S_\beta t_{\beta\alpha}^1,$$

oder

$$-t_{\beta\alpha}^1 = t_{\alpha\beta}^1 S_\alpha^1 S_\alpha^{-1} = S_\beta^1 S_\beta^{-1} t_{\alpha\beta}^1$$

d. h. es ist auch die Gleichung 21) erfüllt. Zugleich wird

$$t_\alpha + t_\beta + t_{\alpha\beta} + t_{\beta\alpha}^1$$

derjenige Bestandtheil von $T$, welcher zu den beiden Bestandtheilen $S_\alpha$, $S_\beta$ von $S$ gehört, denn nach den vorstehenden Gleichungen sind auch die beiden letzten Gleichungen 19) befriedigt.

Setzt man aber, um 20) zu lösen,

$$S_\alpha = \Sigma a_{i_\alpha k_\alpha} x_{i_\alpha} y_{k_\alpha},$$

$$S_\beta = \Sigma a_{i_\beta k_\beta} x_{i_\beta} y_{k_\beta},$$

$$t_{\beta\alpha} = \Sigma t_{i_\alpha k_\beta} x_{i_\alpha} y_{k_\beta},$$

wobei die Indices anzeigen, dass nur die in den entsprechenden Formen

$S_\alpha$, $S_\beta$ vorkommenden Variabeln vorhanden sind, so besteht für die $(\alpha\beta)$ Coefficienten $t_{i_\alpha k_\beta}$ das System von $(\alpha\beta)$ Gleichungen

$$21) \qquad \Sigma t_{k_\alpha m_\beta}(a_{k_\alpha l_\alpha} a_{m_\beta s_\beta} - a_{l_\alpha k_\alpha} a_{s_\beta m_\beta}) = o.$$

Setzt man

$$a_{k_\alpha l_\alpha} a_{m_\beta s_\beta} - a_{l_\alpha k_\alpha} a_{s_\beta m_\beta} = h_{k_\alpha m_\beta,\ l_\alpha s_\beta},$$

so folgt bei gleichzeitiger Vertauschung von $l_\alpha$ und $k_\alpha$, $s_\beta$ und $m_\beta$

$$h_{k_\alpha m_\beta,\ l_\alpha s_\beta} = - h_{l_\alpha s_\beta,\ k_\alpha m_\beta}$$

Die Determinante des Systems der Coefficienten in den Gleichungen 21) ist daher eine schiefe, und ihr Verschwinden mit der oben angegebenen Bedingung eines gemeinsamen Theilers äquivalent. Und so hat man den Satz:

Die Anzahl der Parameter, durch welche die Form $S_\alpha + S_\beta$ in sich nicht singulär transformirt wird, ist um eine gerade resp. ungerade Zahl grösser, als die Zahl der Parameter, durch welche $S_\alpha$ und $S_\beta$ in sich transformirt werden, je nachdem das Product der Ordnungen von $S_\alpha$, $S_\beta$ gerade oder ungerade ist.

Nach Herrn Kronecker[1]) kann jede bilineare Form von nicht verschwindender Determinante durch congruente Substitution in ein Aggregat elementarer Formen von der Gestalt

$$E,\ \overline{E}_0,\ \underline{E}^0,\ E^0$$

verwandelt werden, wo

$$E = x_0 y_1 + x_1 y_2 + \cdots x_{2n-2} y_{2n-1}$$
$$+ c(x_1 y_0 + x_2 y_1 + \cdots x_{2n-1} y_{2n-2}),$$

und $c^2$ nicht gleich Eins;

$$\overline{E}_0 = x_0 y_1 + x_1 y_0 + x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_2 + x_3 y_4 - x_4 y_3$$
$$+ \cdots x_{2n-2} y_{2n-1} + x_{2n-1} y_{2n-2},$$

und $n$ eine gerade Zahl $2p$;

1) K. S. 430.

$$\underline{E}^0 = -x_0 y_1 + x_1 y_0 - x_1 y_2 - x_2 y_1 - x_2 y_3 + x_3 y_2 - x_3 y_4 - x_4 y_3$$
$$+ \cdots - x_{2n-2} y_{2n-1} - x_{2n-1} y_{2n-2}$$

und $n$ eine ungerade Zahl $2p+1$;

$$E^0 = c^1 x_0 y_0 + x_1 y_0 - x_0 y_1 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + x_3 y_2 - x_2 y_3$$
$$+ \cdots x_n y_{n-1} + (-1)^n x_{n-1} y_n$$

zu setzen ist.

Die Determinante von $E + \varrho E^1$ enthält nur die Elementartheiler $(c+\varrho)^n$, $(1+\varrho c)^n$; die von $\overline{E}_0 + \varrho \overline{E}_0^1$ nur die Elementartheiler $(1+\varrho)^{2p}$, $(1+\varrho)^{2p}$; die von $\underline{E}^0 + \varrho \underline{E}^{01}$ nur die Elementartheiler $(\varrho-1)^{2p+1}$, $(\varrho-1)^{2p+1}$; die Determinante von $E^0 + \varrho E^{01}$ enthält endlich bei geradem $n$ nur den elementaren Theiler $(1+\varrho)^{n+1}$, während derselbe bei ungeradem $n$ gleich $(1-\varrho)^{n+1}$ ist.

Für Formen von der einfachen Gestalt der elementaren Formen $E$, $\underline{E}_0$, $\overline{E}^0$, $E^0$, welche im ganzen

$$2n,\ 4p,\ 2(2p+1),\ n+1$$

Variabelnpaare enthalten, lässt sich leicht die Anzahl der homogenen willkürlichen linearen Parameter bestimmen, welche in den Lösungen der Gleichung

$$ST + S^1 T^1 = o$$

auftreten. Die betreffenden Resultate mögen hier kurz angeführt werden.

1) Ist

$$S = x_0 y_1 + x_1 y_2 + \cdots$$
$$+ c(x_1 y_0 + x_2 y_1 + \cdots)$$

und $N$ die Zahl der Variabelnpaare in $S$, so hat man in $T$ $\frac{1}{2}N$ resp. $\frac{1}{2}(N+1)$ Parameter, je nachdem $N$ gerade oder ungerade ist. Die nicht singulären Substitutionen für $E$ sind daher — wie im allgemeinen Falle — von $n$ Parametern abhängig.

2) Ist

$$S = x_0 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_4 + \cdots$$
$$+ x_1 y_0 - x_2 y_1 + x_3 y_2 - x_4 y_3 + \cdots$$

und versteht man unter $N$ dieselbe Zahl wie bei 1), so enthält die Form $T$ für

$$N = 4p,\ 2(2p+1),\ 2p+1$$

im ganzen

$$4p,\ 4p+1,\ p+1$$

willkürliche Parameter. Die nicht singulären Substitutionen für $\overline{E}_0$ sind also von $4p$ Parametern abhängig.

3) Ist

$$S = -x_1 y_0 + x_1 y_0 - (x_1 y_2 + x_2 y_1) - x_1 y_3 + x_3 y_2 - (x_3 y_4 + x_4 y_3) \cdots$$

so beträgt die Zahl der Parameter in $T$

$$4p,\ 4p+3,\ p+1$$

je nachdem

$$N = 4p,\ 2(2p+1),\ 2p+1$$

ist. Die nicht singulären Substitutionen für $\underline{E}^0$ sind daher von $4p+3$ Parametern abhängig

4) Ist endlich

$$S = c x_0 y_0 + (x_1 y_0 - y_1 x_0) + (x_2 y_1 + x_1 y_2) + (x_3 y_2 - x_2 y_3) + (x_4 y_3 + x_3 y_4) + \cdots$$

so erhält man für $T$, ganz wie im allgemeinen Falle $\frac{1}{2} N$ resp. $\frac{1}{2}(N-1)$ Parameter, und daher sind auch die nicht singulären Substitutionen für $E^0$ nicht durch eine grössere Mannigfaltigkeit ausgezeichnet.

Es hat hiernach keine Schwierigkeit, die Zahl der Parameter zu bestimmen, durch welche eine bereits auf elementare Formen reducirte Form in sich transformirt wird[1]). Indessen beruht diese Reduction durch congruente Transformationen selbst auf Operationen[2]), die bisher auf rationale noch nicht zurückgeführt sind.

---

1) Vgl. insbesondere auch die Bemerkungen auf Seite 340—342.

2) Vgl. die mit K. bezeichnete Arbeit des Herrn Kronecker, sowie C. Jordan, Sur les transformations d'une forme quadratique en elle même, Journal de Mathématiques, Année 1888, S. 349.

## § XI.

### Irreducibilität des Systemes der eigentlichen Transformationen.

Durch die vorstehenden Untersuchungen können alle Substitutionen $U$ gefunden werden, für die wenigstens eine der beiden Determinanten $|U+E|$ oder $|U-E|$ von Null verschieden ist.

Wenn dagegen die characteristische Function

$$\Delta(\varrho) = |U - \varrho E|$$

von $U$ unter der Voraussetzung einer eigentlichen Substitution sowohl für $\varrho = +1$ als auch für $\varrho = -1$ verschwindet, so muss $\Delta(\varrho)$ von einer geraden Ordnung $m$ für $\varrho = -1$ verschwinden. Sei ferner $\Delta(\varrho) = \Delta_1(\varrho)\Delta_2(\varrho)$, wo $\Delta_1(\varrho)$ das Product der Elementartheiler, die für $\varrho = -1$ verschwinden, und $U_1$ eine Form der Variabeln $x_1 y_1, \cdot \cdot x_m y_m$, welche dieselben Elementartheiler hat, wie $\Delta_1(\varrho)$ und ebenso $U_2$ eine aus den Variabeln $x_{m+1}$, $y_{m+1} \cdot \cdot x_n y_n$ gebildete Form mit den Elementartheilern von $\Delta_2(\varrho)$. Dann ist die Form

$$U_0 = U_1 + U_2$$

der Form $U$ ähnlich, also

$$G U G^{-1} = U_0 = U_1 + U_2,$$

und

$$U^1 S U = S.$$

Hieraus folgt

$$(G^1)^{-1} U^1 G^1 (G^1)^{-1} S G^{-1} G U G^{-1} = (G^1)^{-1} S G^{-1};$$

also, wenn

$$(G^1)^{-1} S G^{-1} = S_0,$$

gesetzt wird

$$(G^1)^{-1} U^1 G^1 S_0 G U G^{-1} = S_0,$$

oder

$$U_0^1 S_0 U_0 = S_0.$$

Hieraus folgt aber[1]), dass $S_0$ ebenso in zwei Formen $S_1 + S_2$ zerlegbar ist, wie die Form $U_0$ in $U_1 + U_2$.

---

1) Vgl. § II, S. 250.

Daher wird

$$U_1^1 S_1 U_1 = S_1,$$
$$U_2^1 S_2 U_2 = S_2.$$

Nun verschwindet die Form $\Delta_1(\varrho)$ nur für $\varrho = -1$, also ist die Determinante von $E_1 - U_1$ nicht Null, und ebenso ist die Determinante von $E_2 + U_2$ von Null verschieden, da $\Delta_2(\varrho)$ den Theiler $\varrho = -1$ nicht enthält. Es werde nun angenommen, dass eine Form $H_1$ der $m$ Variabelnpaare $x_1 y_1, \cdots x_m y_m$ vorhanden sei, deren Determinante nicht verschwindet, und der Gleichung

$$1) \qquad H_1 S_1 + H_1^1 S_1^1 = o$$

genügt, und es sei ferner

$$2) \qquad T_1 = \frac{E_1 + U_1}{E_1 - U_1}(S_1)^{-1},$$

$$T_2 = S_2 \frac{E_2 - U_2}{E_2 + U_2};$$

also auch

$$3) \qquad T_1 S_1 + T_1^1 S_1^1 = o,$$

$$4) \qquad T_2^1 = - S_2^1 S_2^{-1} T_2.$$

Setzt man ferner

$$5) \qquad T_h = G^1 [(T_1 + 2 h H_1)^{-1} + T_2] G,$$

wo $h$ einen willkürlichen Parameter bedeutet, so ist wegen

$$S = G^1 (S_1 + S_2) G,$$
$$S^1 = G^1 (S_1^1 + S_2^1) G,$$
$$S^{-1} = G^{-1} (S_1^{-1} + S_2^{-1}) (G^1)^{-1} = G^{-1} (S_1 + S_2)^{-1} (G^1)^{-1},$$

$$S^1 S^{-1} T_h = G^1 (S_1^1 + S_2^1) G G^{-1} (S_1 + S_2)^{-1} (G^1)^{-1} G^1 [(T_1 + 2 h H_1)^{-1} + T_2] G$$
$$= G^1 (S_1^1 + S_2^1) [(T_1 + 2 h H_1)(S_1 + S_2)]^{-1} G + G^1 (S_1^1 + S_2^1)(S_1^{-1} + S_2^{-1}) T_2 G$$
$$= G^1 (S_1^1 + S_2^1)(T_1 S_1 + 2 h H_1 S_1)^{-1} G + G^1 S_2^1 S_2^{-1} T_2 G.$$

Mittelst der Gleichungen 1), 3), 4) wird hieraus mit Bezug auf 5)

$$S^1 S^{-1} T_h = G^1 [(T_1 S_1 + 2 h H_1 S_1)(S_1^1)^{-1}]^{-1} G - G^1 T_2^1 G$$
$$= - G^1 [(T_1^1 + 2 h H_1^1)^{-1} + T_2^1] G = - T_h^1.$$

Demnach genügt die Form $T_h$ der Gleichung

$$T_h^1 = -S^1 S^{-1} T_h. \tag{6}$$

und der Parameter $h$ kann dabei jeden Werth oberhalb einer gewissen Grenze annehmen, da die Determinante von $H_1$ nicht Null ist.

Es ist ferner nach 5)

$$\begin{aligned}
&(T_1 + 2hH_1 + S_2^{-1})(G^1)^{-1}(S + T_h) \\
&= (T_1 + 2hH_1 + S_2^{-1})[S_1 + S_2 + (T_1 + 2hH_1)^{-1} + T_2]G, \\
&= [(T_1 + 2hH_1)S_1 + E_1 + E_2 + S_2^{-1}T_2]G, \\
&= \left[\frac{E_1 + U_1}{E_1 - U_1} + \frac{E_2 - U_2}{E_2 + U_2} + E_1 + E_2 + 2hH_1 S_1\right]G, \\
&= 2[(E_1 - U_1)^{-1} + (E_2 + U_2)^{-1} + hH_1 S_1]G;
\end{aligned}$$

und ebenso

$$\begin{aligned}
(T_1 + 2hH_1 + S_2^{-1})(G^1)^{-1}(S - T_h) &= [(T_1 + 2hH_1)S_1 - E_1 + E_2 - S_2^{-1}T_2)]G, \\
&= 2[U_1(E_1 - U_1)^{-1} + U_2(E_2 + U_2)^{-1} + hH_1 S_1]G.
\end{aligned}$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$\begin{aligned}
(S + T_h)^{-1}(S - T_h) = G^{-1}[(E_1 - U_1)^{-1} + hH_1 S_1 + (E_2 + U_2)^{-1}]^{-1} \times \\
\times [U_1(E_1 - U_1)^{-1} + hH_1 S_1 + U_2(E_2 + U_2)]G
\end{aligned}$$

Die Determinante der Potenz mit dem Exponenten $-1$ wird hier auch für $h = o$ nicht unbestimmt, da die Formen $E_1 - U_1$ und $E_2 + U_2$ kein Variabelnpaar gemeinsam haben und ihre Determinanten nicht verschwinden. Demnach wird

$$\lim_{h=o}[(S + T_h)^{-1}(S + T_h)] = G^{-1}(U_1 + U_2)G = U,$$

denn es ist

$$[(E_1 - U_1)^{-1} + (E_2 + U_2)^{-1}]^{-1} = (E_1 - U_1) + (E_2 + U_2).$$

Das heisst:

Unter der angegebenen Voraussetzung lässt sich die Transformation $U$ mit Hülfe eines Grenzprocesses aus der vollständigen Lösung der linearen Gleichung 6)

$$T^1 = -S^1 S^{-1} T$$

herleiten, indem man die willkürlichen Parameter als Functionen einer Variabeln $h$ auffasst.

Es beruht aber die vorstehende Betrachtung auf der Möglichkeit, eine Form $H_1$ von nicht verschwindender Determinante zu finden, welche der Gleichung 1) genügt, und hierzu ist nothwendig und hinreichend[1]), dass die Elementartheiler der characteristischen Function

$$S_1 + \varrho S_1^1|$$

von der Form $(\varrho - 1)^\alpha$, $(\varrho + 1)^\beta$ nur paarweise auftreten. Die Elementartheiler von $|S + \varrho S^1|$ sind aber zusammengenommen gleich denen von

$$|S_1 + \varrho S_1^1| \text{ und } |S_2 + \varrho S_2^1|.$$

Diese Bedingung ist zunächst erfüllt, wenn die Determinante

$$|S + S^1|,$$

was bei geradem $n$ stattfinden kann, überhaupt nicht verschwindet. Ist dagegen $n$ eine ungerade Zahl, und hat die Function

$$S + \varrho S^1|$$

nur die einfache Wurzel $\varrho = -1$, während $|S + S^1|$ nicht Null ist, so kann die zu einer geraden Zahl von Variabeln $m$ gehörige Function

$$|S_1 + \varrho S_1^1|$$

nicht für $\varrho = -1$ verschwinden, da sie in diesem Falle mindestens den Theiler $(\varrho + 1)^2$ haben müsste, für den überdies alle ersten Unterdeterminanten noch Null werden.

Man hat also den folgenden Satz:

Die sämmtlichen Substitutionen, durch welche eine allgemeine bilineare Form $S$ von nicht verschwindender Determinante eigentlich in sich transformirt wird, bilden ein irreducibeles System.

Durch eine andere Specialisirung ergeben sich auch die beiden wichtigen von Herrn Frobenius bewiesenen Sätze über den irreducibelen

---

1) Vgl. § IX.

Character derjenigen eigentlichen Transformationen, welche eine symmetrische resp. alternirende Form von nicht verschwindender Determinante in sich transformiren, dessen darauf bezüglicher Untersuchung[1]) die vorstehende nachgebildet ist.

## § XII.

### Ueber die Anzahl der Parameter, von denen die Coefficienten der Transformation in sich selbst abhängen.

Da jede Form ihrer conjugirten ähnlich ist[2]), so besteht die Gleichung

$$SP^1S^{-1} = P. \tag{1}$$

Ist umgekehrt $S$ eine gegebene Form von nicht verschwindender Determinante, und ist $p$ eine Form, welche der Gleichung 1) genügt, so existirt auch immer eine Form $P$ von nicht verschwindender Determinante, welche dieselbe befriedigt. Denn für

$$P = p - \varrho E$$

wird

$$SP^1S^{-1} = P;$$

und umgekehrt kann man aus den Lösungen $P$ von nicht verschwindender Determinante jede Speciallösung herleiten. Die Aufgabe, bei gegebenem $S$ alle Formen $P$ zu finden, welche der Gleichung 1) genügen, reducirt sich also auf die Bestimmung aller Formen dieser Art, deren Determinante von Null verschieden ist.

Da aus 1) folgt

$$PS^1 + \varrho SP^1 = P(S^1 + \varrho S),$$

so sind die Schaaren conjugirter Formen

$$PS^1 + \varrho SP^1 \text{ und } S^1 + \varrho S$$

äquivalent, also auch congruent. Mithin existirt eine Substitution $W$, für welche

---

1) F. S. 44 ff.
2) F. S. 21.

$$PS^1 + \varrho S P^1 = W^1 (S^1 + \varrho S) W$$

wird, und es ist

$$PS^1 = W^1 S^1 W.$$

Die Gleichung 1) geht demzufolge über in

$$2) \qquad (S^1)^{-1} S W = W (S^1)^{-1} S,$$

und zugleich wird

$$3) \qquad P = W^1 S^1 W (S^1)^{-1}.$$

Demnach ist die Form $W$ mit der antisymmetrischen Form $(S^1)^{-1} S$ vertauschbar. Und umgekehrt sind in der Gleichung 3) alle Lösungen der Gleichung 1) von nicht verschwindender Determinante enthalten, sobald $W$ der Gleichung 2) genügt.

Denn aus

$$P = W^1 S^1 W (S^1)^{-1},$$

oder

$$P^1 = S^{-1} W^1 S W,$$

folgt

$$S P^1 = W^1 S W = W^1 S^1 W (S^1)^{-1} S = PS.$$

Es seien nun

$$P_1, \ P_2 \cdot \cdot \ P_\mu,$$

die $\mu$ von einander linear unabhängigen Lösungen der Gleichung 1), deren Anzahl durch eine Untersuchung der Determinante des Systems der linearen Gleichungen 1) bestimmt werden kann; ferner

$$W_1, \ W_2 \cdot \cdot \ W_m,$$

die $m$ von einander linear unabhängigen Lösungen der Gleichung 2), also

$$W = \sum_m \beta_i W_i$$

die allgemeine Lösung von 2). Dann wird

$$4) \qquad W^1 S^1 W = \sum_m \sum \beta_i \beta_k (W_i^1 S^1 W_k + W_k^1 S^1 W_i)$$

unter der Voraussetzung, dass bei gleichen Indices $i$ und $k$ der Term in der Klammer nur einmal hinzuschreiben ist.

Setzt man

$$Q_{ik} = W_i^1 S^1 W_k (S^1)^{-1},$$

so wird

$$Q_{ik}\,S = W_i^1 S^1\, W_k (S^1)^{-1} S = S(S^{-1}\, W_i^1 S\, W_k),$$

also

$$Q_{ik}\,S = S\,Q_{ki}^1.$$

Die Form

$$R_{ik} = Q_{ik} + Q_{ki} = (W_i^1 S^1\, W_k + W_k^1 S^1\, W_i)(S^1)^{-1}$$

genügt also der Gleichung

$$R_{ik}\,S = S\,R_{ik}^1;$$

mithin wieder der Gleichung 1).

Es ist daher

$$R_{ik} = \sum_{\mu} r_{iks} P_s,$$

wo die $r_{iks} = r_{kis}$ numerische Coefficienten sind, und aus der Gleichung 4) folgt nunmehr die Identität

$$5)\qquad \sum_{\mu} \alpha_s P_s = \sum_{\mu}\sum_{m} \beta_i \beta_k r_{iks} P_s,$$

aus welcher wegen der Unabhängigkeit der $P_s$ folgt

$$6)\qquad \alpha_s = \sum_{m} \beta_i \beta_k r_{iks};$$

$$s = 1,\ 2 \cdots \mu.$$

In diesen Gleichungen muss jede der Grössen $\beta_i$ wirklich enthalten sein. Denn da in der Form

$$W_i^1 S^1\, W_i$$

die Determinanten von $W_i$ und $S$ nicht verschwinden, so kann dieselbe nicht Null sein, und daher enthält der Ausdruck $W^1 S^1\, W$ selbst den Term

$$\beta_i^2\, W_i^1 S^1\, W_i,$$

der sich gegen keinen anderen aufheben kann. Dagegen können die rechten Seiten der Gleichungen 6) etwa nur $m_1 \overline{\overline{<}} m$ von einander unabhängige Functionen der $\beta_i$ enthalten, welche durch

$$B_1,\ B_2 \cdots B_{m_1},$$

bezeichnet sein mögen.

Sind nun umgekehrt die Grössen $\alpha$, d. h. ist die Form $P$ willkürlich als Lösung von 1) gegeben, so ist

$$PS^1 = W^1 S^1 W;$$

d. h. es giebt dann stets Auflösungen der Gleichungen 6), diese sind also von einander unabhängig. Von den Grössen $B$ sind daher $m_1 - {}_{\iota}\mu$ willkürlich. Und da aus den Grössen $B$ nur $m_1$ Parameter $\beta_i$ bestimmt werden können, so folgt, dass bei gegebenen Werthen der $\alpha$ die Grössen $\beta$ noch

$$m - {}_{\iota}\mu$$

willkürliche Parameter enthalten müssen.

Diese Zahl ist aber, wie leicht zu sehen, gleich der Anzahl der Parameter, die in denjenigen Substitutionen enthalten sind, welche $S$ in sich selbst transformiren.

Ist nämlich $U$ eine Substitution, die $S$ in sich transformirt, so ist

$$U^1 S U = S,$$

also auch

$$(S^1)^{-1} S U = U (S^1)^{-1} S.$$

Bezeichnet man mit $W_h$ irgend eine willkürlich gedachte Lösung dieser Gleichung 2), deren Determinante nicht Null ist, ferner mit

$$W_1, \; W_2 \cdot \cdot \; W_m,$$

die Gesammtheit der von einander linear unabhängigen, so ist

$$U = (\Sigma \beta_s W_s) W_h^{-1}.$$

Setzt man

$$W_h^1 S^1 W_h = PS^1,$$

so kann $P$ als eine völlig willkürliche Lösung der Gleichung 1) angesehen werden, so dass also die Coefficienten $\alpha$ in der Gleichung

$$P = \sum_{\mu} \alpha_s P_s$$

selbst willkürlich sind. Zugleich wird aber

$$P = W_h^1 U^1 S^1 U W_h (S^1)^{-1}.$$

$$= (\Sigma \beta_s W_s^1) S^1 (\Sigma \beta_\sigma W_\sigma)(S^1)^{-1};$$

man erhält also vermöge der auf S. 351 ausgeführten Betrachtung wieder zur Bestimmung der $\beta$ die Gleichungen 6), wie zu zeigen war.

Man erhält also folgenden Satz:

Die Anzahl der willkürlichen Parameter, durch welche eine Form $S$ von nicht verschwindender Determinante in sich cogredient transformirt wird, ist gleich

$$m - \mu$$

wo $m$ die Anzahl der linear von einander unabhängigen mit $(S^1)^{-1}S$ vertauschbaren Formen, $\mu$ die Zahl der von einander linear unabhängigen Formen $P$ ist, die der Gleichung 1) genügen.

Sei, um diese Theorie auf ein Beispiel anzuwenden, $S$ eine symmetrische Form. Dann ist $(S^1)^{-1}S = E$, also $m = n^2$. Dagegen ist die Zahl der von einander linear unabhängigen Formen, welche der Gleichung 1)

$$SP^1 = PS$$

genügen gleich $\frac{1}{2}n(n+1)$, da hierzu nur erforderlich ist, dass $PS$ eine symmetrische Form ist, also $\mu = \frac{1}{2}n(n+1)$. Mithin beträgt die Zahl der Parameter $\beta$

$$n^2 - \tfrac{1}{2}n(n+1) = \tfrac{1}{2}n(n-1).$$

Ist dagegen $S$ alternirend, so findet man auf demselben Wege $m = n^2$, und für die alternirende Form

$$SP^1 = PS = -(SP^1)^1,$$

$\mu = \frac{1}{2}n(n-1)$, also

$$m - \mu = \tfrac{1}{2}n(n+1).$$

Man kann nun endlich leicht zeigen, dass die Zahl $m - \mu$ gleich der Anzahl der willkürlichen Parameter ist, welche in den nicht singulären Substitutionen auftreten, die vermöge der Gleichung

$$ST + S^1T^1 = o \tag{7}$$

bestimmt werden.

Bezeichnet man mit

$$T_1,\ T_2 \cdot \cdot T_\varrho,$$

die von einander linear unabhängigen Lösungen der Gleichung 7), so ist

$$T = \Sigma \beta_\varrho T_\varrho;$$

und zugleich nach § X, 4)

$$T = \Sigma \alpha_s (S^{-1} W_s - W_s^1 S^{-1}),$$

sowie

$$S^{-1} W_s - W_s^1 S^{-1} = \Sigma \beta_{\varrho s} T_\varrho,$$

also

$$8) \qquad \beta_\varrho = \sum_m \alpha_s \beta_{\varrho s}.$$

Da die Grössen $\beta$ von einander unabhängig sind, so können nicht alle $\varrho$ reihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{Vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdot \cdot & \beta_{1m} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdot \cdot & \beta_{2m} \\ \cdot & & \cdot \cdot & \cdot \\ \beta_{\varrho 1} & \beta_{\varrho 2} & \cdot \cdot & \beta_{\varrho m} \end{Vmatrix}$$

verschwinden. Den Gleichungen

$$9) \qquad \sum_m \alpha_s \beta_{\sigma s} = o,\ \sigma = 1,\ 2 \cdot \cdot \varrho,$$

genügen daher $m - \varrho$ von einander linear unabhängige Systeme der Grössen $\alpha_s$. Bezeichnet man diese durch

$$\begin{matrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \cdot \cdot & \alpha_m^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdot \cdot & \alpha_m^2 \\ \vdots & \vdots & & \cdot \\ \alpha_1^{m-\varrho} & \alpha_2^{m-\varrho} & \cdot \cdot & \alpha_m^{m-\varrho} \end{matrix}$$

so verschwinden auch die $m - \varrho$ reihigen Determinanten der Matrix aus den $\alpha_i^k$ nicht sämmtlich. Es sind demnach die Formen

$$\begin{matrix} \alpha_1^1 & W_1 + \cdot \cdot \alpha_m^1 & W_m = Z_1, \\ \alpha_1^2 & W_1 + \cdot \cdot \alpha_m^2 & W_m = Z_2, \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{m-\varrho} & W_1 + \cdot \cdot \alpha_m^{m-\varrho} & W_m = Z_{m-\varrho}, \end{matrix}$$

linear von einander unabhängig, welche zufolge der Gleichungen 9) die Gleichung

$$S^{-1}Z - Z^{1}S^{-1} = o$$

oder die Gleichung 1) befriedigen. Die Anzahl dieser Formen ist aber gleich $\mu$. Demnach ist

$$\mu = m - \varrho, \quad \varrho = m - \mu.$$

Hieraus folgt der Satz:

Die nicht singulären Substitutionen, welche eine Form $S$ in sich transformiren, enthalten ebenso viele willkürliche Parameter, wie die allgemeinste Substitution dieser Art überhaupt.

---

# Inhalt.

Das

# Bayerische Praecisions-Nivellement.

Achte Mitteilung

von

**Carl Max von Bauernfeind.**



# Ergebnisse

des in

# Verbindung mit der Europäischen Gradmessung in Bayern

ausgeführten

# Präcisions-Nivellements.

---

## Achte Mitteilung

von

**Carl Max v. Bauernfeind.**

---

Meine vor zwei Jahren erschienene letzte Mitteilung über das Bayerische Präcisionsnivellement spricht die Hoffnung aus, dass die nächste die letzte sein und nicht blos sämtliche Beobachtungen nebst deren Reduktionen für die im rechtsrheinischen Teile von Bayern noch auszuführenden Messungen, sondern auch eine neue Ausgleichung und Kotenberechnung des gesamten Höhennetzes dieser sieben Provinzen enthalten werde. Diese Hoffnung lässt sich indessen in dem hier bezeichneten Umfange nicht erfüllen, weil das in den Jahren 1888 und 1889 noch gesammelte Beobachtungsmaterial einen viel grösseren Umfang annahm, als damals vorausgesetzt werden konnte, und weil man dasselbe nicht ein Jahr unberührt liegen lassen kann, um es dann mit den seit 20 Jahren in Bayern gewonnenen Ergebnissen in Einem auszugleichen und auf Grund der erst kürzlich von der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme in Preussen erhaltenen zuverlässigen Koten dreier an der Nordgrenze von Bayern gelegener Anschlusspunkte bei Kahl, Elm und Obersiemau die Höhen unserer Festpunkte über Normalnull zu berechnen.

Empfiehlt sich ein solches Verfahren schon aus dem Grunde nicht, weil es erstens eine weise Vorsichtsmassregel ist, ein mit grossen Kosten erworbenes Beobachtungsmaterial sobald als möglich durch den Druck

gegen Unfälle aller Art, wie Feuer- und Wassersgefahr, Diebstahl, Unleserlichwerden u. dgl. sicher zu stellen, und weil zweitens die Bearbeitung und das Studium der Ausgleichung sämtlicher Bayerischer Nivellements wesentlich erleichtert wird, wenn die massgebenden Zahlenwerte gedruckten Mitteilungen zu entnehmen und in diesen wiederum nachzusehen sind, so gibt es noch einen triftigen weiteren Grund, aus der in Aussicht gestellten einen und letzten Mitteilung deren zwei zu machen, wovon die erste (gegenwärtige) alle Beobachtungen und die zweite (künftige neunte) die neue Ausgleichung und Kotenberechnung enthält, und dieser Grund ist der allzugrosse Umfang, den die gegenwärtige Mitteilung annehmen würde, wenn sie allen schon vorhandenen und noch zu beschaffenden Stoff allein aufnehmen sollte.

Dass aber das in den letzten zwei Jahren noch einzuheimsende Material einen so grossen Umfang angenommen hat, wie es thatsächlich der Fall ist, erklärt sich einerseits aus dem Bestreben, das Bayerische Präcisionsnivellement so zu vervollkommnen, dass es sich den besten Arbeiten dieser Art gleichstellen kann, und andererseits aus dem Wunsche, dieses Nivellement nicht blos zu seinem ursprünglichen Zwecke, der Untersuchung der Höhenlage aller europäischen Meeresspiegel, sondern hauptsächlich auch zu zwar untergeordneten, aber sehr wichtigen technischen Höhenmessungen im Lande selbst zu befähigen.

Behufs der Beschaffung neuer Fixpunkte erster Ordnung, an welche die Nivellements der Baubehörden und des topographischen Bureau überall angeknüpft werden können, erschien es vor allem notwendig, das ehemalige alte Polygon Nr III, welches von Nürnberg über Regensburg, Straubing, Landshut nach München und von da über Augsburg, Donauwörth und Nördlingen nach Nürnberg läuft, durch eine von Regensburg ausgehende und an der Donau bis Offingen sich hinziehende Querlinie in zwei noch immerhin ansehnliche Polygone zu teilen, um mehrere Festpunkte an der Donau und gleichzeitig, in Verbindung mit dem ebenfalls neuen Präcisionsnivellement der Strecke Würzburg-Nördlingen, den Vorteil zu erreichen, unsere westlichen Nivellementslinien unabhängig von dem Württembergischen Präcisionsnivellement ausgleichen zu können, das wir dem unserigen an Güte nicht gleichstellen können, da es nur als Eisenbahn-Nivellement hergestellt worden ist.

Dann waren infolge einer strengen Kritik, welche wir an unseren eigenen Nivellements ausübten, Wiederholungen von Nivellementsstrecken in einigen Schleifen angezeigt, welche zwar an der Grenze liegende kleine Schlussfehler hatten, aber doch verbesserungsbedürftig waren, wie z. B. die Linien Nürnberg-Bamberg und Weigolshausen-Würzburg. Dazu kamen einige Nivellierungen, welche, strenge genommen, eigentlich nicht unmittelbar unter die Aufgaben der Gradmessungskommission gehörten, aber derselben von dem K. Staatsministerium des Innern für Kirchen- und Schulangelegenheiten zur Ausführung und Verrechnung übertragen wurden, wie z. B. die Nivellements der Strassenstrecken zwischen Oberstaufen-Weiler-Scheidegg-Oberreitnau und Weiler-Scheffau-Scheidegg, welche für die Herstellung einer hydrographischen Karte des Bodensee's nötig waren. Aehnliches gilt von den Wiederholungen der Nivellements zwischen Höhensteig bei Rosenheim, Irschenberg bei Aibling und Kampenwand bei Hohenaschau; nur wurden diese nicht seitens der K. Staatsregierung verlangt, sondern nach wiederholter strenger Prüfung der geodätischen Grundlagen meiner zwischen den genannten Punkten ausgeführten Beobachtungen und Untersuchungen der terrestrischen Strahlenbrechung vorgenommen.

Endlich haben wir auch zur vollständigen Durchführung meines Planes, mit dem Bayerischen Präcisionsnivellement auch die Höhenlagen aller bedeutenderen Bayerischen Gewässer festzustellen, noch mehrere Anschlussmessungen machen müssen, z. B. am Alpsee bei Immenstadt, am Schliersee, Ammersee, Tegernsee, Simssee und Waginger See, zwischen dem Kanalhafen bei Kelheim und der Station Saal der Bahnlinie Ingolstadt-Regensburg und an verschiedenen Pegeln der Donau, des Inns, der Traun, der Mangfall u. s. w.

Wir wissen jetzt, dass alle neuen Polygone, deren Zahl doppelt so gross ist als früher, gut schliessen und nur sehr kleine sog. Kilometerfehler haben; wir können deshalb auch von der in der nächsten Mitteilung zu veröffentlichenden Ausgleichung des ganzen Bayerischen Präcisions-Nivellements ein sehr günstiges Ergebnis erwarten.

---

## A. Erweiterungen des Präcisions-Nivellements im Jahre 1888
zwischen Würzburg, Rothenburg o. T., Dombühl und Nördlingen.

Die im Herbste des genannten Jahres ausgeführten Nivellierungsarbeiten hat nach meiner Anordnung und unter meiner Aufsicht und teilweise speziellen Mitwirkung der Assistent der K. Bayer. Erdmessungskommission, Ingenieur Karl Oertel besorgt. Sie nahmen die Zeit vom 15. September bis 12. Oktober, also 28 Tage in Anspruch, wovon indess nur 20 wirkliche Arbeitstage waren. Die ganze Nivellementslinie setzt sich aus folgenden Eisenbahn- und Strassennivellementsstrecken zusammen:

1. Die Linie Würzburg-Steinach-Rothenburg o. T. wurde neu nivelliert, ist aber seitens der Generaldirektion der K. Verkehrsanstalten mit einem Nivellement II., bezw. III. Ordnung überzogen, sodass die meisten Fixpunkte und Höhenmarken schon angebracht waren. Die Länge dieser Strecke ist 66,884 Kilometer, die Anzahl der Instrumentenstände 584, die mittlere Zielweite 57 m, die wirkliche Arbeitszeit 10,5 Tage, daher die mittlere Arbeitsleistung pro Tag 6,4 Kilometer oder 56 Instrumentenstände.

2. Rothenburg o. T.-Dombühl ist im Gegensatz zur vorangehenden Strecke mangels einer direkten Bahnverbindung auf der Strasse nivelliert worden, hier mussten sämtliche Fixpunkte und Höhenmarken neu angebracht werden. Die Länge dieser Strecke ist 21,492 Kilometer, die Anzahl der Instrumentenstände 295, die mittlere Zielweite 36 m, die Arbeitszeit 3,5 Tage, daher die mittlere tägliche Leistung 6,2 Kilometer oder 70 Instrumentenstände.

3. Dombühl-Nördlingen ist gleichfalls in das Nivellementsnetz II. Ordnung schon einbezogen. Es war die Länge 53,980 Kilometer, die Anzahl der Instrumentenstände 402, die mittlere Zielweite 67 m,

die Arbeitszeit 6 Tage, die mittlere tägliche Leistung = 9,0 Kilometer oder 67 Instrumentenstände. Die Länge aller drei Strecken zusammen beträgt 142,37 Kilometer, und da die für das Nivellement notwendige Zahl der Instrumentenstände 1281 war, so war für die ganze Strecke die mittlere Zielweite 55 m und die mittlere tägliche Arbeitsleistung 7,12 Kilometer.

Die Anzahl der durch die vorstehend verzeichneten Nivellements neu in das Bayerische Höhennetz I. Ordnung eingemessenen Fixpunkte beträgt 94, wovon 73 in Stein gehauen, die übrigen 21 Metall-Höhenmarken mit Bolzen sind.

## Die Konstanten der Instrumente.

Wie gewöhnlich, wurde Instrument Nr I ausschliesslich benützt. Die Konstante desselben für die Distanzmessung wurde zweimal, vor Anfang und am Ende der Messungen bestimmt. Es wurde erhalten

in Weigolshausen, am 10. September nachm.: $\cot \varphi = 139{,}641 \pm 0{,}012$
in Nördlingen, am 11. Oktober früh: $\cot \varphi = 139{,}759 \pm 0{,}079$

die Zielweiten für sämtliche Strecken wurden also, unter $a$ den Lattenabschnitt zwischen den äusseren Fäden verstanden, berechnet aus

$$E = 139{,}700\ a + 0{,}78\ \text{m}$$

Wegen der neuerdings hervorgetretenen starken Veränderlichkeit der Latten Nr VI und VII (vgl. VII. Mittlg., S. 65) wurde von der Benützung derselben abgesehen, es wurden vielmehr die Reversionslatten Nr VIII und IX verwendet, welche ohnedies durch den Wegfall der einen (oberen) Fussplatte eine Vereinfachung des Nivellierverfahrens bieten. Diese Latten wurden vor der Abreise und nach der Rückkehr mit den bekannten Breithaupt'schen Messingmasstäben unter dem Mikroskop abgeglichen und es wurde erhalten

### Latte VIII.

| | Richtige Teilung: | Verschobene Teilung: |
|---|---|---|
| Im September: | $1\ M_L = 1{,}000232\ \text{m} \pm 0{,}0084\ \text{mm}$ | $1\ M_L = 1{,}000224\ \text{m} \pm 0{,}0099\ \text{mm}$ |
| Im Oktober: | „ $= 1{,}000248\ \text{m} \pm 0{,}0105\ \text{mm}$ | „ $= 1{,}000230\ \text{m} \pm 0{,}0073\ \text{mm}$ |
| Im Mittel: | $1\ M_L = 1{,}000240$ w. M. | $1\ M_L = 1{,}000227$ w. M. |

### Latte IX.

| | Richtige Teilung: | Verschobene Teilung: |
|---|---|---|
| Im September: | $1\ M_L = 1{,}000178\ m \pm 0{,}0149\ mm$ | $1\ M_L = 1{,}000176\ m \pm 0{,}0088\ mm$ |
| Im Oktober: | „ $= 1{,}000190\ m \pm 0{,}0214\ mm$ | „ $= 1{,}000217\ m \pm 0{,}0077\ mm$ |
| Im Mittel: | $1\ M_L = 1{,}000184$ w. M. | $1\ M_L = 1{,}000196$ w. M. |

Nimmt man alle vier Werte einfach zusammen, so erhält man als Gesamtmittel für beide Latten

$$1\ M_L = 1{,}000212 \text{ w. M.}$$

Man sieht hieraus, dass die Latten VIII und IX ihre Länge sehr konstant erhalten haben, denn nach früheren Bestimmungen betrug die nominelle Meterlänge derselben im Herbst 1887 (siehe VII. Mittl., S. 68):

$$1\ M_L = 1{,}000210 \text{ w. M.}$$

Mit dem obigen, für 1888 ermittelten Werte der nominellen Lattenmeterlänge wurden alle gemessenen Höhenunterschiede reduziert.

Eine weitere Untersuchung der beiden Latten, welche bis jetzt noch fehlte, bezog sich auf das Verhältnis der mittleren Breite der weissen Centimeterfelder zur mittleren Breite eines Lattencentimeters. Es wurde jeder einzelne Centimeter mit einem Silbermasstab gemessen, und ausgedrückt in Einheiten dieses Letzteren, erhalten:

| | Latte VIII. | | Latte IX. | |
|---|---|---|---|---|
| | Richtige Tlg. cm | Verschob. Tlg. cm | Richtige Tlg. cm | Verschob. Tlg. cm |
| 1. Mittlere Breite der weissen Felder (aus je 300 Messungen) . . . . | 0,9882 | 0,9875 | 0,9838 | 0,9863 |
| 2. Mittlere Breite aller Felder (aus je 600 Messungen) . . . . . . . | 0,9993 | 0,9986 | 0,9980 | 0,9996 |
| 3. Verhältniszahl $w$ der in (1) und (2) ausgedr. Felderbreiten . . . | 0,9889 | 0,9889 | 0,9858 | 0,9868 |

Als Mittel aus (3) wird erhalten

$$w = 0{,}9876.$$

Es wären somit alle geschätzten Centimeterbruchteile $B$ zu verbessern um $-0{,}0124\ B$. Da aber, selbst bei sehr grossen Abteilungen, die Unterschiede der Summen aller $B$ im Vor- und Rückblick den Betrag von 1 bis 2 Centimeter nicht überschreiten, ist der Einfluss dieser Verbesserung auf die gemessenen Höhenunterschiede = Null.

Durch das neue Präcisionsnivellement der in Rede stehenden Linien, speziell der Strecke Würzburg-Steinach ist eine Unsicherheit beseitigt, welche bei Herstellung des Nivellements dritter Ordnung auf der Linie Würzburg-Ansbach und der Kotenbestimmung des letzteren Punktes aufgetreten war. Es wurde nämlich durch die Ingenieure der Generaldirektion der K. Bayerischen Verkehrsanstalten die von Würzburg aus ermittelte Meereshöhe der Höhenmarke am Bahnhof zu Ansbach um rund 25 cm anders gefunden, als diejenige, welche sich im Mittel aus den von Nürnberg, Gunzenhausen und Crailsheim ausgehenden Nivellements ergab. Diese letztere stimmt aber vollständig überein mit der inzwischen durch das Präcisionsnivellement gefundenen, denn es ist nach Mittlg. VII, S. 57 die Kote der ⊙ in Ansbach 451,0993 m, und mit der bisher angenommenen Meereshöhe des Horizonts unserer Koten = 861,0798 m wird die Meereshöhe dieser ⊙ = 409,9805 m. Die Generaldirektion gibt (II. Mittlg. derselben, S. 12 und S. 25, Nr 1759) 409,981, also genau dasselbe. Leider lässt sich den etwas unklaren Mitteilungen der Generaldirektion nicht entnehmen, in welchem Sinne die Differenz von 0,25 m auftrat. Die definitive Kotenberechnung der Fixpunkte auf der Linie Würzburg-Ansbach wurde dann in der Weise durchgeführt, dass die oben schon erwähnte Kote der ⊙ in Ansbach festgehalten und die Anschlussdifferenz von 0,25 m proportional der Wurzel aus dem Abstand von dieser Höhenmarke abgeglichen wurde. Die nachfolgende Vergleichung der aus dem neuen Präcisionsnivellement (mit der Meereshöhe des Horizonts 861,0798) berechneten Meereshöhen mit denen des Nivellements III. Ordnung zeigt, dass damit so ziemlich das Richtige getroffen worden ist, wenngleich die mit der Nivellierung dieser Strecke und der nachträglichen Reduktion der Aufnahmen betrauten Ingenieure der K. Generaldirektion, wie ihren Mitteilungen zu entnehmen ist, nur mit Widerstreben sich zu einer derartigen Beseitigung dieses ungewöhnlich grossen Anschlussfehlers entschlossen. Noch ist zu bemerken, dass beide Nivellements von der ⊙ 943 in Würzburg ausgehen, jedoch von verschiedenen Koten derselben: das Nivellement III. Ordnung von der in unserer II. Mitteilung gegebenen Kote 666,9721 m = 194,1077 m Meereshöhe, das neue Präcisionsnivellement dagegen von der Kote 666,9495 m (S. 369 der gegenwärtigen Mitteilung) und entsprechender Meereshöhe 194,1303 m. Der Unterschied der Meereshöhen ist 0,0226 m;

um diesen Betrag müssten also alle Meereshöhen der auf der Strecke von Würzburg bis Steinach beiden Nivellements gemeinschaftlichen Fixpunkte verschieden sein, wenn die durch das obenbeschriebene Verfahren erhaltenen Meereshöhen des Nivellements III. Ordnung richtig sein sollen.

| Nr der General-Dir. | Fixpunkt | Meereshöhe | | Differenz |
|---|---|---|---|---|
| | | Präc.-Nivellem. | General-Dir. | |
| | | m | m | m |
| 1950 | ☐ Bahnbrücke . . . . | 193,82 | 193,80 | + 0,02 |
| 1951 | ☐ Bahnbrücke . . . . | 180,65 | 180,63 | + 0,02 |
| 1952 | ⊙ zu Heidingsfeld . . . | 186,15 | 186,14 | + 0,01 |
| 1953 | ☐ Bahndurchlass . . . | 182,32 | 182,31 | + 0,01 |
| 1954 | ☐ Bahndurchlass . . . | 179,58 | 179,57 | + 0,01 |
| 1955 | ☐ Bahndurchlass . . . | 179,54 | 179,55 | — 0,01 |
| 1956 | ⊙ zu Winterhausen . . | 190,25 | 190,25 | 0,00 |
| 1957 | ☐ Bahndurchlass . . . | 184,57 | 184,57 | 0,00 |
| 1958 | ⊙ zu Gossmannsdorf . . | 183,47 | 183,47 | 0,00 |
| 1959 | ☐ Bahndurchlass . . . | 180,15 | 180,16 | — 0,01 |
| 1960 | ⊙ zu Ochsenfurt . . . | 194,24 | 194,25 | — 0,01 |
| 1961 | ☐ Bahndurchlass . . . | 199,39 | 199,40 | — 0,01 |
| 1962 | ⊙ zu Marktbreit . . . | 208,96 | 208,96 | 0,00 |
| 1963 | ☐ Bahndurchlass . . . | 218,10 | 218,11 | — 0,01 |
| 1964 | = Bahngrenzstein . . . | 246,58 | 246,59 | — 0,01 |
| 1965 | ☐ Wegdurchlass . . . . | 276,84 | 276,84 | 0,00 |
| 1966 | ☐ Bahnbrücke . . . . | 285,01 | 285,01 | 0,00 |
| 1967 | ☐ Wegdurchlass . . . . | 300,01 | 300,00 | + 0,01 |
| 1968 | ⊙ zu Herrnbergtheim . . | 311,08 | 311,08 | 0,00 |
| 1969 | ☐ Bahndurchlass . . . | 310,49 | 310,49 | 0,00 |
| 1970 | ☐ Wegdurchlass . . . . | 324,00 | 324,01 | — 0,01 |
| 1971 | ⊙ zu Uffenheim . . . . | 344,34 | 344,34 | 0,00 |
| 1972 | ☐ Bahndurchlass . . . | 369,99 | 369,99 | 0,00 |
| 1973 | ☐ Wegdurchlass . . . . | 383,03 | 383,03 | 0,00 |
| 1974 | ⊙ zu Ermetzhofen . . . | 382,74 | 382,74 | 0,00 |
| 1975 | ☐ Bahndurchlass. . . . | 392,52 | 392,52 | 0,00 |
| 1976 | ☐ Bahndurchlass. . . . | 380,62 | 380,63 | — 0,01 |
| 1977 | ☐ Bahndurchlass . . . | 372,22 | 372,22 | 0,00 |
| 1978 | ⊙ zu Steinach . . . . | 371,29 | 371,30 | — 0,01 |

Wie man sieht, sind die Schwankungen der Differenzen in der letzten Columne nicht bedeutend, woraus zu schliessen ist, dass der grosse Anschlussfehler der Nivellements III. Ordnung in Ansbach in der That durch allmählige Summierung von Nivellementsfehlern entstand.

Wie in den früheren Mitteilungen gilt die auf Seite 368 abgedruckte Uebersicht der Abkürzungen und Erläuterungen unverändert auch für alle Fixpunktsverzeichnisse des gegenwärtigen Heftes.

# I.

## Fixpunkt-Verzeichnis

für die im Herbst 1888 ausgeführten Präcisions-Nivellements-Strecken:

1. **Würzburg-Steinach-Rothenburg o. T.,**
2. **Rothenburg-Schillingsfürst-Dombühl,**
3. **Dombühl-Nördlingen.**

# Erklärung der Ueberschriften und Zeichen.

**Nr** Laufende Nummer der Höhenmarke oder des Fixpunktes; und zwar bezeichnen die mit arabischen Ziffern gedruckten Zahlen die gewöhnlichen Fixpunkte des Präcisionsnivellements im Umfange der Polygone, während die mit römischen Ziffern gedruckten Zahlen den teils innerhalb, teils ausserhalb der Polygone liegenden Hauptfixpunkten zugehören.

**A** Nummer einer Abteilung zwischen zwei benachbarten Fixpunkten, nach der Reihenfolge der Aufnahme;

**J** Anzahl der Stände des Instrumentes in einer Abteilung;

**Z** die in derselben angewendete mittlere Zielweite in Metern;

**D** die Distanz zweier sich folgenden Fixpunkte in Metern;

**H** deren Höhenunterschied in Metern;

**w** wahrscheinlicher Fehler von H in Millimetern;

**w′** derselbe Fehler, reduciert auf D = 1 Kilometer, in Millimetern;

⊙ messingene Höhenmarken (Bolzen mit centraler Bohrung) in verticalen Wänden;

□ wagrechte in Stein gehauene und mit einer Rinne umgebene Vierecke, welche zur Bezeichnung von Fixpunkten dienen;

⎃ dergleichen, mit den eingemeisselten Buchstaben HM (Höhenmarke), oder auch viereckige Cementplatten, in rauhe oder bröckelnde Steine eingesetzt;

= wagrecht geebnete Steinflächen zur Bezeichnung untergeordneter Fixpunkte;

**Pl** Planiehöhe (Schwellenoberfläche) der Eisenbahn.

Die Kunstbauten der Bahnen sind teils auf grössere Strecken fortlaufend, teils nach den bei dem Baue bestandenen Sectionen numeriert.

Die eingeklammerten Abteilungen {. . . .} bilden Zweignivellements zu Höhenmarken und Fixpunkten, auf deren Koten das durchlaufende Nivellement sich nicht stützt.

Bei Wiederholungs-Nivellements sind die laufenden Nummern der Fixpunkte diejenigen der darauf Bezug habenden früheren Mitteilungen; Fixpunkte ohne Nummern oder solche mit grösseren Abweichungen gegen die früher gefundenen Koten sind neu.

## Würzburg-Steinach-Rothenburg.

| Nr | A | J | Z | D | ±H | w | w² | w′ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 943. | ⊙ an der gewölbten Wegbrücke für die Staatsstrasse von Kitzingen nach Würzburg an der Würzburg-Ansbacher Linie, Mitte des östlichen Widerlagers, bei Kilometer 274 + 860ᵐ (vgl. S. 421) | | | | | | | | |
| 6 | | | | | — 1,3726 | | | | 666,9495 |
| | Gewölbte Bahnbrücke bei Kilometer 273 + 745ᵐ, östliche Stirn, □ auf einem Brüstungsstein, 0,28ᵐ über Pl. | | | | | | | | |
| 1 | 10 | 55 | 1111 | | — 1,0638 | 0,4 | 0,2 | 0,4 | 667,2589 |
| | Gewölbte Bahnbrücke mit 1 Oeffnung nordwestlich vom Dorfe Heidingsfeld, □ in einer Deckplatte der südöstlichen Stirn, bei Kilometer 272 + 65ᵐ; 0,04ᵐ über Pl. | | | | | | | | |
| 2 | 20 | 42 | 1677 | | + 13,1757 | 0,7 | 0,5 | 0,5 | 680,4346 |
| | □ in der Treppenstufe vor der Eingangsthür zum Bahnmeisterbureau, links unterhalb der Höhenmarke in Heidingsfeld; 0,93ᵐ über Pl. | | | | | | | | |
| 3 | 18 | 44 | 1576 | | — 3,8199 | 0,6 | 0,4 | 0,5 | 676,6147 |
| | ⊙ am Betriebshauptgebäude in der Station Heidingsfeld, Perronseite, Ecklisene des vorspringenden Mittelbaues, links neben dem Eingang zum Wartsaal II. Klasse | | | | | | | | |
| 4 | 1 | | | | — 1,6808 | | | | 674,9339 |
| | Gewölbter Bahndurchlass bei Kilometer 268 + 965ᵐ, □ auf einer Deckplatte der nordöstlichen Stirn; 0,50ᵐ unter Pl. | | | | | | | | |
| 1 | 11 | 69 | 1520 | | + 2,1469 | 0,6 | 0,3 | 0,5 | 678,7616 |
| | Gedeckter Bahndurchlass bei Kilometer 267 + 160ᵐ, östliche Stirn, □ auf dem Deckstein des südlichen Flügels; 0,37ᵐ über Pl. | | | | | | | | |
| 2 | 13 | 69 | 1795 | | + 2,7431 | 0,8 | 0,6 | 0,6 | 681,5047 |
| | Offner Bahndurchlass bei Kilometer 265 + 380ᵐ, südliches Widerlager, □ auf der nordöstlichen Eckdeckplatte; 0,09ᵐ unter Pl. | | | | | | | | |
| 3 | 13 | 69 | 1782 | | + 0,0326 | 0,6 | 0,3 | 0,4 | 681,5373 |

## Würzburg-Steinach-Rothenburg.

| Nr | A | J | Z | D | ±H | w | w² | w' | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| □ auf der Treppenstufe vor dem Eingang zum Wartsaal II. Klasse zu Winterhausen, links unterhalb der Höhenmarke; 0,97m über Pl. | | | | | | | | | |
| 4 | 19 | 67 | 2540 | — 8,9216 | 0,8 | 0,6 | 0,5 | | 672,6157 |
| ⊙ am Betriebsgebäude der Station Winterhausen, Perronseite, links neben der Eingangsthür zum Wartsaal II. Klasse | | | | | | | | | |
| 5 | 1 | | | — 1,7799 | | | | | 670,8358 |
| Offner Bahndurchlass bei Kilometer 261 + 523m, südliches Widerlager, □ auf der nordöstlichen Abdeckplatte des östlichen Flügels, 0,05m unter Pl. | | | | | | | | | |
| 1 | 11 | 59 | 1293 | + 3,8984 | 0,5 | 0,2 | 0,4 | | 676,5141 |
| □ unter der Höhenmarke zu Gossmannsdorf, in die untere Treppenstufe gehauen; 0,69m über Pl. | | | | | | | | | |
| 2 | 19 | 43 | 1649 | + 2,9211 | 0,7 | 0,5 | 0,6 | | 679,4352 |
| ⊙ am Haltstellgebäude zu Gossmannsdorf, Perronseite, links neben der Eingangsthür zum Wartsaal | | | | | | | | | |
| 3 | | | | — 1,8205 | | | | | 677,6147 |
| Gedeckter Bahndurchlass bei Kilometer 258 + 345m, nordöstliche Stirn, □ auf der südöstlichen Flügeldeckplatte; 0,74m unter Pl. | | | | | | | | | |
| 1 | 17 | 45 | 1535 | + 1,4944 | 0,6 | 0,4 | 0,5 | | 680,9296 |
| □ unter der Höhenmarke zu Ochsenfurt, in die Treppenstufe gehauen; 0,82m über Pl. | | | | | | | | | |
| 2 | 26 | 53 | 2751 | — 12,4947 | 0,7 | 0,5 | 0,4 | | 668,4349 |
| ⊙ am Betriebshauptgebäude der Station Ochsenfurt, Perronseite, westliche Ecklisene | | | | | | | | | |
| 3 | | | | — 1,5943 | | | | | 666,8406 |
| Gedeckter Bahndurchlass bei Kilometer 251 + 530m, □ auf der östlichen Deckplatte der Stirne am Einlauf; 0,92m unter Pl. | | | | | | | | | |
| 1 | 35 | 58 | 4049 | — 6,7405 | 1,0 | 1,0 | 0,5 | | 661,6944 |

## Würzburg-Steinach-Rothenburg.

<table>
<tr><th>Nr</th><th>A</th><th>J</th><th>Z</th><th>D</th><th>±H</th><th>w</th><th>w²</th><th>w′</th><th>Kote</th></tr>
<tr><td></td><td colspan="9">□ unter der Höhenmarke zu Marktbreit, in das Perronpflaster gehauen; 0,89$^{m}$ über Pl.</td></tr>
<tr><td></td><td>2</td><td>17</td><td>43</td><td>1469</td><td>— 7,8897</td><td>0,6</td><td>0,4</td><td>0,5</td><td>653,8047</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="9">⊙ am Betriebshauptgebäude der Station Marktbreit, Perronseite, südöstliche Ecklisene</td></tr>
<tr><td></td><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td>— 1,6808</td><td></td><td></td><td></td><td>652,1239</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="9">Offner Bahndurchlass bei Kilometer 248 + 675$^{m}$ und Bahnwärterposten Nr 73, südöstliches Widerlager, □ auf der nordöstlichen Eckdeckplatte; 0,08$^{m}$ unter Pl.</td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td>12</td><td>62</td><td>1486</td><td>— 10,8254</td><td>0,6</td><td>0,3</td><td>0,5</td><td>642,9793</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="9">□ im Sockel der Läutebude bei Bahnwärterposten Nr 72, südwestliche Ecke; 0,19$^{m}$ über Pl.</td></tr>
<tr><td></td><td>2</td><td>6</td><td>56</td><td>668</td><td>— 6,9203</td><td>0,6</td><td>0,3</td><td>0,7</td><td>636,0590</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="9">□ auf dem Bahngrenzstein Nr 38 westlich der Bahn bei Kilometer 245 + 707$^{m}$; 0,32$^{m}$ unter Pl.</td></tr>
<tr><td></td><td>3</td><td>16</td><td>68</td><td>2192</td><td>— 21,5618</td><td>0,5</td><td>0,3</td><td>0,3</td><td>614,4972</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="9">Gedeckter Strassendurchlass für den Seitengraben nordwestlich der Bahn bei Kilometer 242 + 700$^{m}$, □ auf der südwestlichen Deckplatte; 0,24$^{m}$ unter Pl.</td></tr>
<tr><td></td><td>4</td><td>28</td><td>54</td><td>3000</td><td>— 30,2561</td><td>0,7</td><td>0,5</td><td>0,4</td><td>584,2411</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="9">Gewölbter Bahndurchlass bei Kilometer 241 + 680$^{m}$, östliche Stirn, □ auf dem südlichen Eckgesimsstein; 2,01$^{m}$ unter Pl.</td></tr>
<tr><td></td><td>5</td><td>8</td><td>63</td><td>1012</td><td>— 8,1736</td><td>0,4</td><td>0,2</td><td>0,4</td><td>576,0675</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="9">Gedeckter Strassendurchlass für den Seitengraben südwestlich der Bahn bei Kilometer 240 + 395$^{m}$, □ auf der mittleren Deckplatte der südöstlichen Stirn; 0,14$^{m}$ über Pl.</td></tr>
<tr><td></td><td>6</td><td>10</td><td>64</td><td>1279</td><td>— 14,9957</td><td>0,4</td><td>0,2</td><td>0,4</td><td>561,0718</td></tr>
</table>

## Würzburg-Steinach-Rothenburg.

| Nr | A | J | Z | D | ± H | w | w² | w′ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ⊙ am Betriebsgebäude der Station Herrnbergtheim, Perronseite, südliche Ecklisene; 2,28ᵐ über Pl. | | | | | | | | |
| | 7 | 10 | 62 | 1245 | — 11,0734 | 0,4 | 0,2 | 0,4 | 550,9984 |
| | Gedeckter Strassendurchlass nordöstlich der Bahn an der Ueberfahrt bei Gollhofen, □ auf der Deckplatte der nordwestlichen Stirn, bei Kilom. 237 + 605ᵐ; 0,67ᵐ unter Pl. | | | | | | | | |
| | 1 | 16 | 49 | 1578 | — 2,1255 | 0,6 | 0,4 | 0,5 | 547,8729 |
| | Schiefer offner Bahndurchlass über die Gollach bei Kilometer 237 + 760ᵐ, linkseitiges Widerlager, □ auf der nordöstlichen Eckdeckplatte; 0,02ᵐ unter Pl. | | | | | | | | |
| | 2 | 8 | 53 | 844 | + 2,7186 | 0,4 | 0,1 | 0,4 | 550,5915 |
| | Schiefer gedeckter Strassendurchlass für den nördlichen Bahngraben bei Kilometer 234 + 850ᵐ, □ auf der mittleren Deckplatte der westlichen Stirn; 0,06ᵐ über Pl. | | | | | | | | |
| | 3 | 16 | 60 | 1906 | — 13,5127 | 0,6 | 0,3 | 0,4 | 537,0788 |
| | □ unter der ⊙ zu Uffenheim, in die Bodenplatte gehauen; 0,88ᵐ über Pl. | | | | | | | | |
| | 4 | 15 | 68 | 2054 | — 18,3528 | 0,6 | 0,3 | 0,4 | 518,7260 |
| | ⊙ am Betriebsgebäude der Station Uffenheim, Perronseite, links neben der Eingangsthür zum Wartsaal II. Klasse | | | | | | | | |
| | 5 | | | | — 1,9812 | | | | 516,7448 |
| | Gedeckter Bahndurchlass bei Kilometer 229 + 620ᵐ, □ auf der nördlichen Flügeldeckplatte der östlichen Stirn; 0,45ᵐ unter Pl. | | | | | | | | |
| | 1 | 25 | 66 | 3205 | — 27,6308 | 0,9 | 0,8 | 0,5 | 491,0952 |
| | Gedeckter Strassendurchlass für den südwestlichen Seitengraben der Bahn bei Kilometer 228 + 360ᵐ, □ auf der mittleren Deckplatte der nordwestlichen Stirn; 0,03ᵐ über Pl. | | | | | | | | |
| | 2 | 12 | 52 | 1255 | — 13,0382 | 0,5 | 0,3 | 0,5 | 478,0570 |

## Würzburg-Steinach-Rothenburg.

| Nr | A | J | Z | D | ±H | w | w² | w' | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ⊙ am Betriebsgebäude der Station Ermetzhofen, Perronseite, südwestliche Ecklisene; 2,46ᵐ über Pl. | | | | | | | | |
| | 3 | 17 | 69 | 2349 | + 0,2859 | 0,8 | 0,6 | 0,5 | 478,3429 |
| | Offner Bahndurchlass bei Kilom. 224 + 530ᵐ, □ auf dem östlichen Flügeldeckstein des südlichen Widerlagers; 0,17ᵐ unter Pl. | | | | | | | | |
| | 1 | 20 | 55 | 2182 | — 9,7791 | 0,7 | 0,5 | 0,5 | 468,5638 |
| | Gedeckter Bahndurchlass bei Kilometer 223,0, □ auf dem südöstlichen Flügeldeckstein der südwestlichen Stirn; 1,71ᵐ unter Pl. | | | | | | | | |
| | 2 | 12 | 64 | 1529 | + 11,8965 | 0,5 | 0,2 | 0,3 | 480,4603 |
| | Offner Bahndurchlass bei Kilometer 220 + 775ᵐ; nordöstliches Widerlager, □ auf der südlichen Eckdeckplatte; 0,11ᵐ unter Pl. | | | | | | | | |
| | 3 | 18 | 62 | 2216 | + 8,4065 | 0,5 | 0,3 | 0,4 | 488,8668 |
| | □ links unterhalb der Höhenmarke zu Steinach, in die Treppenstufe vor dem Fenster des Expeditionslokals gehauen; 1,06ᵐ über Pl. | | | | | | | | |
| | 4 | 12 | 43 | 1031 | + 2,6159 | 0,5 | 0,3 | 0,5 | 491,4827 |
| | ⊙ am Betriebshauptgebäude der Station Steinach, Perronseite, an der Lisene zwischen den beiden Läuteapparaten | | | | | | | | |
| | 5 | 1 | | | — 1,6942 | | | | 489,7885 |
| | Offner Bahndurchlass bei Kilometer 222 + 176ᵐ, □ auf der südwestlichen Flügeldeckplatte der südöstlichen Stirn; 0,14ᵐ unter Pl. | | | | | | | | |
| | 1 | 19 | 64 | 2448 | — 31,8100 | 0,6 | 0,4 | 0,4 | 459,6727 |
| | Gedeckter Bahndurchlass bei Kilometer 224 + 25ᵐ, □ auf der Deckplatte der westlichen Stirn; Pl. | | | | | | | | |
| | 2 | 14 | 66 | 1848 | — 8,6606 | 0,5 | 0,2 | 0,3 | 451,0121 |
| | ⊙ am Haltstellgebäude zu Hartershofen, Perronseite, südliche Ecke; 2,25ᵐ über Pl. | | | | | | | | |
| | 3 | 8 | 56 | 897 | — 1,3174 | 0,5 | 0,2 | 0,5 | 449,6947 |

## Würzburg-Steinach-Rothenburg.

| Nr. | A | J | Z | D | ±H | w | w² | w' | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

☐ auf einem Bahngrenzstein 15ᵐ südöstlich der Bahn, an der Ueberfahrt für den nach Schweinsdorf führenden Feldweg, bei Kilometer 226 + 120ᵐ; 0,48ᵐ unter Pl.

| 1 | 12 | 50 | 1205 | + 9,7717 | 0,5 | 0,2 | 0,5 | 459,4664 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

Offne Blechträgerbrücke bei Kilometer 227 + 420ᵐ, ☐ auf dem nordwestlichen Flügeldeckstein des nordöstlichen Widerlagers; 0,04ᵐ unter Pl.

| 2 | 14 | 47 | 1303 | + 5,5282 | 0,4 | 0,2 | 0,4 | 464,9946 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

Gedeckter Bahndurchlass bei Kilometer 228 + 730ᵐ, ☐ auf dem nordöstlichen Flügeldeckstein der südöstlichen Stirn; 0,90ᵐ unter Pl.

| 3 | 12 | 55 | 1314 | — 9,0960 | 0,4 | 0,2 | 0,4 | 455,8986 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

☐ auf einem Bahngrenzstein nordwestlich der Bahn, am Ende des Bahnhofes zu Rothenburg o. T.; 0,79ᵐ unter Pl.

| 4 | 12 | 70 | 1671 | — 16,7846 | 0,3 | 0,1 | 0,2 | 439,1140 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

☐ unter der Höhenmarke zu Station Rothenburg o. T., in den untern Sockelvorsprung gehauen; 0,76ᵐ über Pl.

| 5 | 3 | 70 | 420 | — 2,1110 | 0,3 | 0,1 | 0,5 | 437,0030 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

⊙ am Betriebsgebäude der Station Rothenburg o. T., Perronseite, links neben dem Eingang zum Expeditionslokal

| 6 | | | | — 1,6430 | | | | 435,3600 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

= auf einem im Boden festgewachsenen Stein an einer ehemaligen Bastei vor dem Spitalthore zu Rothenburg o. T.

| 1 | 15 | 46 | 1394 | + 14,6240 | 0,6 | 0,3 | 0,5 | 451,6270 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

⊙ an der Spitalkirche zu Rothenburg o. T., nördlicher Hof, erster Strebepfeiler links vom Seiteneingang

| 2 | 3 | 38 | 227 | — 0,3780 | 0,4 | 0,2 | 0,9 | 451,2490 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

☐ auf dem südlichen Abweisstein an der südwestlichen Ecke des Hauses Nr. 19 im Dorfe Gebsattel; 0,94ᵐ über Bodenhöhe

| 3 | 34 | 40 | 2699 | + 35,8048 | 0,7 | 0,5 | 0,4 | 487,4318 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

## Rothenburg-Schillingsfürst-Dombühl.

<table>
<tr><th>Nr</th><th>A</th><th>J</th><th>Z</th><th>D</th><th>± H</th><th>w</th><th>w²</th><th>w′</th><th>Kote</th></tr>
<tr><td colspan="10">□ auf der untersten Treppenstufe der kleinen, südwestlichen Freitreppe vor der Kirche im Dorfe Bockenfeld, nordwestliche Ecke</td></tr>
<tr><td></td><td>4</td><td>26</td><td>54</td><td>2795</td><td>— 8,6703</td><td>0,8</td><td>0,6</td><td>0,4</td><td>478,7615</td></tr>
<tr><td colspan="10">□ auf dem Abweisstein an der westlichen Ecke des Hauses Nr 43 im Dorfe Diebach; 0,97ᵐ über Bodenhöhe</td></tr>
<tr><td></td><td>5</td><td>37</td><td>33</td><td>2468</td><td>— 10,7508</td><td>0,7</td><td>0,5</td><td>0,4</td><td>468,0107</td></tr>
<tr><td colspan="10">Gedeckter Strassendurchlass Lit. a 31 bei Kilometer 30 + 361ᵐ der Staatsstrasse von Ansbach nach Rothenburg o. T. (Zählung ab Ansbach), □ auf der Deckplatte der nördlichen Stirn</td></tr>
<tr><td></td><td>6</td><td>16</td><td>45</td><td>1430</td><td>— 4,5912</td><td>0,4</td><td>0,1</td><td>0,3</td><td>463,4195</td></tr>
<tr><td colspan="10">═ unter der ⊙ in Bellershausen, in's Pflaster gehauen</td></tr>
<tr><td></td><td>7</td><td>17</td><td>46</td><td>1567</td><td>— 9,4895</td><td>0,5</td><td>0,2</td><td>0,4</td><td>453,9300</td></tr>
<tr><td colspan="10">⊙ an der Kirchhofmauer im Dorfe Bellershausen, rechtseitiger Thorpfeiler am Haupteingang</td></tr>
<tr><td></td><td>8</td><td></td><td></td><td></td><td>— 1,7790</td><td></td><td></td><td></td><td>452,1510</td></tr>
<tr><td colspan="10">Gedeckter Strassendurchlass für den südwestlichen Strassengraben bei Kilometer 26 + 613ᵐ, □ auf der nordwestlichen Deckplatte; 0,40ᵐ unter Strassenplanie</td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td>26</td><td>38</td><td>1955</td><td>— 26,9322</td><td>0,9</td><td>0,7</td><td>0,6</td><td>426,9978</td></tr>
<tr><td colspan="10">□ in der obersten Treppenstufe vor dem südwestlichen Eingang der protestantischen Pfarrkirche im Markte Frankenheim-Schillingsfürst, rechts neben der Thüre</td></tr>
<tr><td></td><td>2</td><td>34</td><td>32</td><td>1468</td><td>— 70,5443</td><td>0,7</td><td>0,4</td><td>0,5</td><td>356,4535</td></tr>
<tr><td colspan="10">Gedeckter Strassendurchlass Lit. a 2 an der Strasse von Schillingsfürst nach Dombühl bei Kilometer 1 + 512ᵐ (Zählung ab Schillingsfürst), □ auf der östlichen Stirndeckplatte</td></tr>
<tr><td></td><td>3</td><td>26</td><td>29</td><td>1508</td><td>+ 4,8878</td><td>0,6</td><td>0,4</td><td>0,5</td><td>361,3413</td></tr>
</table>

## Rothenburg-Schillingsfürst-Dombühl.

| Nr | A | J | Z | D | ± H | w | $w^2$ | w′ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Gedeckter Strassendurchlass Lit. a 3 bei Kilometer 2 + 884ᵐ, □ auf der nordöstlichen Stirndeckplatte | | | | | | | | |
| 4 | 19 | 36 | 1364 | — 18,8183 | 0,6 | 0,4 | 0,5 | | 342,5230 |
| | □ auf dem ersten Abweisstein an der Strassenbiegung oberhalb Dombühl, bei Kilometer 3 + 797ᵐ | | | | | | | | |
| 5 | 14 | 33 | 930 | + 7,8125 | 0,5 | 0,2 | 0,5 | | 350,3355 |

## Dombühl-Nördlingen.

| Nr | A | J | Z | D | ± H | w | $w^2$ | w′ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | □ auf der Trittstufe vor dem Eingang zum Wartsaal III. Classe zu Station Dombühl; 0,70ᵐ über Pl. | | | | | | | | |
| 6 | 31 | 31 | 1914 | + 37,9010 | 0,9 | 0,7 | 0,6 | | 388,2365 |
| | ⊙ am Betriebsgebäude der Station Dombühl, Perronseite, westliche Ecke | | | | | | | | |
| 7 | 1 | | | — 1,8371 | | | | | 386,3994 |
| | Gedeckter Bahndurchlass bei Kilometer 121 + 230ᵐ (Zählung ab Augsburg), □ auf der Stirndeckplatte am Einlauf, nördliche Ecke; 0,53ᵐ unter Pl. | | | | | | | | |
| 1 | 24 | 71 | 3005 | + 12,5426 | 0,9 | 0,7 | 0,5 | | 400,7791 |
| | Blechträgerbrücke bei Kilometer 119 + 890ᵐ, □ auf der nördlichen Eckdeckplatte des rechtseitigen Widerlagers; 0,11ᵐ über Pl. | | | | | | | | |
| 2 | 9 | 74 | 1330 | + 5,4940 | 0,9 | 0,8 | 0,8 | | 406,2731 |
| | Blechbalkenbrücke bei Kilometer 118 + 260ᵐ, rechtseitiges Widerlager, □ auf der nordwestlichen Eckdeckplatte; Pl. | | | | | | | | |
| 3 | 12 | 68 | 1630 | + 2,3592 | 0,6 | 0,3 | 0,5 | | 408,6323 |

## Dombühl-Nördlingen.

| Nr | A | J | Z | D | ±H | w | w² | w′ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | □ auf der Trittstufe rechts unterhalb der Höhenmarke zu Dorfgütingen; 0,65ᵐ über Pl. | | | | | | | | |
| | 4 | 3 | 49 | 293 | — 0,5766 | 0,4 | 0,2 | 0,7 | 408,0557 |
| | ⊙ am Haltstellgebäude zu Dorfgütingen, Perronseite, zwischen den Eingangsthüren zum Expeditionslokal und zum Wartsaal | | | | | | | | |
| | 5 | 1 | | | — 1,7837 | | | | 406,2720 |
| | Gedeckter Bahndurchlass bei Kilometer 116 + 745ᵐ, □ auf der Stirndeckplatte am Einlauf, südliche Ecke; 0,82ᵐ unter Pl. | | | | | | | | |
| | 1 | 11 | 56 | 1226 | + 2,3321 | 0,6 | 0,3 | 0,5 | 410,3878 |
| | □ auf der Trittstufe vor dem Eingang zum Expeditionslokal zu Station Feuchtwangen; 0,93ᵐ über Pl. | | | | | | | | |
| | 2 | 28 | 64 | 3592 | + 2,5507 | 0,8 | 0,7 | 0,4 | 412,9385 |
| | ⊙ am Betriebsgebäude der Station Feuchtwangen, Perronseite, links neben der Eingangsthür zum Expeditionslokal | | | | | | | | |
| | 3 | 1 | | | — 1,7692 | | | | 411,1693 |
| | Blechbalkenbrücke bei Kilometer 110 + 805ᵐ, südwestliches Widerlager, □ auf einer Abdeckplatte der südöstlichen Flügelmauer; Pl. | | | | | | | | |
| | 1 | 17 | 69 | 2334 | — 19,5199 | 0,7 | 0,5 | 0,4 | 393,4186 |
| | Wegbrücke bei Kilometer 109 + 520ᵐ, nordwestlicher Pfeiler, □ auf der südwestlichen Sockelecke in der Pfeileröffnung; 0,34ᵐ über Pl. | | | | | | | | |
| | 2 | 10 | 63 | 1269 | — 17,5591 | 0,5 | 0,2 | 0,4 | 375,8595 |
| | □ auf der Trittstufe vor dem Eingang zum Gepäcklokal zu Schopfloch, links unterhalb der Höhenmarke; 0,56ᵐ über Pl. | | | | | | | | |
| | 3 | 22 | 60 | 2653 | + 28,0909 | 0,6 | 0,3 | 0,3 | 403,9504 |
| | ⊙ am Betriebsgebäude zu Schopfloch, Perronseite, rechts neben der Wartsaalthür | | | | | | | | |
| | 4 | 1 | | | — 1,8742 | | | | 402,0762 |

## Dombühl-Nördlingen.

| Nr | A | J | Z | D | ±H | w | w² | w′ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Gedeckter Bahndurchlass bei Kilometer 104 + $320^{m}$, □ auf der südlichen Eckdeckplatte der Stirn am Einlauf; $0,10^{m}$ unter Pl. | | | | | | | | |
| | 1 | 17 | 72 | 2437 | + 11,8242 | 0,6 | 0,3 | 0,4 | 415,7746 |
| | Gedeckter Bahndurchlass bei Kilometer 102 + $25^{m}$, □ auf der Stirndeckplatte am Einlauf, südliche Ecke; $0,09^{m}$ unter Pl. | | | | | | | | |
| | 2 | 15 | 69 | 2083 | + 4,3065 | 0,7 | 0,5 | 0,5 | 420,0811 |
| | Gedeckter Bahndurchlass im Bahnhof Dinkelsbühl bei Kilometer 100 + $645^{m}$, □ auf der Stirndeckplatte am Einlauf, südöstliche Ecke; $0,42^{m}$ unter Pl. | | | | | | | | |
| | 3 | 12 | 70 | 1679 | — 0,2807 | 0,6 | 0,4 | 0,5 | 419,8004 |
| | ⊙ am Betriebsgebäude der Station Dinkelsbühl, Perronseite, südliche Ecke; $2,80^{m}$ über Pl. | | | | | | | | |
| | 4 | 2 | 52 | 207 | — 3,0978 | 0,3 | 0,1 | 0,7 | 416,7026 |
| | Gewölbter Bahndurchlass bei Kilometer 97 + $15^{m}$, linkseitiges Widerlager, □ auf der Flügelabdeckplatte der Stirn am Einlauf; $0,97^{m}$ unter Pl. | | | | | | | | |
| | 1 | 21 | 65 | 2714 | + 7,0143 | 0,7 | 0,5 | 0,4 | 423,7169 |
| | Blechbalkenbrücke bei Kilometer 94 + $95^{m}$, nordwestliches Widerlager, □ auf einem Deckstein des südwestlichen Stirnflügels; Pl. | | | | | | | | |
| | 2 | 30 | 60 | 3611 | + 1,5875 | 0,9 | 0,9 | 0,5 | 425,3044 |
| | ═ auf einem Randsteine des ersten Perrons in der Station Wilburgstetten, gegenüber der Höhenmarke; $0,30^{m}$ über Pl. | | | | | | | | |
| | 3 | 6 | 82 | 975 | — 7,9236 | 0,4 | 0,1 | 0,4 | 417,3808 |
| | ⊙ am Betriebsgebäude der Station Wilburgstetten, Perronseite, links neben der Eingangsthür zum Wartsaal III. Klasse; $2,26^{m}$ über Pl. | | | | | | | | |
| | 4 | 1 | | | — 2,2639 | | | | 415,1169 |
| | □ auf einem Bahngrenzstein nordöstlich der Bahn bei Kilometer 91 + $710^{m}$; $0,91^{m}$ unter Pl. | | | | | | | | |
| | 1 | 10 | 70 | 1402 | — 5,9519 | 0,7 | 0,4 | 0,5 | 411,4289 |

## Dombühl-Nördlingen.

| Nr | A | J | Z | D | ±H | w | w² | w' | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| = auf einem Bahngrenzstein nordwestlich der Bahn bei Kilometer 90 + 805$^m$; 0,14$^m$ unter Pl. | | | | | | | | | |
| | 2 | 6 | 75 | 903 | − 7,3183 | 0,3 | 0,1 | 0,3 | 404,1106 |
| Blechträgerbrücke bei Kilometer 88 + 25$^m$, östliches Widerlager, □ auf einer Deckplatte des südlichen Stirnflügels; Pl. | | | | | | | | | |
| | 3 | 19 | 73 | 2770 | − 15,1555 | 0,7 | 0,5 | 0,4 | 388,9551 |
| □ auf der Trittstufe links vor dem Eingang zum Wartsaal in der Station Fremdingen; 0,70$^m$ über Pl. | | | | | | | | | |
| | 4 | 24 | 69 | 3309 | + 27,6987 | 0,8 | 0,6 | 0,5 | 416,6538 |
| ⊙ am Betriebsgebäude der Station Fremdingen, Perronseite, links neben der Wartsaalthüre | | | | | | | | | |
| | 5 | 1 | | | − 1,7479 | | | | 414,9059 |
| Gedeckter Bahndurchlass bei Kilometer 81 + 550$^m$, □ auf der Stirndeckplatte am Einlauf; 0,71$^m$ unter Pl. | | | | | | | | | |
| | 1 | 24 | 66 | 3172 | + 9,7502 | 0,7 | 0,5 | 0,4 | 426,4040 |
| Gedeckter Strassendurchlass für den südöstlichen Bahngraben bei Kilometer 79 + 170$^m$, □ auf einer Deckplatte der südwestlichen Stirn; 0,17$^m$ unter Pl. | | | | | | | | | |
| | 2 | 17 | 70 | 2373 | − 6,0717 | 0,9 | 0,8 | 0,6 | 420,3323 |
| ⊙ am Betriebsgebäude zu Station Marktoffingen, Perronseite, zwischen den beiden Wartsaalthüren; 2,54$^m$ über Pl. | | | | | | | | | |
| | 3 | 1 | 65 | 129 | − 2,5272 | 0,2 | 0,0 | 0,6 | 417,8051 |
| Blechträgerbrücke für Strasse und Bach bei Kilometer 75 + 680$^m$, rechtseitiges Widerlager, □ auf dem nordwestlichen Eckbrüstungsstein; 0,20$^m$ über Pl. | | | | | | | | | |
| | 1 | 24 | 70 | 3344 | + 10,2147 | 0,6 | 0,4 | 0,3 | 428,0198 |
| ⊙ am Betriebsgebäude der Station Wallerstein, Perronseite, zwischen den beiden Wartsaalthüren | | | | | | | | | |
| | 2 | 9 | 77 | 1392 | − 3,1045 | 0,5 | 0,3 | 0,4 | 424,9153 |

## Dombühl-Nördlingen.

| Nr | A | J | Z | D | ± H | w | w² | w′ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Fachwerksbrücke bei Kilometer 71 + 680ᵐ, südliches Widerlager, ☐ auf der äussersten Deckplatte des westlichen Flügels; 0,04ᵐ über Pl. | | | | | | | | |
| | 1 | 18 | 75 | 2604 | + 10,8055 | 0,7 | 0,4 | 0,4 | 435,7208 |
| 429. | ☐ rechts oberhalb der Bayerischen Höhenmarke in Nördlingen, in den Sockel der Ecklisene gehauen; 0,70ᵐ über Pl. | | | | | | | | |
| | 2 | 11 | 70 | 1544 | — 5,1762 | 0,6 | 0,3 | 0,5 | 430,5446 |
| 430. | Bayerische ⊙ am Betriebshauptgebäude der Station Nördlingen, Perronseite, im Sockel neben der nordwestlichen Ecklisene | | | | | | | | |
| | 3 | 1 | | | + 0,2404 | | | | 430,7850 |

## B. Wiederholungen, Erweiterungen und Anschlüsse des Präcisions-Nivellements im Jahre 1889

in mehreren Provinzen des Königreichs und an dessen nördlichen Grenzen.

### I. Die Arbeiten im Frühjahr 1889

welche ebenfalls der Assistent der K. Bayerischen Erdmessungskommission, Ingenieur Karl Oertel im Auftrage dieser Stelle nach meiner Anordnung und unter meiner Aufsicht und teilweisen speziellen Mitwirkung vornahm, umfassten folgende Nivellierungen:

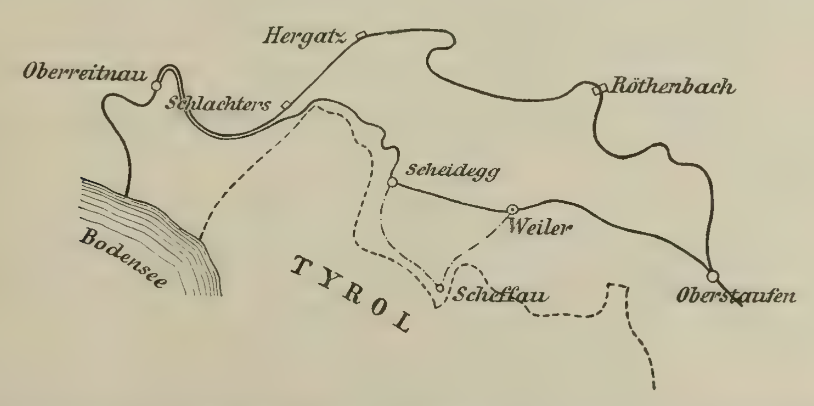
1. das Präcisionsnivellement Oberstaufen-Weiler-Scheidegg-Oberreitnau mit dem Doppelnivellement Weiler-Scheffau-Scheidegg;
2. das Präcisionsnivellement Immenstadt-Alpsee;
3. die Wiederholungsnivellements Prien-Aschau-Kampenwand, dann Rosenheim-Höhensteig und Aibling-Irschenberg;
4. das Präcisionsnivellement vom Bahnhof Schliersee zum See daselbst.

Ihre Zahlenergebnisse sind im Fixpunktverzeichnis Nr II zusammengestellt und deren Ermittlung ist nachstehend noch weiter erläutert.

Zu Nr 1. Die Herstellung eines Präcisionsnivellements von Oberstaufen über Weiler und Scheidegg bis zum Anschluss in Oberreitnau wurde im Interesse der von einer internationalen Kommission neu herzustellenden hydrographischen Bodenseekarte ausgeführt. Nachdem ein erster, schon Anfangs April unternommener Versuch zur Ausführung desselben durch starken Schneefall vereitelt worden war, erfolgte diese bei ziemlich günstiger Witterung in der Zeit vom 22. April bis 4. Mai. In diese Zeit fielen im ganzen 8 Arbeitstage, wovon 6 zur Ausführung des Präcisions- und 2 zu der des Doppelnivellements nötig waren. Die Länge der nivellierten Strecken setzt sich zusammen aus 37,625 Kilometer Präcisions- und 12,855 Kilometer Doppelnivellement, während die Anzahl der Instrumentenstände betrug:

a) für das Präcisionsnivellement 608, woraus eine mittlere Zielweite von 36 m und eine mittlere tägliche Leistung von 6,3 Kilometer oder 101 Instrumentenständen folgt;
b) für das Doppelnivellement 195, der eine mittlere Zielweite von 33 m und eine mittlere tägliche Leistung von 6,4 Kilometer oder 98 Instrumentenständen entspricht.

Die Anzahl der neu angebrachten Fixpunkte beträgt im ganzen 33, worunter sich 2 Höhenmarken mit Bolzen befinden. Wegen Mangels anderer Gegenstände mussten die Fixpunkte häufig auf steinernen Treppenstufen vor Häusern u. dgl. angebracht werden, was ihrer Dauer nur wenig Abbruch thun dürfte, dagegen ihr Auffinden sehr erleichtert.




Vorstehende Skizze zeigt die Situation der beiden obigen Nivellements. Die starke Linie gibt den der Eisenbahnstrasse folgenden Ver-

lauf des durchgehenden Präcisionsnivellements, die schwächer ausgezogene Linie das auf Strassen hergestellte neue Präcisionsnivellement zwischen Oberstaufen und Oberreitnau, die strichpunktierte Linie das Zweignivellement zwischen Scheidegg und Weiler nach Scheffau, die gestrichelte Linie endlich die Landesgrenze.

## Die Konstanten der Instrumente.

Die Konstante des distanzmessenden Fernrohrs im Instrument Nr I wurde zweimal bei guter Witterung bestimmt. Am 2. April 1889, Nachmittag, in Oberstaufen, ergab sich bei $0^0$ Temperatur

$$\cot \varphi = 140{,}56 \pm 0{,}10$$

und am 3. Mai 1889, früh, in Immenstadt, bei $+ 18^0$ C Temperatur:

$$\cot \varphi = 139{,}37 \pm 0{,}11$$

Hiernach waren Zielweiten und Entfernungen zu rechnen aus der Formel

$$E = 139{,}97\, a + 0{,}78 \text{ m}$$

## Die beiden Reversionslatten Nr VIII und IX

wurden nach der Rückkunft mit den bekannten Breithaupt'schen Meterstäben unter dem Mikroskop abgeglichen und ihre Längen wie folgt gefunden:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Latte Nr VIII: | Direkte | Teilung | $1\,M_L = 1{,}0002159 \text{ m} \pm 0{,}0091 \text{ mm}$ |
| | Verschobene | „ | $1\,M_L = 1{,}0001750 \text{ m} \pm 0{,}0072$ „ |
| Latte Nr. IX: | Direkte | „ | $1\,M_L = 1{,}0001550 \text{ m} \pm 0{,}0150$ „ |
| | Verschobene | „ | $1\,M_L = 1{,}0001649 \text{ m} \pm 0{,}0094$ „ |

Es ist daher im Mittel für alle 4 Lattenteilungen zu setzen:

$$1\,M_L = 1{,}0001777 \text{ m}$$

und nach Massgabe dieser Zahl wurden die gemessenen Höhenunterschiede vergrössert.

Zu Nr 2. Die Höhe des Alpsee's bei Immenstadt wurde gelegentlich der Heimreise nach Abschluss der obigen Arbeiten vom nächstgelegenen Fixpunkt auf der Bahnlinie aus im Interesse der hydrographischen Erforschung des Königreiches eingemessen.

Zu Nr 3. Die Erfahrung, dass noch jedem Beobachter Mangels genügender Kontrollmittel bei Herstellung von Präcisionsnivellements auf Strassen, wo Steigungen und Gefälle starkem Wechsel unterworfen sind,

Ablesefehler von ganzen Metern passierten, legte in Verbindung mit der Erscheinung, dass die aus dem gemessenen Höhenunterschied zwischen Höhensteig und Kampenwand gerechnete wahre Zenitdistanz von den in den Jahren 1882 und 1885 daselbst gemessenen Zenitdistanzen um Beträge abwich, welche durch Einwirkung der Refraktion allein nicht genügend erklärt werden konnten, den Verdacht nahe, dass auch hier ein solcher Ablesefehler begangen worden sein könnte. Da die nivellitische Messung dieses Höhenunterschiedes nur einmal (im Herbst 1881, von Höhensteig bis Rosenheim und von Prien bis Hohenaschau durch den Assistenten K. Oertel, von Hohenaschau bis zur Kampenhöhe durch den Privatdozenten Dr. Decher) erfolgte, konnte ein solcher Fehler sehr wohl vorliegen. Es wurden deshalb im Juni 1889 von Prien aus die früheren Nivellements und zwar in der Weise revidiert, dass vom genannten Punkt aus ein Flugnivellement zur Ausführung gelangte, durch welches grobe Fehler sofort aufgedeckt werden mussten. Bis zum Fixpunkt Nr 1629 (siehe VI. Mitteilung) war Alles in Ordnung; von hier ab, wo der Anstieg zur Kampenwand, der sogenannte Reitweg, beginnt, stellten sich jedoch alsbald erhebliche Abweichungen ein. Zunächst zeigte es sich, dass der Höhenunterschied zwischen den Fixpunkten Nr 1629 und 1634 im Jahre 1881 um etwa 2,7 m zu klein und der nächstfolgende um ebensoviel zu gross angegeben worden war. Nun wurden bei Ausführung des Nivellements einige der in Stein gehauenen Fixpunkte erst nachträglich hergestellt und von Fixpunktsnägeln in ihrer unmittelbaren Nähe, deren Höhenlage beim durchlaufenden Nivellement erhalten wurde, aus eingemessen. In Folge unklarer Aufschreibung dieser Anschlussmessung wurde der Höhenunterschied zwischen Fixpunkt Nr. 1634 und dem ihm benachbarten Fixpunktsnagel mit verkehrtem Vorzeichen in Rechnung gebracht, wodurch die Kote des Fixpunktes natürlich entstellt wurde. Die Weiterführung des Flugnivellements ergab denn auch die Richtigkeit der Kote zu Fixpunkt Nr 1635 und eine Revision und Richtigstellung der Rechnung für Nr 1634 die im nachfolgenden Fixpunktsverzeichnis Nr II mitgeteilte neue Kote, mit welcher das Ergebnis des Flugnivellements ebenfalls genügend übereinstimmt.

Die nächste Abteilung zeigte sich jedoch schon wieder fehlerhaft und zwar um den Betrag von rund 1,5 m, um welchen das Flugnivellement

den Höhenunterschied zwischen Nr 1635 und 1636 grösser ergab. Nachdem eine Wiederholung des letzteren hieran nichts änderte, auch der Höhenunterschied der nächsten Abteilung in Ordnung war, wurde ein genaues Nivellement dieser Strecke ausgeführt. Es ergab sich aus demselben der Höhenunterschied zwischen den Fixpunkten Nr 1635 u. 1636 zu

— 149,9766 m

also um 1,4344 m grösser, als im Jahre 1881, wo er — 148,5422 m betrug. Die Weiterführung des Flugnivellements ergab die Richtigkeit aller Koten bis auf die des letzten Zwischenpunktes, Nr 1642. Hier fanden sich am nämlichen Felsblock in einem Abstand von rund 2 dm zwei regelmässig behauene und durch ein □ bezeichnete Flächen vor und es bezog sich der im Jahre 1881 gemessene Höhenunterschied zwischen den Fixpunkten Nr 1641 und 1642 auf den unteren, der zwischen Nr 1642 und 1643 (Pfeileroberfläche) im Jahre 1882 (durch Dr. Schmidt) gemessene Höhenunterschied aber auf den oberen Punkt (1642[a]). Es ändert sich aus diesem Grund die Kote der Pfeileroberfläche nochmals und zwar um den Abstand beider Punkte Nr 1642, welcher durch genaues Nivellement gefunden wurde zu

— 0,2020 m,

sodass die Gesamtänderung der Kote der Pfeileroberfläche (Nr 1643)

$$\Delta H = -1{,}6364 \text{ m}$$

beträgt, die Kote zu Nr 1643 selbst wird nunmehr also

— 704,5880 m

Die Pfeilerhöhen in Höhensteig und Irschenberg erwiesen sich als richtig.

Zu Nr 4. Die Einmessung des Schlierseespiegels erfolgte von der Höhenmarke ⊙ Nr 2570 des Nivellements zweiter Ordnung aus. Die Kote dieser Höhenmarke wurde der dritten Mitteilung über die genannten Nivellements, S. 87, entnommen.

# II.

## Fixpunkt-Verzeichnis

für die im Frühjahr 1889 ausgeführten Präcisions-Nivellements-Strecken:

1. **Oberstaufen-Weiler-Scheidegg-Oberreitnau,**
2. **Scheidegg-Scheffau-Weiler,**
3. **Immenstadt-Alpsee,**
4. **Bahnhof Schliersee-Markt Schliersee,**
5. **Hohenaschau-Kampenwand.**

## I. Oberstaufen-Weiler-Scheidegg-Oberreitnau.

| Nr | A | J | Z | D | ± H (verbessert) | w | w² | w′ | Verb. Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 536. | Höhenmarke ⊙ am Tunnel nordöstlich von Oberstaufen (vgl. Mittlg. I, S. 102) | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | 73,1800 |
| | □ auf einer Dohlenabdeckplatte im Tunnel, 8 m von der Höhenmarke entfernt | | | | | | | | |
| | 1 | 1 | | 8 | + 1,5824 | | | | 74,7624 |
| | □ auf der untersten Granitstufe an der Stockwerkstreppe des Bahnwärterhauses Nr 82, linksseitige Ecke; 0,19 über Bahnplanie | | | | | | | | |
| | 2 | 19 | 71 | 2692 | + 9,3058 | | | | 84,0682 |
| | Gedeckter Strassendurchlass Lit. c 11 bei Genhofen, □ auf der westlichen Deckplatte am Einlauf | | | | | | | | |
| | 3 | 22 | 33 | 1455 | — 30,1606 | | | | 53,9076 |
| | □ auf der backsteinuntermauerten, steinernen Trittstufe vor dem Haus Nr 7 im Dorfe Hanschenkel, links der Thür | | | | | | | | |
| | 4 | 32 | 16 | 995 | — 82,4576 | | | | — 28,5500 |
| | Gedeckter Strassendurchlass Lit. a 10 bei Kilometer 9 + 335 m, □ auf der mittleren Deckplatte am Auslauf | | | | | | | | |
| | 5 | 17 | 18 | 608 | + 33,3783 | | | | 4,8283 |
| | = (ohne Dauer) auf einer zur Ueberdeckung des Strassengrabens dienenden Steinplatte, bei Kilometer 8 + 595 m, vor der kleinen Kapelle | | | | | | | | |
| | 6 | 21 | 18 | 743 | + 50,6032 | | | | 55,4315 |
| | Gewölbte Strassenbrücke Lit. a 9 im Dorfe Burkhartshofen, □ auf der östlichen Eckdeckplatte der Stirn am Einlauf | | | | | | | | |
| | 7 | 8 | 21 | 334 | + 19,4714 | | | | 74,9029 |
| | Gewölbte Strassenbrücke Lit. b 8 bei Kilometer 7 + 575 m (gegenüber der Mühle), □ auf der nordwestlichen Eckdeckplatte der Stirn am Auslauf | | | | | | | | |
| | 8 | 10 | 34 | 678 | + 19,1121 | | | | 94,0150 |

## Oberstaufen-Weiler-Scheidegg-Oberreitnau.

| Nr | A | J | Z | D | ± H (verbessert) | w | w² | w′ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| □ in der Bodenplatte vor dem Eingang zur St. Josefskapelle im Markte Simmerberg, rechtseitige, hintere Ecke | | | | | | | | | |
| 9 | 33 | 26 | 1738 | + 16,3127 | | | | | 110,3277 |
| Gewölbter Strassendurchlass Lit. d 5, □ auf der Stirndeckplatte am Einlauf | | | | | | | | | |
| 10 | 38 | 17 | 1286 | + 87,7495 | | | | | 198,0772 |
| □ auf der untersten Stufe der linken Seitentreppe vor der Kirche im Markte Weiler | | | | | | | | | |
| 11 | 20 | 37 | 1467 | + 34,0069 | | | | | 232,0841 |
| ⊙ an der Pfarrkirche im Markte Weiler, Südfront, südwestliche Ecklisene | | | | | | | | | |
| 12 | 1 | | | — 2,1514 | | | | | 229,9327 |
| Gewölbte Strassenbrücke über die Rottach bei Bremenried, □ auf der östlichen Eckdeckplatte der südlichen Stirn | | | | | | | | | |
| 1 | 11 | 43 | 948 | + 25,8250 | | | | | 257,9091 |
| □ auf der untersten Trittstufe der Freitreppe vor dem Hause Nr 234/15 im Dorfe Bremenried, an der Strassenabzweigung nach Scheffau | | | | | | | | | |
| 1ª | 6 | 26 | 325 | — 11,0417 | | | | | 246,8674 |
| □ auf der dritten Stufe der Freitreppe vor dem Hause Nr 143 im Dorfe Böserscheidegg; 0,4 m über Bodenhöhe | | | | | | | | | |
| 2 | 59 | 21 | 2452 | — 155,4856 | | | | | 102,4235 |
| □ auf der untersten Treppenstufe vor dem Eingang des Hauses Nr 164¼ (Gem. Scheidegg), rechts der Strasse | | | | | | | | | |
| 3 | 19 | 24 | 916 | — 48,7776 | | | | | 53,6459 |
| □ auf einem festgewachsenen Steinblock rechts der Strasse, etwa 60 m unterhalb der Kapelle | | | | | | | | | |
| 4 | 12 | 33 | 801 | — 13,9881 | | | | | 39,6578 |

## Oberstaufen-Weiler-Scheidegg-Oberreitnau.

| Nr | A | J | Z | D | ± H (verbessert) | w | w² | w′ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ☐ auf der untersten Trittstufe der Freitreppe vor dem Hause Nr 18 im Dorfe Scheidegg | | | | | | | | |
| | 5 | 11 | 24 | 528 | + 18,8878 | | | | 48,5456 |
| | ⊙ an der Pfarrkirche zu Scheidegg, östliche Ecke der südlichen Langseite, rechts neben dem Fenster der Sakristei | | | | | | | | |
| | 6 | 2 | 40 | 160 | — 1,6365 | | | | 56,9091 |
| | Eiserne Strassenbrücke Lit. c 8 bei Kilometer 7 + 800 m (Zählung ab Gmünd), ☐ auf dem westlichen Flügeldeckstein des rechtseitigen Widerlagers | | | | | | | | |
| | 1 | 18 | 32 | 1148 | + 44,1452 | | | | 102,6908 |
| | Eiserne Strassenbrücke Lit. e 7 bei Kilometer 6 + 489 m, ☐ auf der nordwestlichen Eckdeckplatte der südwestlichen Stirn | | | | | | | | |
| | 2 | 20 | 33 | 1319 | + 9,4287 | | | | 112,1195 |
| | Gedeckter Strassendurchlass Lit. b 3 oberhalb Emsgritt bei Kilom. 2 + 385 m, ☐ auf der Deckplatte am Einlauf | | | | | | | | |
| | 3 | 77 | 27 | 4081 | + 167,7068 | | | | 279,8263 |
| | Blechträgerbrücke über die Laiblach Lit. a 155 bei Kilometer 154 + 388 m, rechtseitiges Widerlager, ☐ auf dem südlichen Abdeckquader | | | | | | | | |
| | 4 | 52 | 26 | 2673 | + 124,3363 | | | | 404,1626 |
| | Gedeckter Strassendurchlass Lit. a 157 bei Kilometer 156 + 165 m, ☐ auf der Deckplatte am Einlauf | | | | | | | | |
| | 5 | 21 | 42 | 1777 | — 42,0622 | | | | 362,1004 |
| 552. | Strassen- und Bahndurchlass im Bahnhof Schlachters, nordöstliche Stirn des Wegdurchlasses | | | | | | | | |
| | 6 | 14 | 54 | 1502 | — 13,1796 | | | | 348,9208 |
| 553. | Gewölbte Bahnbrücke mit einer Oeffnung bei Kilometer 211,6 (neu gerichtet) | | | | | | | | |
| | 7 | 49 | 49 | 4790 | + 40,6325 | | | | 389,5533 |

## Oberstaufen-Weiler-Scheidegg-Oberreitnau.

| Nr | A | J | Z | D | ± H (verbessert) | w | $w^2$ | w' | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 554. | Fixpunkt unter der Höhenmarke zu Oberreitnau, in der schiefen Treppenwange | | | | | | | | |
| | 8 | 11 | 46 | 1008 | + 5,4181 | | | | 394,9714 |
| 555. | Höhenmarke ⊙ am Stationsgebäude zu Oberreitnau, nördliche Schmalseite, nahe der östlichen Ecke | | | | | | | | |
| | 9 | | | | — 1,7069 | | | | 393,2645 |

## 2. Doppelnivellement Weiler-Scheffau-Scheidegg.

| Nr | A | J | Z | D | ± H (verbessert) | w | $w^2$ | w' | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | □ auf der untersten Trittstufe der Freitreppe vor dem Hause Nr 234/15 in Bremenried (vgl. S. 388) | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | 246,8674 |
| | Gewölbte Strassenbrücke oberhalb Bremenried, □ auf einer Deckplatte der südwestlichen Stirn | | | | | | | | |
| | 1 | 8 | 57 | 1309 | + 4,6402 | | | | 251,5076 |
| | Oberste Steinplatte vor dem Haus Nr 197/12, links der Strasse | | | | | | | | |
| | (2) | 11 | 66 | 1444 | — 8,0213 | | | | 243,4863 |
| | □ auf der Trittstufe vor dem Haus Nr 198½/13, links der Strasse | | | | | | | | |
| | 2 | 8 | 43 | 690 | — 8,1737 | | | | 243,3339 |
| | □ auf der zweiten Stufe (v. u.) des linkseitigen Freitreppenarmes vor dem Haus Nr 178 im Dorfe Siebers | | | | | | | | |
| | 3 | 14 | | 1481 | — 2,5818 | | | | 240,7521 |
| | □ auf der obersten Steinplatte der Freitreppe vor dem Hause Nr 25 im Dorfe Neuhaus | | | | | | | | |
| | 4 | 26 | | 2576 | + 21,0523 | | | | 261,8044 |

## Doppelnivellement Weiler-Scheffau-Scheidegg.

| Nr | A | J | Z | D | ±H (verbessert) | w | w² | w′ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ☐ auf der untersten Stufe der Freitreppe vor dem Haupteingang zur Kirche im Dorfe Scheffau | | | | | | | | |
| | 5 | 27 | | 797 | —73,2315 | | | | 188,5729 |
| | ☐ auf der untersten Stufe der Freitreppe vor dem Hause Nr 49 im Weiler Lindenau | | | | | | | | |
| | 1 | (31) | | 1520 | —31,9687 | | | | 156,6042 |
| | ☐ auf der untersten Treppenstufe vor dem Hause Nr 43 im Weiler Hagspiel | | | | | | | | |
| | 2 | 44 | | 2366 | —54,5642 | | | | 134,0087 |
| | ☐ auf der untersten Stufe der Freitreppe vor dem Hause Nr 100 im Dorfe Häuslings (Gem. (Scheidegg) | | | | | | | | |
| | 3 | 10 | | 860 | + 6,4505 | | | | 140,4592 |
| | ☐ auf der obersten Steinplatte der Freitreppe vor dem Hause Nr 109 im Dorfe Forst (Gem. Scheidegg) | | | | | | | | |
| | 4 | 30 | | 1115 | —78,3536 | | | | 62,1056 |
| | ☐ auf der untersten Trittstufe vor dem Hause Nr 18 in Scheidegg | | | | | | | | |
| | 5 | 28 | | 1661 | — 3,5600 | | | | 58,5456 |

## 3. Immenstadt-Alpsee.

| Nr | A | J | Z | D | ±H (verbessert) | w | w² | w′ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 528. | Gewölbter Bahndurchlass ca. 800$^{m}$ westlich vom Bahnhofgebäude in Immenstadt | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | 132,8070 |
| | Wasserspiegel des Alpsee's bei Immenstadt am 3. Mai Vormittags 11$^{h}$, gemessen bei dem Dorfe Bühl | | | | | | | | |
| | 1 | 10 | 86 | 1718 | + 3,5877 | | | | 136,3947 |

## 4. Schliersee (Bahnhof) - Schliersee (Seespiegel).

| Nr | A | J | Z | D | ±H | w | w² | w′ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ⊙ am Betriebsgebäude der Station Schliersee, Perronseite, Ecke des westlichen Pavillons (diese Kote ist der III. Mitteilung über die Nivellements II. Ordnung der Generaldirection der K. Bayer. Verkehrsanstalten [S. 87] entnommen) | | | | | | | | 73,146 |
| | Wasserspiegel des Schliersee's am 16. Juni 1889, Vorm. 10 Uhr, westlich vom Dorfe Schliersee gemessen | | | | | | | | |
| | 1 | 4 | | | + 10,386 | | | | 83,532 |

## 5. Verbesserungen zu Mitteilung VI über das Bayerische Präcisionsnivellement, S. 73 u. 74.

| Nr | A | J | Z | D | ±H | w | w² | w′ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1634. | ☐ in einem Felsvorsprung am östlichen Ende der Brücke des Reitweges zur Kampenhöhe, bei Ruhebank Nr 6 | | | | | | | | |
| | 1 | 74 | | | — 171,0421 | | | | 70,9327 |
| 1635. | ☐ in einem Felsvorsprung der „Burgerschlagwand“, am östlichen Ende der Ruhebank Nr 12 des Kampenweges | | | | | | | | |
| | 2 | 86 | | | — 180,8185 | | | | — 109,8858 |
| 1636. | ☐ auf einem Felsstück unterhalb der Kapelle bei Ruhebank Nr 19 des Kampenweges, links seitwärts vom Wege | | | | | | | | |
| | 3 | 66 | | | — 149,9766 | | | | — 259,8624 |
| 1637. | = auf einem Felsblock links des Reitweges bei Ruhebank Nr 20 | | | | | | | | |
| | 4 | 18 | | | — 49,4306 | | | | — 309,2930 |
| 1638. | = auf einem Felsvorsprung am rechtseitigen Rande des Steinlinggrabens, bei Ruhebank Nr 21 | | | | | | | | |
| | 5 | 28 | | | — 73,5848 | | | | — 382,8778 |

## Verbesserungen zu Mitteilung VI über das Bayerische Präcisionsnivellement, S. 73 u. 74.

| Nr | A | J | Z | D | ± H | w | w² | w′ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1639. | = auf einem vorspringenden Felsstück links am Reitwege, gegenüber der „Schlechtenberger Alpe“ | | | | | | | | |
| | 6 | 13 | | | — 31,7362 | | | | —414,6140 |
| 1640. | □ auf einem links vom Reitweg stehenden Felsblock unterhalb der Bank Nr 24; 2,02ᵐ unter dem Sitzbrett der Letzteren | | | | | | | | |
| | 7 | 22 | | | — 53,9636 | | | | —468,5776 |
| 1641. | □ auf einem Felsvorsprung bei Bank Nr 27, links am Wege | | | | | | | | |
| | 8 | 47 | | | —119,1750 | | | | —587,7526 |
| 1642. | □ auf einem zu Tage tretenden Felsen links seitwärts vom Weg, unmittelbar unter der Bank Nr 30 auf der Kampenhöhe | | | | | | | | |
| | 9 | 45 | | | —111,7974 | | | | —699,5500 |
| 1642ᵃ. | □ auf demselben Felsstück, unmittelbar über dem Vorigen | | | | | | | | |
| | 10 | 1 | | | —0,2020 | | | | —699,7520 |
| 1643. | Oberfläche des zu Refraktionsbeobachtungen errichteten, massiven Pfeilers auf der Kampenhöhe | | | | | | | | |
| | 11 | 3 | | | —4,8360 | | | | —704,5880 |

### Genauigkeit der Anschlüsse.

Der Anschlussfehler an der Höhenmarke ⊙ 555 zu Oberreitnau betrug, wenn man von der Kote der Höhenmarke ⊙ 536 in Oberstaufen ausgeht, $\Delta_1 = + 0{,}0274$ m. Hält man an den Koten dieser beiden Höhenmarken, wie sie aus dem durchgehenden Präcisionsnivellement erhalten worden sind, fest, so war dieser Anschlussfehler entsprechend dem Quotienten $\Delta_1 \cdot l : L$ (wo $l$ die Entfernung des betreffenden Fixpunkts vom Ausgangspunkt ⊙ 536 ist und $L$ die Gesamtentfernung von 35,907 Kilometer bezeichnet) zu verteilen.

Setzt man für $L$ und $\Delta_1$ die erhaltenen Zahlenwerte (letzteren in mm) ein, so ist also die Verbesserung für irgend einen Fixpunkt, dessen Entfernung vom Ausgangspunkt $l$ ist

$$v_1 = -0{,}763 \cdot l \text{ Millimeter.}$$

Der mittlere Fehler pro Kilometer wird

$$\mu_1 = \pm \frac{27{,}4}{\sqrt{35{,}9}} = \pm 4{,}6 \text{ mm}$$

also etwas grösser, als sonst erlaubt ist, was aber hier nicht weiter in Betracht kommt.

Die kleine Schleife Weiler-Scheffau-Scheidegg-Weiler schloss mit $\Delta_2 = -68{,}1$ mm, die Länge des Doppelnivellements beträgt 12,86 Kilom., daher die Verbesserung der Koten desselben

$$V_2 = +5{,}298 \cdot l \text{ Millimeter.}$$

Das vorstehende Fixpunktsverzeichnis enthält bereits die gemäss den Ausdrücken für $V_1$ und $V_2$ verbesserten Koten der betreffenden Punkte.

## II. Die Arbeiten im Herbst 1889

welche von den gleichen Personen geleitet, beaufsichtigt und ausgeführt wurden, wie die des Frühjahrs, umfassten folgende Nivellierungen:

1. das Präcisionsnivellement Nürnberg-Bamberg;
2. die Grenzanschlüsse bei Lichtenfels, Hof und Kahl;
3. das Präcisionsnivellement Weigolshausen-Würzburg;
4. das Präcisionsnivellement Offingen-Donauwörth-Regensburg.

Ihre Zahlenergebnisse sind im Fixpunktverzeichnis Nr III zusammengestellt und nachstehend folgt eine Uebersicht der nivellierten Längen, der hiefür erforderlichen Instrumentenstände, der angewendeten mittleren Zielweiten und der Arbeitstage, in denen die bezeichneten Strecken vermessen wurden.

| Strecke | Länge | Instr. Stde. | Mittl. Zielweite | Arbeitstage |
|---|---|---|---|---|
| Nürnberg-Bamberg . . . . . . | 62,934 km | 509 | 62 m | 8 |
| Untersiemau-Staffelstein . . . . | 16,192 „ | 168 | 48 „ | 2 |
| Hof, neuer Bhf. — Hof, alter Bhf. | 2,704 „ | 21 | 64 „ | ½ |

| Strecke | Länge | Instr. Stde. | Mittl. Zielweite | Arbeitstage |
|---|---|---|---|---|
| Weigolshausen-Würzburg . . . . | 31,709 km | 220 | 72 m | 3 |
| Kahl-Landesgrenze . . . . . . | 1,989 „ | 13 | 76 „ | ½ |
| Offingen-Donauwörth . . . . . | 46,898 „ | 319 | 73 „ | 5½ |
| Donauwörth-Regensburg . . . . | 126,515 „ | 891 | 71 „ | 13½ |
| Zweignivellement in Ingolstadt . . | 1,525 „ | 12 | 64 „ | |
| „ Saal-Kehlheim . | 4,969 „ | 37 | 67 „ | |
| „ in Regensburg . | 1,927 „ | 14 | 65 „ | |
| Zusammen | 297,362 km | 2204 | 67 m | 33 Tage |

Da die Gesamtlänge 297,4 Kilometer und die Anzahl der Arbeitstage 33 beträgt, berechnet sich die mittlere tägliche Leistung zu 9,0 Kilometer oder auch zu 67 Instrumentenständen, während die mittlere Zielweite bei einer Gesamtsumme von 2204 Instrumentenständen sich, wie oben angegeben, zu 67 m ergibt. Die letztere Zahl erscheint vielleicht etwas gross, es muss aber hier gleich bemerkt werden, dass das zum Nivellieren so ausserordentlich günstige Wetter, welches erfreulicherweise fast während der ganzen Arbeitsdauer vorwaltete, diese Zielweiten ohne jede Einbusse an Genauigkeit erlaubte.

Die Anzahl der neu angebrachten Fixpunkte und Höhenmarken beträgt für die obengenannten Strecken zusammen 158, wovon 117 in Stein gehauene Fixpunkte, 32 Höhenmarken mit Bolzen und 9 Pegelnullpunkte sind. Auf der Donauthalbahn waren die meisten Fixpunkte und Höhenmarken schon vorhanden, da dieselbe in den Jahren 1882 und 1883 Seitens der Generaldirektion der K. Verkehrsanstalten mit einem Nivellement zweiter Ordnung versehen worden ist. Doch mussten die meisten der in Stein gehauenen Fixpunkte nachgerichtet werden, weil ihre Oberflächen nicht mehr eben und horizontal waren.

Die Veranlassung zur Herstellung der vorbenannten Präcisionsnivellements Nr 1 mit Nr 4 war eine sehr verschiedenartige und ist nachfolgend begründet.

Zu Nr 1. Die Strecke Nürnberg-Bamberg war schon im Jahre 1869 nivelliert worden. Die Polygone, in welchen diese Strecke seitdem Seite geworden ist, zeigten aber fast alle Schlussfehler von gleichem Sinn und teilweise abnormer Grösse, wodurch allmälig der Verdacht erweckt wurde, dass der im Jahre 1869 für diese Strecke ermittelte Höhenunter-

schied nicht ganz richtig sein möchte. In wieweit dieser Verdacht gerechtfertigt war, wird sich weiter unten zeigen, thatsächlich ergab das neue Nivellement den Höhenunterschied der beiden Endpunkte um nahezu 9 cm kleiner, als das alte. Es sei hier noch bemerkt, dass das neue Nivellement zwischen Nürnberg und Eltersdorf der neuen (im Jahre 1875 verlegten Süd-Nord-)Bahnlinie entlang, also über Fürth und Vach geführt wurde.

Zu Nr 2. Die Grenzanschlüsse bei Lichtenfels, Kahl und Hof wurden auf Anregung der trigonometrischen Abteilung der K. preussischen Landesaufnahme hergestellt. In den beiden ersteren Fällen hatte dieselbe unmittelbar an der Landesgrenze Granit-Grenzpfeiler mit Bolzen setzen lassen und letztere ihrerseits einnivelliert. Durch die diesseitige Einmessung der Bolzen bei Obersiemau und bei Kahl wurden die Anschlüsse an das genannte K. preussische Nivellement in diesen Hauptpunkten perfekt gemacht. Die Messung des Höhenunterschieds zwischen den Höhenmarken am alten und neuen Bahnhof in Hof geschah, um dem obengenannten Institut einen weiteren Anschluss an das Bayerische Präcisionsnivellement mit Zuhilfenahme Sächsischer Nivellementsstrecken von Gera aus über Ronneburg und Plauen zu ermöglichen.

Das Nivellement Obersiemau-Lichtenfels wurde einerseits zur mehreren Versicherung bis an die Preussische Höhenmarke im Dorfe Untersiemau geführt, andererseits bis zur Höhenmarke in Staffelstein, weil jene in Lichtenfels beim Bahnhofumbau zerstört worden war. Auf Befehl der Generaldirektion der K. Verkehrsanstalten wurde allerdings durch Bahningenieure wieder eine Höhenmarke am Bahnhof in Lichtenfels angebracht und eingemessen (Siehe VII. Mittlg., S. 11). Da jedoch diese Messung für den wichtigen Zweck des Grenzanschlusses nicht zuverlässig genug zu sein schien, so wurde, wie schon bemerkt, bis zur nächstgelegenen Höhenmarke in Staffelstein zurückgegangen.

Zu Nr 3. Die Strecke Weigolshausen-Würzburg wurde schon im Jahre 1888 einer Neunivellierung unterzogen, welche die Kote der Höhenmarke ⊙ 943 zu Würzburg um mehr, als 0,07 m kleiner ergab. als das 1871 ausgeführte erste Nivellement dieser Linie. Die Richtigkeit dieser Abweichung musste zunächst aus inneren Gründen angezweifelt werden, weil das im Jahre 1886 von Weigolshausen über Arnstein

nach Gemünden geführte Nivellement fast genau für dieselbe Kote für die dortige ⊙ 917 ergab, wie das im Jahre 1871 von Weigolshausen über Würzburg nach Gemünden geführte. Es hätte also, die Richtigkeit des ersteren Nivellements vorausgesetzt, der in Anbetracht der Kürze der Strecke bedeutende Anschlussfehler von 7,5 cm auf der Strecke Würzburg-Gemünden wieder ganz aufgehoben werden müssen, was an sich nicht sehr wahrscheinlich erschien. Der Hauptgrund aber, die Richtigkeit des 1888 ausgeführten Nivellements der in Rede stehenden Linie in Zweifel zu ziehen, war die während der Ausführung desselben, naturgemäss erst allmälig entdeckte Unzuverlässigkeit der beiden Lattenträger, die erst in Würzburg durch geeignetere ersetzt werden konnten. Wie sehr die erwähnten Zweifel berechtigt waren, geht aus den Resultaten des dritten Präcisionsnivellements der Linie Weigolshausen-Würzburg vom Herbste 1889 hervor, welches die Kote der ⊙ 943 in Würzburg gegen die 1871 erhaltene fast unverändert lässt. Es ist dies ein neuer Beweis dafür, dass die Genauigkeit von Nivellementsarbeiten in höherem Grade von der Zuverlässigkeit des Gehilfenpersonals abhängt, als man gemeiniglich anzunehmen geneigt ist.

Zu Nr 4. Das Präcisionsnivellement der Strecke Donauwörth-Regensburg wurde hauptsächlich in der Absicht ausgeführt, das frühere, grosse Polygon III durch eine Querlinie zu teilen und auf seine Richtigkeit zu prüfen, während durch das Präcisionsnivellement der Strecke Offingen-Donauwörth die nördliche Grenze für das frühere Polygon V bis an die Donau, also nahe bis an die Landesgrenze verschoben wurde. Dem Bestreben, hydrographische Studien und Forschungen durch Schaffung möglichst vieler festen Punkte in der Nähe der wichtigeren fliessenden oder stehenden Gewässer zu unterstützen, wurde auch hier durch Ausführung mehrfacher Zweignivellements und Einbeziehung von Pegelnullpunkten an der Donau und an der obersten Haltung des Ludwigs-Donau-Main-Kanals in das Bayerische Höhennetz erster Ordnung Ausdruck verliehen.

### Die Konstanten der Instrumente.

Die Konstante des distanzmessenden Fernrohrs am Instrument Nr I, welches mit den Latten Nr VIII und IX zur Ausführung aller vorstehend

besprochenen Arbeiten diente, wurde der vielen Eisenbahnfahrten halber öfter als sonst bestimmt, nämlich

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a) in Fürth | am | 10. September | abends | $\cot\varphi$ | $= 139{,}26 \pm 0{,}040$ |
| b) „ Bamberg | „ | 18. „ | nachmittags | „ | $= 139{,}27 \pm 0{,}070$ |
| c) „ Weigolshausen | „ | 30. „ | morgens | „ | $= 139{,}48 \pm 0{,}046$ |
| d) „ Neuoffingen | „ | 8. Oktober | morgens | „ | $= 139{,}44 \pm 0{,}039$ |
| e) „ Gundelshausen | „ | 26. „ | abends | „ | $= 139{,}41 \pm 0{,}056$ |

Es wurden demnach die Entfernungen und Zielweiten aus den Lattenabschnitten $a$ berechnet, wie folgt

a) für die Strecken Nürnberg-Bamberg, Staffelstein-Untersiemau, Hof (neu)-Hof (alt) aus

$$E = 139{,}26\, a + 0{,}78 \text{ m}$$

b) für alle übrigen Strecken aus

$$E = 139{,}44\, a + 0{,}78 \text{ m}.$$

An den beiden Reversionslatten VIII und IX wurde zunächst nach der Rückkunft von den Nivellementsarbeiten im Algäu (Frühjahr 1889) eine kleine Aenderung vorgenommen. Nachdem nämlich bei der Ausführung dieser Arbeiten wiederum ein, glücklicherweise sogleich aufgefundener Meterfehler sich eingeschlichen hatte, wurden zur Abhaltung oder doch sofortigen Kenntlichmachung eines solchen diejenigen Seiten beider Latten, welche die verschobene Teilung tragen, in verkehrtem Sinne und von 10,0 aus beginnend beziffert, sodass also stets die Summe der beiderseitigen Ablesungen für jede Latte 10 m plus dem Betrag der Verschiebung der hinteren Teilung gegen die vordere, d. i. rund 10,035 m betragen muss. Nach der Rückkehr, im November 1889, wurden beide Latten unter dem Mikroskop mit den zwei Breithaupt'schen Meterstäben abgeglichen und erhalten.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Latte VIII | Direkte | Teilung | $1\ M_L = 1{,}0003024 \text{ m} \pm 0{,}0073 \text{ mm}$ |
| | Verschobene | „ | $1\ M_L = 1{,}0003090 \text{ m} \pm 0{,}0103$ „ |
| Latte IX | Direkte | „ | $1\ M_L = 1{,}0002567 \text{ m} \pm 0{,}0170$ „ |
| | Verschobene | „ | $1\ M_L = 1{,}0002971 \text{ m} \pm 0{,}0089$ „ |

Im Mittel aus allen vier Lattenteilungen findet sich hienach für die nominelle Meterlänge

$$1\ M_L = 1{,}0002913 \text{ m}.$$

Bei Berechnung der vorstehenden Lattenabgleichungen und Vergleichung der erhaltenen Resultate und ihrer mittleren Fehler mit den Ergebnissen früher ausgeführter Abgleichungen dieser beiden Latten fiel es uns auf, dass die Meterlängen nicht nur, sondern auch deren mittlere Fehler ein ziemlich gleichartiges Verhalten bei allen Abgleichungen zeigten. Die nachfolgende Uebersicht der vier vom Ingenieur Oertel ausgeführten Abgleichungen, in welchem alles in Einheiten der siebenten Dezimale zu verstehen ist, wird das oben Gesagte bestätigen.

| Latte | Teilung | 1888, Sept. 7 | | 1888, Okt. 16 | | 1889, Mai 17 | | 1889, Nov. 6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| VIII | Direkte | 2319 | ± 84 | 2485 | ± 105 | 2159 | ± 91 | 3090 | ± 103 |
| VIII | Verschobene | 2241 | ± 99 | 2299 | ± 73 | 1750 | ± 72 | 3024 | ± 73 |
| IX | Direkte | 1783 | ± 149 | 1896 | ± 154 | 1550 | ± 150 | 2567 | ± 170 |
| IX | Verschobene | 1755 | ± 88 | 2170 | ± 89 | 1649 | ± 94 | 2971 | ± 89 |
| | | 2025 | | 2213 | | 1777 | | 2913 | |

Man sieht sofort, dass durchgehends die 4 Lattenteilungen ziemlich gleichmässige Aenderungen von einer Untersuchung zur andern zeigen, dass sie also durch die inzwischen stattgefundenen Einwirkungen der Wärme und Feuchtigkeit ziemlich gleichmässig beeinflusst wurden. Ferner zeigt eine nähere Betrachtung der mittleren Fehler, dass dieselben für die direkte Teilung der Latte IX durchschnittlich doppelt so gross sind, als diejenigen für die übrigen Lattenteilungen, woraus geschlossen werden muss, dass diese Teilung den anderen dreien an Genauigkeit nachsteht.

Zur Reduktion der beobachteten Höhenunterschiede auf die wahre Meterlänge diente für die Beobachtungen im Herbst 1889 das Mittel der beiden, in diesem Jahre ausgeführten Abgleichungen, nämlich

$$1\ M_L = 1{,}0002345\ \text{m}.$$

## Grenzanschlüsse.

Abgesehen von dem neuerdings wieder hergestellten Anschluss an das Sächsische Präcisionsnivellement bei Hof wurden nunmehr die Anschlüsse an die Nivellements der K. Preussischen Landesaufnahme bei

Coburg und Kahl auch unsererseits definitiv festgelegt; ein dritter Anschluss an die ebengenannten Preussischen Nivellements in Elm, der von uns im Herbst 1887 vorbereitet worden war, wurde laut Zuschrift des Chefs der trigonometrischen Abteilung der K. Preussischen Landesaufnahme in Berlin an den Verfasser dieser Mitteilung vom 7. Nov. 1889 im Lauf des verflossenen Sommers gleichfalls vollzogen. Die Ergebnisse dieser drei Anschlüsse sind:

1. Nivellementsgrenzpfeiler bei Obersiemau, Bolzen 6950 (vgl. „Nivellements der Trigonometrischen Abteilung der K. Preussischen Landesaufnahme"; Band VII, S. 87)

| | | Meereshöhe des Bayerischen Generalhorizonts |
|---|---|---|
| Preussische Meereshöhe (Höhe über N. N.) . . | 315,914 m | |
| Bayerische Kote . . . . . . . . . . . | 545,373 „ | |
| | | 861,287 m |

| Kontrollnivellements: | | | Horizont: |
|---|---|---|---|
| Bolzen 6949 | Preussisch | 308,082 m | 861,292 m |
| | Bayerisch | 553,210 „ | |
| Höhenmarke in Untersiemau | Preussisch | 299,676 m | 861,293 „ |
| | Bayerisch | 561,617 „ | |

2. Nivellementsgrenzpfeiler mit Bolzen 6565 bei Kahl (vgl. „Nivellements etc." Band V, S. 58)

| | | |
|---|---|---|
| Preussische Höhe über N. N. . . . . . . . | 112,184 m | |
| Bayerische Kote . . . . . . . . . . . . | 749,191 „ | |
| | | 861,375 „ |

3. Bayerische Höhenmarke ⊙ am Betriebsgebäude im Bahnhof Elm (vgl. Zuschrift des Chefs der trigon. Abt. der Preuss. Landesaufn. vom 7. Nov. 1889, Nr 1913[A] und Mitteilung VII des Bayer. Präcis.-Niv., S. 93[1])

1) Sämtliche Koten des Nivellements Gemünden-Elm, wie sie in der VII. Mitteilung, S. 91 bis 93 mitgeteilt sind, bedürfen einer Verbesserung von + 0,0011 m, weil sie von einer unrichtigen Kote der ⊙ 917 in Gemünden ausgehen. Es ist auf S. 91 für diese Kote angenommen 699.7810, während es nach S. 48 derselben Mitteilung heissen soll: 699,7821. Ausserdem ist auch an alle Koten dieses Nivellements die bekannte Verbesserung von + 0,01 m anzubringen.

| | | |
|---|---|---|
| Preussische Höhe über N. N. . . . . . . . | 320,080 m | Meereshöhe des Bayerischen Generalhorizonts |
| Bayerische Kote . . . . . . . . . . . . | 541,273 „ | |
| | | 861,353 m |

Es ist also im Mittel aus diesen drei Anschlüssen die Höhe des Bayerischen Generalhorizonts über Normalnull = 861,3383 m

Wollte man noch die aus den preussischen (bereits ausgeglichenen) und bayerischen Nivellementslinien entstehenden Schleifen in das Auge fassen, so hätte man (vgl. nebenstehende Skizze, wo die punktierten Linien Preussische, die ausgezogenen Linien Bayerische, die Zahlen bei den preussischen Linien die Bolzen-Nummern sind, von denen sie ausgehen):




1. Elm-Gemünden-Kahl-Elm.

| | | Länge | Höhenunterschied |
|---|---|---|---|
| Preussisch: | Elm-Hanau-Kahl . . . . . | 69,51 km | 207,896 m |
| Bayerisch: | Elm-Gemünden-Kahl . . . | 116,80 „ | 207,919 „ |
| | | $L = 186,31$ km | $\Delta = 0,023$ m |
| | | $\sqrt{L} = 13,65$ | $\mu = \pm 1,69$ mm |

2. Elm-Gemünden-Obersiemau-Vacha-Elm.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Bayerisch: | Elm-Gemünden-Obersiemau . | 197,01 km | 4,101 m |
| Preussisch: | Obersiemau-Vacha-Elm . . | 217,86 „ | 4,166 „ |
| | | $L = 414,87$ km | $\Delta = 0,065$ m |
| | | $\sqrt{L} = 20,37$ | $\mu = + 3,19$ mm |

Die Schlussfehler und die mittleren Fehler für 1 Kilometer werden also für beide Schleifen durchaus nicht zu gross, besonders wenn man noch bedenkt, dass die Höhenunterschiede der Preussischen Linien durch die dortige Netzausgleichung für den Schluss der beiden obigen Schleifen ungünstiger sich gestalten, als die aus den direkten Beobachtungen ab-

geleiteten Höhenunterschiede. Würde man diese letzteren nehmen, so käme im ersten Fall

$$\Delta = 0{,}017 \text{ m und } \mu = \pm 1{,}24 \text{ mm}$$

und im zweiten Fall

$$\Delta = 0{,}044 \text{ m und } \mu = \pm 2{,}16 \text{ mm}$$

Da jedoch, wie bemerkt, die Preussischen Höhen bereits ausgeglichen und endgiltig festgelegt sind, bleibt nichts übrig, als die ganzen Schlussfehler $\Delta$, wie sie oben abgeleitet sind, auf die Bayerischen Linien zu verteilen.

Ueber weitere Anschlüsse und zwar an das Sächsische Präcisionsnivellement bei Hof (und mittelbar also wieder an das der Preussischen Landesaufnahme bei Ronneburg) ist folgendes zu bemerken.

Diese Anschlüsse beziehen sich auf die Punkte Hof (alter Bahnhof), Franzensbad und Asch, wo durchgehends die an den Bahnhöfen angebrachten Bayerischen Höhenmarken auch Sächsischerseits einnivelliert wurden.

Bekanntlich sind die Höhenunterschiede dieser Punkte, weil ihre Erhebungen im Jahre 1869 ungenau waren, Bayerischerseits im Jahre 1882 neu gemessen worden, und es sollen deshalb hier auch nur die aus dieser Neumessung erhaltenen Koten in Betracht kommen.

Es wurde nun gefunden

1. Bayerischerseits die Kote der Höhenmarke

a) in Hof zu . . . 355,7795 m unter dem Bayer. Generalhorizont
b) in Franzensbad zu . 410,9348 „ (Mittlg. VI, S. 34)
c) in Asch zu . . . 219,6848 „

2. Sächsischerseits die Höhe dieser Punkte über N.N. (siehe S. 135 u. ff. des „Sächs. Landesniv.“)

a) Hof . . . 505,449 also Höhe des Bayer. Gen. Horiz. = 861,229 m üb. N.N.
b) Franzensbad 450,198 „ „ „ 861,133 „ „
c) Asch . . 641,522 „ „ „ 861,207 „ „

Die Anschlüsse an die Nivellements der K. Preuss. Landesaufnahme ergaben dagegen mit genügender Uebereinstimmung im Mittel für die Höhe des Bayer. Generalhorizonts über N.N.: 861,338 m (s. S. 400), während im

Mittel aus den obigen drei Anschlüssen käme: 861,190 m, also um 0,148 m weniger. Will man sich von der Kote des Sächsischen Normalpunktes frei machen, so kann man mit Hilfe der Preussischen (durch die Landesaufnahme ermittelten) Höhe der Sächsischen Höhenmarke Nr 196 zu Ronneburg und dem Sächischen Höhenunterschied Ronneburg-Hof die Höhe der ⊙ in Hof neuerdings berechnen. Es ist aber die Höhe der Höhenmarke zu Ronneburg über N.N. nach dem VII. Bd. der „Nivell. der trigon. Abteilung der K. Preussischen Landesaufnahme“, S. 86 gefunden worden zu . . . . . . . . . . . . . . . . . 284,098 m

und nach dem „Sächsischen Landesniv.“, S. 135 u. ff. ist der (ausgeglichene) Höhenunterschied Ronneburg-Hof gleich 505,449 — 284,113 = . . . . . . . . . . . . . . 221,336 „

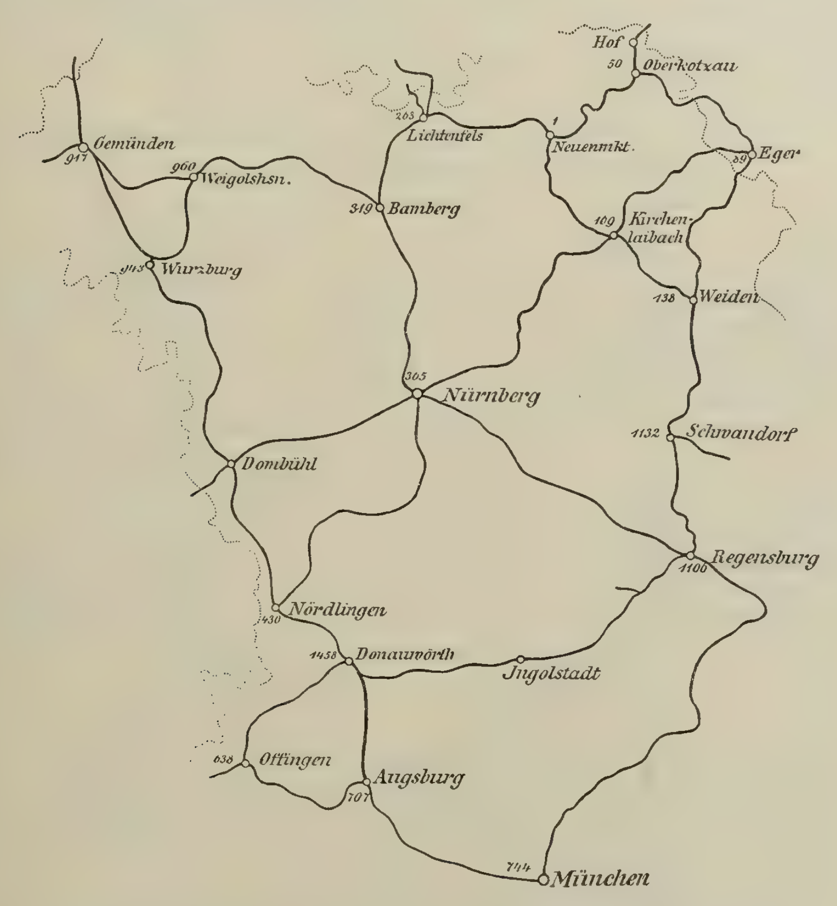
sodass hieraus in ziemlicher Uebereinstimmung mit der Sächs. Kote folgt: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 505,434 m

Dies beweist, dass die Höhe des Sächs. Normalpunktes über N.N. ziemlich richtig ist und es hat somit bei den obigen Differenzen sein Bewenden: die gerechneten Höhen des Bayerischen Generalhorizonts würden nur noch um 15 mm kleiner, also noch ungünstiger!

Angesichts dieser starken Abweichungen, welche die aus den 3 Sächsischen, so nahe beisammen liegenden Nivellementsanschlüssen sich ergebenden Höhen unseres Horizonts unter sich und denjenigen gegenüber zeigen, welche aus den Anschlüssen mit den Nivellements der K. Preussischen Landesaufnahme sich ergeben, dürfte eine weitere Rücksichtnahme auf diese Anschlüsse nicht zu nehmen sein. Ueberhaupt scheinen die Sächsischen Nivellements sich nicht gerade allzugrosser Genauigkeit zu erfreuen, insbesondere diejenigen Linien nicht, welche hier für uns in Betracht kommen. Berechnet doch Nagel selbst auf Seite 66 des „Sächsischen Landesnivellements“ den mittleren Kilometerfehler desselben zu $\pm$ 5,52 mm für das erste, $\pm$ 4,52 mm für das zweite Nivellement und für die aus beiden folgenden mittleren Höhenunterschiede $\left(\frac{I + 1{,}5\, II}{2{,}5}\right)$ . . . $\mu = \pm 3{,}50$ mm.

## Abschlüsse von Nivellementsschleifen.

Zur besseren Uebersicht folgt hier zunächst eine Skizze desjenigen Teiles des Bayerischen Höhennetzes erster Ordnung, welcher im Nachstehenden in Betracht kommt.




Die punktierten Linien bedeuten die Landesgrenze, die an den Eckpunkten eingetragenen Ziffern sind die in unseren früheren Mitteilungen enthaltenen Nummern der zugehörigen Höhenmarken, für welche im Nachstehenden die Höhenunterschiede und Längen der einzelnen Polygonseiten gelten.

Wie schon auf S. 394 erwähnt wurde, war der Hauptgrund für die Herstellung eines neuen Präcisionsnivellements der Linie Nürnberg-Bamberg

der Umstand, dass alle Schleifen, welchen diese Linie angehörte, verhältnismässig grosse Schlussfehler von gleichem Sinn aufzuweisen hatten. So unter anderen die beiden Schleifen II und II^b früherer Bezeichnung, deren Schluss auf S. 11 der VII. Mitteilung schon näher besprochen wurde. Mit dem neugefundenen Höhenunterschied für die Strecke Nürnberg-Bamberg ändert sich die Zusammenstellung für diese beiden Schleifen a. a. O. wie folgt:

| Nr | Strecke | Nivelliert | Länge in km | Höhenunterschied in m |
|---|---|---|---|---|
| | **1. Polygon II.** | | | |
| 1 | Neuenmarkt-Bamberg . . . . . | 1883 | 74,992 | + 107,8774 |
| 2 | Bamberg-Nürnberg . . . . . . | 1889 | 62,934 | — 69,8092 |
| 3 | Nürnberg-Regensburg . . . . . | 1873 | 100,923 | — 29,5538 |
| 4 | Regensburg-Weiden . . . . . . | 1873 | 86,969 | — 57,6179 |
| 5 | Weiden-Neuenmarkt . . . . . . | 1882 | 79,736 | + 49,1437 |
| | | | $L = 405{,}554$ | $\varDelta = + 0{,}0402$ |
| | | | $\sqrt{L} = 20{,}14$ | $\mu = \pm 1{,}99$ mm |
| | **2. Polygon II^b.** | | | |
| 1 | Neuenmarkt-Bamberg . . . . . | 1883 | 74,992 | + 107,8774 |
| 2 | Bamberg-Nürnberg . . . . . . | 1889 | 62,934 | — 69,8092 |
| 3 | Nürnberg-Kirchenlaibach . . . . | 1882 | 94,422 | — 152,5904 |
| 4 | Kirchenlaibach-Neuenmarkt . . . | 1882 | 40,119 | + 114,5463 |
| | | | $L = 272{,}467$ | $\varDelta = + 0{,}0241$ |
| | | | $\sqrt{L} = 16{,}51$ | $\mu = \pm 1{,}46$ mm |

Wie aus dieser Zusammenstellung ersichtlich ist, werden also jetzt die Schlussfehler $\varDelta$ dieser beiden Schleifen und damit die mittleren Fehler $\mu$ pro Kilometer bedeutend kleiner, als mit dem 1869 erhaltenen Höhenunterschied zwischen Bamberg und Nürnberg, mit welchem nach Mitteilung VII, S. 11 sich die folgenden Schluss- und Kilometerfehler ergaben:

Für Polygon II: $\varDelta = -0{,}0485$, also $\mu = \pm 2{,}41$ mm
„ „ II^b: $\varDelta = -0{,}0646$, „ $\mu = \pm 3{,}93$ „

Ausser diesen beiden Schleifen lassen sich mit der Strecke Nürnberg-Bamberg als Seite noch folgende vier Schleifen bilden:

3. Nürnberg-Bamberg-Weigolshausen-Würzburg-Nördlingen-Nürnberg,
4. Nürnberg-Bamberg-Weigolshausen-Würzburg-Dombühl-Nürnberg,

5. Nürnberg-Bamberg-Gemünden-Würzburg-Nördlingen-Nürnberg,
6. Nürnberg-Bamberg-Gemünden-Würzburg-Dombühl-Nürnberg.

Für diese letztgenannten 4 Polygone wird unter gleichzeitiger Hinzunahme des neugefundenen Höhenunterschiedes für die Strecke Weigolshausen-Würzburg erhalten:

| Nr | Strecke | Nivelliert | Länge in km | Höhenunterschied in m |
|---|---|---|---|---|
| | **3. Nürnberg-Bamberg-Weigolshausen-Würzburg-Nördlingen-Nürnberg.** | | | |
| 1 | Nürnberg-Bamberg . . . . . . | 1889 | 62,934 | — 69,8092 |
| 2 | Bamberg-Weigolshausen . . . . | 1886 | 69,627 | + 8,0512 |
| 3 | Weigolshausen-Würzburg . . . . | 1889 | 31,709 | — 55,3765 |
| 4 | Würzburg-Nördlingen . . . . | 1888 | 142,356 | + 236,1645 |
| 5 | Nördlingen-Nürnberg . . . . . | 1869 | 101,181 | — 119,0702 |
| | | | $L = 407,807$ | $\Delta = -0,0402$ |
| | | | $\sqrt{L} = 20,19$ | $\mu = \pm 1,99$ mm |
| | **4. Nürnberg-Bamberg-Weigolshausen-Würburg-Dombühl-Nürnberg.** | | | |
| 1 | Nürnberg-Bamberg . . . . . . | 1889 | 62,934 | — 69,8092 |
| 2 | Bamberg-Weigolshausen . . . . | 1886 | 69,627 | + 8,0512 |
| 3 | Weigolshausen-Würzburg . . . . | 1889 | 31,709 | — 55,3765 |
| 4 | Würzburg-Dombühl . . . . . . | 1888 | 88,376 | + 280,5501 |
| 5 | Dombühl-Nürnberg . . . . . . | 1886 | 68,004 | — 163,4273 |
| | | | $L = 320,650$ | $\Delta = -0,0117$ |
| | | | $\sqrt{L} = 17,91$ | $\mu = \pm 0,65$ mm |
| | **5. Nürnberg-Bamberg-Gemünden-Würzburg-Nördlingen-Nürnberg.** | | | |
| 1 | Nürnberg-Bamberg . . . . . . | 1889 | 62,934 | — 69,8092 |
| 2 | Bamberg-Gemünden . . . . . . | 1886 | 110,160 | — 80,1679 |
| 3 | Gemünden-Würzburg . . . . . | 1871 | 39,918 | + 32,8416 |
| 4 | Würzburg-Nördlingen . . . . . | 1888 | 142,356 | + 236,1645 |
| 5 | Nördlingen-Nürnberg . . . . . | 1869 | 101,181 | — 119,0702 |
| | | | $L = 456,549$ | $\Delta = -0,0412$ |
| | | | $\sqrt{L} = 21,37$ | $\mu = \pm 1,93$ mm |
| | **6. Nürnberg-Bamberg-Gemünden-Würzburg-Dombühl-Nürnberg.** | | | |
| 1 | Nürnberg-Bamberg . . . . . . | 1889 | 62,934 | — 69,8092 |
| 2 | Bamberg-Gemünden . . . . . . | 1886 | 110,160 | — 80,1679 |
| 3 | Gemünden-Würzburg . . . . . | 1871 | 39,918 | + 32.8416 |
| 4 | Würzburg-Dombühl . . . . . . | 1888 | 88,376 | + 280,5501 |
| 5 | Dombühl-Nürnberg . . . . . . | 1886 | 68,004 | — 163,4273 |
| | | | $L = 369,392$ | $\Delta = -0,0127$ |
| | | | $\sqrt{L} = 19,22$ | $\mu = \pm 0,66$ mm |

Der neue Wert für den Höhenunterschied Weigolshausen-Würzburg wurde bereits in den vorstehenden Schleifen Nr 3 und 4 benützt. Eine sehr wirksame Probe für seine Richtigkeit, sowie auch für die der 1871 gemessenen Strecke Würzburg-Gemünden bildet noch die kleine Schleife im Nordwesten des Netzes: Gemünden-Weigolshausen-Würzburg-Gemünden. Für diese aber kommt:

| Nr | Strecke | Nivelliert | Länge in km | Höhenunterschied in m |
|---|---|---|---|---|
| | **7. Gemünden-Weigolshausen-Würzburg-Gemünden.** | | | |
| 1 | Gemünden-Weigolshausen . . . . | 1886 | 40,533 | + 88,2191 |
| 2 | Weigolshausen-Würzburg . . . . | 1889 | 31,709 | — 55,3765 |
| 3 | Würzburg-Gemünden . . . . . | 1871 | 39,918 | — 32,8416 |
| | | | $L =$ 112,160 | $\Delta = +$ 0,0010 |
| | | | $\sqrt{L} =$ 10,39 | $\mu = \pm$ 0,10 mm |

Also auch diese siebente Schleife wird durch die Messungen vom vergangenen Sommer gleichwie die sämtlichen vorhergehenden zu einem sehr günstigen Schluss gebracht.

Es erübrigt noch die Untersuchung derjenigen Schleifen, welche durch die Neunivellierung der Donauthalbahn, nämlich der Linien Offingen-Donauwörth und Donauwörth-Regensburg neu entstanden sind. Es sind dies die folgenden:

8. Offingen-Donauwörth-Augsburg-Offingen,
9. Donauwörth-Regensburg-München-Augsburg-Donauwörth,
10. Offingen-Donauwörth-Regensburg-München-Augsburg-Offingen.
11. Donauwörth-Nördlingen-Nürnberg-Regensburg-Donauwörth.

| Nr | Strecke | Nivelliert | Länge in km | Höhenunterschied in m |
|---|---|---|---|---|
| | **8. Offingen-Donauwörth-Augsburg-Offingen.** | | | |
| 1 | Offingen-Augsburg . . . . . . | 1870 | 53,211 | + 49,1589 |
| 2 | Augsburg-Donauwörth . . . . . | 1869 | 43,949 | — 84,3392 |
| 3 | Donauwörth-Offingen . . . . . | 1889 | 46,898 | + 35,1822 |
| | | | $L =$ 144,058 | $\Delta = +$ 0,0019 |
| | | | $\sqrt{L} =$ 12,00 | $\mu = \pm$ 0,16 mm |
| | **9. Donauwörth-Regensburg-München-Augsburg-Donauwörth.** | | | |
| 1 | Donauwörth-Regensburg . . . . | 1889 | 127,422 | — 65,2111 |
| 2 | Regensburg-München . . . . . | 1872 | 147,226 | + 181,5187 |
| 3 | München-Augsburg . . . . . . | 1870 | 60,567 | — 31,9722 |
| 4 | Augsburg-Donauwörth . . . . . | 1869 | 43,949 | — 84,3392 |
| | | | $L =$ 379,164 | $\Delta = -$ 0,0038 |
| | | | $\sqrt{L} =$ 19,47 | $\mu = \pm$ 0,20 mm |
| | **10. Offingen-Donauwörth-Regensburg-München-Augsburg-Offingen.** | | | |
| 1 | Offingen-Donauwörth . . . . . | 1889 | 46,898 | — 35,1822 |
| 2 | Donauwörth-Regensburg . . . . | 1889 | 127,422 | — 65,2111 |
| 3 | Regensburg-München . . . . . | 1872 | 147,226 | + 181,5187 |
| 4 | München-Augsburg . . . . . . | 1870 | 60,567 | — 31,9722 |
| 5 | Augsburg-Offingen . . . . . . | 1870 | 53,211 | — 49,1589 |
| | | | $L =$ 435,324 | $\Delta = -$ 0,0057 |
| | | | $\sqrt{L} =$ 20,86 | $\mu = \pm$ 0,27 mm |
| | **11. Donauwörth-Nördlingen-Nürnberg-Regensburg-Donauwörth.** | | | |
| 1 | Donauwörth-Nördlingen . . . . | 1869 | 31,698 | + 24,2709 |
| 2 | Nördlingen-Nürnberg . . . . . | 1869 | 101,181 | — 119,0702 |
| 3 | Nürnberg-Regensburg . . . . . | 1873 | 100,923 | + 29,5535 |
| 4 | Regensburg-Donauwörth . . . . | 1889 | 127,422 | + 65,2111 |
| | | | $L =$ 361,224 | $\Delta = -$ 0,0344 |
| | | | $\sqrt{L} =$ 19,01 | $\mu = \pm$ 1,79 mm |

Wie aus den vorstehenden 11 Schleifenabschlüssen zu entnehmen ist, gestalten sich dieselben unter Einführung der im Herbst 1889 neu und wiederholt gemessenen Höhenunterschiede äusserst günstig; die Beträge für die Schlussfehler und die mittleren Fehler pro Kilometer halten sich durchwegs auf erfreulich geringer Höhe.

Es mag hier noch gestattet sein, über die Ausgangskoten des Präcisionsnivellements im nördlichen Bayern in Beziehung auf einen Punkt Klarheit zu schaffen, dessen schon mehrfach Erwähnung geschah, der aber doch bis jetzt noch nicht eingehend für sich und die Folgen, die er nach sich zieht, behandelt wurde. Bekanntlich wurde bei der Berechnung der Nivellements von 1869 ein Fehler von 1 cm begangen und zwar zwischen den Punkten 241 und 242 (S. 72 der I. Mittlg.). Da das Nivellement in Neuenmarkt begonnen und in der Richtung über Lichtenfels, Bamberg, Nürnberg etc. bis Lindau geführt wurde, haben wir bisher angenommen, dass der genannte Fehler die vorausgehenden Koten, also die von Neuenmarkt bis Mainroth nicht beeinflusse, sondern alle nachfolgenden. Ein eingehenderes Studium der I. Mitteilung zeigte aber, dass die Koten von Lindau aus rückwärts gerechnet wurden, so dass also gerade umgekehrt alle Koten bis Mainroth (in Bezug auf den Bayerischen Eisenbahnhorizont) richtig, die nachfolgenden dagegen bis nach Neuenmarkt und ferner die Koten aller von diesem letzteren Punkte abgehenden Nivellements um den Betrag von 1 cm zu klein sind.

Dementsprechend sind zu verbessern um + 1 cm:

1. Die Koten aller Fixpunkte (1—241) zwischen Mainroth und Neuenmarkt, also auch sämtliche Koten des Fichtelgebirgspolygons in Mitteilung I;
2. Die Koten derjenigen Hauptfixpunkte und Zweignivellements, welche von einem der Fixpunkte Nr 1 bis 241 aus bestimmt worden sind (V. Mitteilung);
3. Die Koten des von Neuenmarkt ausgehenden Wiederholungsnivellements des Fichtelgebirgspolygons in Mitteilung VI, S. 26 bis 46;
4. Die Koten der ebenfalls von Neuenmarkt ausgehenden Wiederholungsnivellements a) Neuenmarkt-Kulmbach-Lichtenfels, b) Ober-

kotzau-Hof, c) Kirchenlaibach-Markt Redwitz-Eger, d) Coburg-Lichtenfels-Bamberg auf Seite 14 bis 30, ferner die Koten der Wiederholungsnivellements Bamberg-Schweinfurt-Gemünden-Kahl auf S. 40 bis 53 der VII. Mitteilung.

Aus dem gleichen Grunde sind nachfolgende Verbesserungen in verschiedenen Mitteilungen nothwendig (einige Druckfehler sind gleich beigefügt).

In VII, Seite 7: die Fussnote muss lauten:

„Im Jahre 1869 wurde nach Mitteilung I, S. 71 die Kote von „Neuenmarkt = 511,7368 gefunden. Diese war jedoch um 0,01 m „zu klein, wie die Rechenlisten von Mainroth bei späterer Revision „durch Dr. Haid nachwiesen. Mit der verbesserten Kote 511,7468 „für Neuenmarkt wird $s' = 85,3261$ m."

Ferner kommen hiezu noch die auf S. 399 bereits erwähnten Verbesserungen für die ganze Strecke Gemünden-Elm, welche daher rühren, dass bei der Berechnung der Koten dieser Strecke nicht die neue Kote der Höhenmarke ⊙ 917 zu Gemünden benützt wurde. Es sind somit alle auf S. 91 bis 93 der VII. Mitteilung um + 0,0011 m zu verbessern, immer abgesehen von der Verbesserung + 0,01 m.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| In VI, Seite | 12, | Zeile | 10 | v. u. | statt | 0,0006 m | lies | 0,0094 m |
| „ | 12, | „ | 10 | „ | „ | 0,062 mm | „ | 0,97 mm |
| „ | 13, | „ | 19 | v. o. | „ | 38,9968 | „ | 37,9968 |
| „ | 54, | „ | 1 | v. u. | „ | − 0,0006 | „ | + 0,9994 |
| „ | 54, | „ | 4 | „ | „ | 397,1550 | „ | 397,1650 |
| In V, Seite | 16, | „ | 11 | v. o. | „ | 192,7315 | „ | 102,7315 |
| „ | 20, | „ | 10 | „ | „ | 38,0092 | „ | 37,9992 |
| „ | 20, | „ | 13 | „ | „ | + 0,0239 | „ | + 0,0139 |

(womit auch unsere frühere Ausgleichung unbrauchbar würde, wenn sie es nicht aus andern Gründen schon wäre).

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| In III, Seite | 8, | Zeile | 9 | v. o. | statt | 0,0143 m | lies | 0,0243 m |
| „ | 8, | „ | 10 | „ | „ | 0,54 | „ | 0,93 |

Endlich sei bei dieser Gelegenheit noch eines im Fixpunktsverzeichnis für die Strecke Partenstein-Kahl und daher auch in Mitteilung VII enthaltenen Versehens Erwähnung gethan. Auf Seite 50 der Letzteren muss bei Fixpunkt Nr 880 statt — 1,6248 stehen + 1,6248 (dieser Vorzeichenfehler ist beim gleichen Fixpunkt schon in Mittlg. II stehen geblieben und von da vermutlich in das erwähnte Fixpunktsverzeichnis übergegangen. In Mitteilg. II muss es auf S. 43, Zeile 8 v. o. heissen + 1,6252 statt — 1,6252). Demzufolge wird in Mitteilg. VII die Kote der ⊙ 879 zu Kahl 748,5416, statt wie es irrtümlicherweise heisst: 751,7912. Weitere Folgen hat dieser letztere Fehler nicht.

---

# III.

## Fixpunkt-Verzeichnis

für die im Herbst 1889 ausgeführten Präcisions-Nivellements-Strecken:

1. Bamberg-Nürnberg,
2. Staffelstein-Lichtenfels-Landesgrenze,
3. Hof, vom neuen zum alten Bahnhof,
4. Weigolshausen-Würzburg,
5. Kahl-Landesgrenze,
6. Offingen-Donauwörth-Ingolstadt-Regensburg mit Abzweigung Saal-Kehlheim

## I. Bamberg-Nürnberg.

| Nr | A | J | Z | D | ±H | w | w² | w′ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 319. | Höhenmarke ⊙ am Betriebshauptgebäude zu Bamberg, am Mittelpfeiler des Korridors (vgl. Mittlg. VII, S. 30) | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | 619,6242 |
| 318. | Fixpunkt unter der Höhenmarke am Betriebsgebäude zu Bamberg, in die oberste Treppenstufe gehauen | | | | | | | | |
| | 1 | | | | + 1,5394 | | | | 621,1636 |
| 322. | □ auf dem Bahngrenzstein Nr 204 östlich der Bahn bei Kilometer 1 + 970$^m$; 0,70$^m$ unter Pl. | | | | | | | | |
| | 2 | 16 | 62 | 1971 | — 1,4955 | 0,7 | 0,5 | 0,5 | 619,6681 |
| | □ Gewölbter Bahndurchlass bei Kilometer 5 + 615$^m$, westliche Stirn, mittlere Deckplatte; 0,09$^m$ über Pl. | | | | | | | | |
| | 3 | 25 | 73 | 3625 | — 5,0618 | 0,8 | 0,6 | 0,4 | 614,6063 |
| 323. | □ Gewölbter Bahndurchlass mit 2 Oeffnungen nördlich der Haltestelle Strullendorf bei Kilometer 7 + 470$^m$, westliche Stirn, südlicher Gesimsstein, 0,16$^m$ über Pl. | | | | | | | | |
| | 4 | 12 | 77 | 1837 | — 1,7558 | 0,7 | 0,5 | 0,5 | 612,8505 |
| 324. | □ Gewölbter Bahndurchlass mit 2 Oeffnungen bei Kilometer 11 + 65$^m$, östliche Stirn, südlicher Gesimsstein*); 0,10$^m$ unter Pl. | | | | | | | | |
| | 5 | 28 | 64 | 3573 | — 1,1321 | 0,7 | 0,5 | 0,4 | 611,7184 |
| 325. | □ unter der Höhenmarke am Betriebsgebäude zu Hirschaid, in die Treppenwange gehauen; 0,70$^m$ über Pl. | | | | | | | | |
| | 6 | 2 | 37 | 149 | — 0,9360 | 0,2 | 0,1 | 0,7 | 610,7824 |
| 326. | Höhenmarke ⊙ am Betriebsgebäude der Station Hirschaid, Perronseite, rechts neben der Eingangsthüre zum Expeditionslokal | | | | | | | | |
| | 7 | | | | — 1,5405 | | | | 609,2419 |

*) In der I. Mitteilung, S. 81, steht fälschlicherweise „nördlicher Gesimsstein“.

## Bamberg-Nürnberg.

| Nr | A | J | Z | D | ±H | w | w² | w′ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 327. | □ Wegdurchlass westlich der Bahn bei Kilometer 13 + 865$^{m}$, nördliche Stirndeckplatte; 0,12$^{m}$ über Pl. | | | | | | | | |
| | 1 | 23 | 57 | 2642 | — 3,4067 | 0,8 | 0,7 | 0,5 | 607,3757 |
| | □ Schiefer gedeckter Strassendurchlass für den westlichen Seitengraben der Bahn bei Bahnwärterposten Nr 9 und Kilometer 14 + 345$^{m}$, nördliches Widerlager, östliche Deckplatte; 0,08$^{m}$ unter Pl. | | | | | | | | |
| | 2 | 5 | 48 | 478 | — 0,3536 | 0,6 | 0,4 | 0,9 | 607,0221 |
| 328. | □ Gewölbter Bahndurchlass bei Kilometer 15 + 290$^{m}$, westliche Stirn, nördliche Deckplatte; 0,15$^{m}$ über Pl. | | | | | | | | |
| | 3 | 6 | 79 | 946 | + 0,0993 | 0,4 | 0,2 | 0,5 | 607,1214 |
| 329. | □ Gewölbter Bahndurchlass bei Kilometer 16 + 885$^{m}$, westliche Stirn, nördlicher Gesimsstein, innen an der Brüstung | | | | | | | | |
| | 4 | 11 | 76 | 1613 | — 0,5423 | 0,6 | 0,4 | 0,5 | 606,5791 |
| 331. | Höhenmarke ⊙ am Betriebsgebäude der Station Eggolsheim, Perronseite, nördliche, einspringende Ecke; 1,57$^{m}$ über Pl. | | | | | | | | |
| | 5 | 2 | 52 | 207 | — 1,9389 | 0,2 | 0,1 | 0,5 | 604,6402 |
| | Gedeckter Bahndurchlass bei Kilometer 18 + 190$^{m}$, □ auf der westlichen Stirndeckplatte; 0,94$^{m}$ unter Pl. | | | | | | | | |
| | 1 | 11 | 57 | 1173 | + 2,5255 | 0,5 | 0,3 | 0,5 | 607,1657 |
| 332. | Gewölbter Bahndurchlass bei Kilometer 19 + 90$^{m}$, westliche Stirn, □ auf dem obersten, südlichen Flügeldeckstein; Pl. | | | | | | | | |
| | 2 | 8 | 56 | 894 | — 3,0301 | 0,5 | 0,3 | 0,5 | 604,1356 |
| 333. | Offner Bahndurchlass bei Kilometer 23 + 102$^{m}$, südliches Widerlager, □ auf dem obersten Deckstein des östlichen Böschungsflügels; 0,08$^{m}$ unter Pl. | | | | | | | | |
| | 3 | 31 | 65 | 4003 | — 6,1990 | 1,1 | 1,2 | 0,5 | 597,9366 |
| 336. | ⊙ am Betriebshauptgebäude der Station Forchheim, Stadtseite, nördlicher Pfeiler der mittleren Oeffnung zur Vorhalle; 1,87$^{m}$ über Bahnhof-Planie | | | | | | | | |
| | 4 | 8 | 64 | 1017 | — 3,1051 | 0,3 | 0,1 | 0,3 | 594,8315 |

## Bamberg-Nürnberg.

| Nr | A | J | Z | D | ± H | w | w² | w' | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 337. | Gewölbte Bahnbrücke mit 3 Oeffnungen bei Kilometer 25 + 480^m^, westliche Stirn, □ auf der nördlichen Gesimsplatte; Pl. | | | | | | | | |
| | 1 | 15 | 46 | 1392 | + 2,6017 | 0,7 | 0,6 | 0,6 | 597,4332 |
| 338. | □ Bahngrenzstein bei Kilometer 26 + 200^m^; 1,58^m^ unter Pl. | | | | | | | | |
| | 2 | 7 | 52 | 724 | + 1,1098 | 0,5 | 0,3 | 0,6 | 598,5430 |
| 339. | Gedeckter Bahndurchlass bei Kilometer 27 + 645^m^, □ auf der östlichen Deckplatte; 0,19^m^ unter Pl. | | | | | | | | |
| | 3 | 17 | 48 | 1642 | — 1,8680 | 0,8 | 0,7 | 0,6 | 596,6750 |
| | Offner Bahndurchlass bei Kilometer 29 + 625^m^, nordöstliches Widerlager, □ auf dem Böschungsanfänger am Einlauf; 0,08^m^ über Pl. | | | | | | | | |
| | 4 | 13 | 76 | 1972 | — 2,9999 | 0,6 | 0,4 | 0,4 | 593,6751 |
| | Schiefer, gedeckter Bahndurchlass bei Kilometer 30 + 770^m^, □ auf der nordöstlichen Deckplatte der Stirn am Einlauf; 0,29^m^ unter Pl. | | | | | | | | |
| | 5 | 8 | 71 | 1143 | — 0,6965 | 0,5 | 0,3 | 0,5 | 592,9786 |
| 341. | Höhenmarke ⊙ am Betriebshauptgebäude der Station Baiersdorf, Ortseite, links neben der Eingangsthüre; 1,71^m^ über Bahnhof-Pl. | | | | | | | | |
| | 6 | 6 | 62 | 739 | — 2,6358 | 0,3 | 0,1 | 0,3 | 590,3428 |
| 342. | Offner Bahndurchlass bei Kilometer 33 + 130^m^, nördliches Widerlager, □ auf dem obersten Deckstein des westlichen Böschungsflügels; Pl. | | | | | | | | |
| | 1 | 12 | 71 | 1699 | + 0,0875 | 0,5 | 0,2 | 0,4 | 590,4303 |
| 343. | Offner Bahndurchlass bei Kilometer 33 + 865^m^, nördliches Widerlager, □ auf dem obersten Deckstein des westlichen Böschungsflügels | | | | | | | | |
| | 2 | 6 | 62 | 738 | — 0,7532 | 0,4 | 0,1 | 0,4 | 589,6771 |
| | Offner Bahndurchlass bei Kilometer 34 + 812^m^, □ auf der mittleren Deckplatte des nördlichen Widerlagers; Pl. | | | | | | | | |
| | 3 | 11 | 43 | 936 | — 1,1261 | 0,4 | 0,2 | 0,5 | 588,5510 |

## Bamberg-Nürnberg.

| Nr | A | J | Z | D | ±H | w | w² | w′ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 344. | Gewölbter Bahndurchlass bei Kilometer 36 + 507$^{m}$, westliche Stirn, ☐ auf dem obersten Deckstein des südlichen Böschungsflügels | | | | | | | | |
| | 4 | 7 | 50 | 696 | — 0,7592 | 0,4 | 0,2 | 0,5 | 587,7918 |
| 345. | Gedeckter Bahndurchlass bei Kilometer 37 + 45$^{m}$ (vor dem nördlichen Tunnelportal), ☐ auf einer Deckplatte der östlichen Stirn | | | | | | | | |
| | 5 | 11 | 65 | 1422 | — 1,3222 | 0,5 | 0,2 | 0,4 | 586,4696 |
| 346. | Gedeckter Bahndurchlass bei Kilometer 37 + 410$^{m}$ (vor dem südlichen Tunnelportal), ☐ auf der östlichen Stirnplatte | | | | | | | | |
| | 6 | 6 | 60 | 720 | — 0,1894 | 0,5 | 0,3 | 0,6 | 586,2802 |
| 347. | Fixpunkt unter der ⊙ am Betriebsgebäude zu Erlangen; 0,48$^{m}$ über Pl. | | | | | | | | |
| | 7 | 9 | 79 | 1426 | — 3,6061 | 0,7 | 0,5 | 0,6 | 582,6741 |
| 348. | Höhenmarke ⊙ am Betriebsgebäude der Station Erlangen, Perronseite, zwischen der 6. und 7. Thüre von Süden her | | | | | | | | |
| | 8 | | | | — 1,7164 | | | | 580,9577 |
| 349. | Schiefe gewölbte Bahnbrücke bei Kilometer 39 + 550$^{m}$, westliche Stirn, ☐ auf dem südlichen Gesimsstein innerhalb der Brüstung; Pl. | | | | | | | | |
| | 1 | 5 | 71 | 710 | — 0,5448 | 0,4 | 0,1 | 0,4 | 582,1293 |
| 350. | Gewölbter Bahndurchlass bei Kilometer 41 + 675$^{m}$, westliche Stirn, ☐ auf der nördlichen Flügeldeckplatte; 0,06$^{m}$ über Pl. | | | | | | | | |
| | 2 | 14 | 76 | 2117 | — 6,9354 | 0,7 | 0,5 | 0,5 | 575,1939 |
| 352. | ☐ auf der Umfassungsmauer der Wage in der Station Eltersdorf, westliche Schmalseite, dicht an der Wand; Pl. | | | | | | | | |
| | 3 | 12 | 76 | 1815 | — 1,6675 | 0,4 | 0,2 | 0,3 | 573,5264 |
| | Bahnbrücke über den Ludwigs-Donau-Mainkanal bei Kilometer 46 + 850$^{m}$ und Bahnwärterposten Nr 28, rechtseitiges Widerlager, ☐ auf dem Abdeckstein des nördlichen Böschungsflügels; Pl. | | | | | | | | |
| | 4 | 28 | 59 | 3334 | — 3,1324 | 1,0 | 0,9 | 0,5 | 570,3940 |

## Bamberg-Nürnberg.

| Nr | A | J | Z | D | ±H | w | w² | w′ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | □ auf der Trittstufe vor dem Eingang zum Wartsaal II. Klasse am Bahnhof zu Vach, linkseitige Ecke; 0,92m über Pl. | | | | | | | | |
| | 5 | 7 | 73 | 1019 | + 0,6496 | 0,4 | 0,1 | 0,4 | 571,0436 |
| | Bahnbrücke bei Kilometer 50 + 450m, nordöstliches Widerlager, □ auf der äussersten Deckplatte der südöstlichen Stirn; Pl. | | | | | | | | |
| | 6 | 23 | 59 | 2668 | — 6,7788 | 0,9 | 0,7 | 0,5 | 564,2648 |
| | Bahnbrücke bei Kilometer 51 + 135m, □ auf der südöstlichen Ecke des westlichen Widerlagers; Pl. | | | | | | | | |
| | 7 | 6 | 58 | 695 | — 2,8785 | 0,4 | 0,2 | 0,5 | 561,3863 |
| | □ auf der Trittstufe vor der mittleren Durchgangsthüre am Bahnhof zu Fürth, rechtseitige Ecke; 0,92m über Pl. | | | | | | | | |
| | 8 | 29 | 61 | 3550 | + 3,0086 | 1,1 | 1,2 | 0,6 | 564,3949 |
| | { Höhenmarke ⊙ am Betriebshauptgebäude zu Fürth, Perronseite, rechts neben dem Durchgang unterhalb der Uhr | | | | | | | | |
| | 9 | 1 | | | — 1,6319 | | | | 562,7630 |
| | □ auf der Treppenstufe vor dem Eingang zum Wartsaal III. Klasse der Station Doos, rechtseitige Ecke; 0,70m über Pl. | | | | | | | | |
| | 1 | 22 | 51 | 2254 | — 3,4957 | 0,9 | 0,9 | 0,6 | 560,8992 |
| | Gedeckter Strassendurchlass für den südöstlichen Bahngraben an der Ueberfahrt bei Neuseeleinsbühl, Kilometer 3 + 475m (Zählung ab Nürnberg) und Bahnwärterposten Nr 1; Pl. | | | | | | | | |
| | 2 | 20 | 60 | 1908 | — 2,7677 | 0,7 | 0,5 | 0,5 | 558,1315 |
| 364. | □ unter der ⊙ am Bahnhofgebäude zu Nürnberg, in die Treppenwange gehauen | | | | | | | | |
| | 3 | 27 | 65 | 3487 | — 6,2155 | 1,3 | 1,7 | 0,7 | 551,9160 |
| 365. | Höhenmarke ⊙ am Bahnhofgebäude in Nürnberg, Stadtseite, Mittelbau rechts neben der westlichen Thüre | | | | | | | | |
| | 4 | | | | — 2,1010 | | | | 549,8150 |

## 2. Staffelstein-Lichtenfels-Landesgrenze.

| Nr | A | J | Z | D | ±H | w | w² | w′ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 289. | Höhenmarke ⊙ am Betriebsgebäude der Station Staffelstein, Vorhalle gegen die Stadt hin, westlicher Pfeiler (vgl. Mittlg. VII, S. 27) | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | 597,0195 |
| | = auf dem 26. Kilometerstein | | | | | | | | |
| | 1 | 4 | 32 | 254 | + 3,2153 | 0,2 | 0,1 | 0,4 | 600,2348 |
| | Gewölbter Bahndurchlass bei Kilometer 27 + 994ᵐ, □ auf der mittleren Deckplatte am Auslauf | | | | | | | | |
| | 2 | 18 | 65 | 2336 | + 1,7395 | 0,6 | 0,3 | 0,4 | 598,7590 |
| | Gedeckter Bahndurchlass bei Kilometer 29 + 370ᵐ, □ auf der Stirndeckplatte am Einlauf | | | | | | | | |
| | 3 | 10 | 68 | 1364 | + 1,4443 | 0,5 | 0,3 | 0,4 | 600,2033 |
| | □ auf der östlichen Deckplatte eines ehemaligen, jetzt aufgefüllten Durchlasses an der Ueberfahrt am südlichen Ende der Station Lichtenfels, bei Kilometer 31,0; 0,19ᵐ über Pl. | | | | | | | | |
| | 4 | 18 | 53 | 1915 | — 1,2706 | 0,7 | 0,5 | 0,5 | 598,9327 |
| 262. | Fixpunkt unter der Höhenmarke am Betriebsgebäude in Lichtenfels, in den vorspringenden Sockel gehauen | | | | | | | | |
| | 5 | 5 | 59 | 594 | — 0,0175 | 0,4 | 0,2 | 0,5 | 598,3152 |
| 263. | Höhenmarke ⊙ am Betriebshauptgebäude der Station Lichtenfels, Stadtseite, Mitte des südwestlichen Pavillons | | | | | | | | |
| | 6 | | | | — 1,2611 | | | | 597,0541 |
| | Gedeckter Strassendurchlass Lit. b 2 bei Kilometer 1 + 510ᵐ an der Staatsstrasse Lichtenfels-Coburg (Zählung ab Lichtenfels), □ auf der Deckplatte am Einlauf, südliche Ecke | | | | | | | | |
| | 1 | 17 | 49 | 1666 | — 14,3761 | 0,7 | 0,5 | 0,5 | 583,9391 |
| | Gedeckter Strassendurchlass Lit. a 4 bei Kilometer 3,0, □ auf der Stirndeckplatte am Auslauf, westliche Ecke | | | | | | | | |
| | 2 | 19 | 43 | 1632 | — 43,8356 | 0,5 | 0,3 | 0,4 | 540,1035 |

## Staffelstein-Lichtenfels-Landesgrenze.

| Nr | A | J | Z | D | ±H | w | w² | w′ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ▢ auf dem gedeckten Durchlass für den südlichen Strassengraben unterhalb des Grenzsteins Nr 82, bei Kilometer 4 + 430^m | | | | | | | | |
| | 3 | 20 | 36 | 1427 | − 37,7306 | 0,5 | 0,3 | 0,5 | 502,3729 |
| | Gewölbter Strassendurchlass Lit. a 7 bei Kilometer 6 + 40^m, ▢ auf dem ausspringenden Schlussstein der Stirne am Auslauf | | | | | | | | |
| | 4 | 18 | 41 | 1462 | + 4,8963 | 0,6 | 0,4 | 0,5 | 507,2692 |
| | Nivellementsgrenzpfeiler mit Bolzen 6950 der K. Preussischen Landesaufnahme an der Landesgrenze, 200^m östlich vom Dorfe Obersiemau | | | | | | | | |
| | 5 | 21 | 37 | 1555 | + 38,1041 | 0,7 | 0,4 | 0,5 | 545,3733 |
| | Bolzen 6949 der K. Preussischen Landesaufnahme am östlichen Ausgang des Dorfes Untersiemau; 70^m vom ersten Haus entfernt (der den Bolzen tragende Steinpfeiler hat sich nach hinten gesenkt) | | | | | | | | |
| | 6 | 16 | 56 | 1802 | + 7,8366 | 0,6 | 0,4 | 0,4 | 553,2099 |
| | Höhenmarke der K. Preussischen Landesaufnahme an der Kirche in Untersiemau, Ostseite des Turmes | | | | | | | | |
| | 7 | 6 | 37 | 439 | + 8,4075 | 0,4 | 0,2 | 0,6 | 561,6174 |

## 3. Hof, neuer Bahnhof - Hof, alter Bahnhof.

| Nr | A | J | Z | D | ±H | w | w² | w′ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 197. | Höhenmarke ⊙ am neuen Betriebshauptgebäude zu Hof, Perronseite, zwischen den Thüren zum Königssalon und zum reservierten Zimmer (vgl. Mittlg. VII, S. 19) | | | | | | | | 364,0307 |
| 64. | Fixpunkt an der Südwestecke der ehemaligen Einsteighalle im alten Bahnhof in Hof | | | | | | | | |
| | 1 | 21 | 65 | 2704 | − 7,0646 | 0,7 | 0,5 | 0,4 | 356,9661 |
| 65. | Höhenmarke ⊙ am alten Bahnhofgebäude in Hof, Mittelpfeiler der ehemaligen Einfahrt in die Einsteighalle | | | | | | | | |
| | 2 | 1 | 18 | | − 1,1866 | | | | 355,7795 |

## 4. Weigolshausen-Würzburg.

| Nr | A | J | Z | D | ±H | w | $w^2$ | $w'$ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 960. | Höhenmarke ⊙ am Betriebshauptgebäude der Station Weigolshausen, Perronseite, links neben dem Eingang zum Wartsaal I. und II. Klasse (vgl. Mittlg. VII, S. 45) | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | 611,5730 |
| 959. | Fixpunkt unter der Höhenmarke zu Weigolshausen | | | | | | | | |
| | 1 | | | | + 1,4641 | | | | 613,0371 |
| 958. | Gewölbte Bahndurchfahrt bei Kilometer 70 + 780^m (Zählung ab Bamberg), nordwestliche Stirn, ☐ auf dem nordöstlichen Eckgesimsstein; 0,31^m über Pl. | | | | | | | | |
| | 2 | 17 | 76 | 2590 | — 8,5294 | 0,8 | 0,6 | 0,5 | 604,5077 |
| 957. | Gewölbte Bahnbrücke nördlich der Station Essleben bei Kilometer 71 + 583^m, nordwestliche Stirn, ☐ auf dem nordöstlichen Eckgesimsstein; 0,14^m über Pl. | | | | | | | | |
| | 3 | 5 | 80 | 799 | — 1,0148 | 0,2 | 0,1 | 0,2 | 603,4929 |
| 956. | Gewölbte Bahnbrücke über den Langenfeldbach bei Kilometer 76 + 30^m, nordwestliche Stirn, ☐ auf dem südwestlichen Eckgesimsstein; 0,31^m über Pl. | | | | | | | | |
| | 4 | 30 | 74 | 4420 | — 13,2296 | 1,1 | 1,1 | 0,5 | 590,2633 |
| 954. | ☐ unter der Höhenmarke in der Station Bergtheim, in die linkseitige Treppenwange gehauen; 0,60^m über Pl. | | | | | | | | |
| | 5 | 8 | 78 | 1251 | — 0,3994 | 0,3 | 0,1 | 0,2 | 589,8639 |
| 955. | Höhenmarke ⊙ am Betriebsgebäude der Station Bergtheim, Perronseite, links neben der Eingangsthür | | | | | | | | |
| | 6 | | | | — 1,4254 | | | | 588,4385 |
| 953. | Gewölbte Bahnbrücke bei Kilometer 79 + 470^m, westliche Stirn, ☐ im südlichen Brüstungsstein | | | | | | | | |
| | 1 | 14 | 77 | 2147 | + 4,1548 | 0,5 | 0,3 | 0,3 | 594,0187 |
| | Gewölbter Bahndurchlass bei Kilometer 81 + 135^m, westliche Stirn, ☐ auf der nördlichen Deckplatte; Pl. | | | | | | | | |
| | 2 | 11 | 76 | 1663 | — 7,0006 | 0,5 | 0,3 | 0,4 | 587,0181 |

## Weigolshausen-Würzburg.

| Nr | A | J | Z | D | ± H | w | $w^2$ | w′ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 952. | □ in der Umfassungsmauer der Wage in der Station Seligenstadt, Mitte der nördlichen Langseite; Pl. | | | | | | | | |
| | 3 | 11 | 73 | 1597 | − 6,4144 | 0,5 | 0,3 | 0,4 | 580,6037 |
| 951. | Gedeckter Bahndurchlass bei Kilometer 83 + 865$^{m}$, □ auf der südlichen Deckplatte der westlichen Stirn; 0,48$^{m}$ unter Pl. | | | | | | | | |
| | 4 | 8 | 70 | 1125 | + 1,8207 | 0,3 | 0,1 | 0,3 | 582,4244 |
| 950. | Gewölbter Bahndurchlass bei Kilometer 84 + 770$^{m}$, nordwestliche Stirn, □ auf der nordöstlichen Eckdeckplatte; 0,07$^{m}$ unter Pl. | | | | | | | | |
| | 5 | 6 | 75 | 900 | + 1,7677 | 0,4 | 0,2 | 0,5 | 584,1921 |
| 949. | Gewölbter Bahndurchlass bei Kilometer 87 + 815$^{m}$, südöstliche Stirn, □ auf der nordöstlichen Eckdeckplatte; 0,16$^{m}$ unter Pl. | | | | | | | | |
| | 6 | 20 | 76 | 3039 | + 10,5397 | 0,9 | 0,7 | 0,5 | 594,7318 |
| | □ im Sockel der Warnungstafel östlich der Bahn bei Kilometer 88 + 795$^{m}$, an der Ueberfahrt unterhalb Rothhof; 0,60$^{m}$ unter Pl. | | | | | | | | |
| | 7 | 7 | 71 | 992 | + 5,4527 | 0,3 | 0,1 | 0,3 | 600,1845 |
| 948. | □ in der Umfassungsmauer der Wage in der Station Rottendorf, nordwestliche Ecke; Pl. | | | | | | | | |
| | 8 | 28 | 78 | 4358 | + 19,5246 | 0,8 | 0,7 | 0,4 | 614,2564 |
| 947. | Gewölbte Bahnbrücke bei Kilometer 95 + 405$^{m}$, südliche Stirn, □ auf dem östlichen Eckgesimsstein; Pl. | | | | | | | | |
| | 9 | 8 | 74 | 1182 | + 9,4547 | 0,8 | 0,6 | 0,7 | 623,7111 |
| 945. | Gewölbte Wegbrücke für die Staatsstrasse von Kitzingen nach Würzburg bei Kilometer 97 + 475$^{m}$, nordöstliches Widerlager, □ in der Dohlenabdeckplatte an der nordwestlichen Ecke; 0,06$^{m}$ unter Pl. (An der alten ⊙ 946, welche sich über diesem Punkt befindet, ist der Schild abgerissen und die Bolzenöffnung vernagelt) | | | | | | | | |
| | 10 | 19 | 55 | 2080 | + 17,4176 | 0,5 | 0,3 | 0,4 | 641,1287 |

## Weigolshausen-Würzburg.

| Nr | A | J | Z | D | ±H | w | w² | w′ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Gedeckter Bahndurchlass bei Kilometer 98 + 422$^{m}$, □ in der westlichen Eckdeckplatte der südlichen Stirn; 0,19$^{m}$ unter Pl. | | | | | | | | |
| | 11 | 7 | 72 | 1013 | + 8,1027 | 0,4 | 0,2 | 0,4 | 649,2314 |
| 942. | Blechträgerbrücke mit 2 Oeffnungen bei Kilometer 275 + 770$^{m}$ (Zählung ab München), westliche Stirn, □ auf einem Brüstungsstein des nördlichen Widerlagers, Innenseite; 0,37$^{m}$ über Pl. | | | | | | | | |
| | 12 | 20 | 64 | 2578 | + 26,2412 | 0,7 | 0,5 | 0,4 | 675,4726 |
| | □ unter der Höhenmarke 943, in die Dohlenabdeckplatte gehauen; Pl. | | | | | | | | |
| | 13 | 8 | 60 | 967 | — 7,1499 | 0,4 | 0,2 | 0,4 | 668,3227 |
| 943. | Höhenmarke ⊙ an der gewölbten Wegbrücke für die Staatsstrasse von Kitzingen nach Würzburg an der Würzburg-Ansbacher Bahn, Mitte des östlichen Widerlagers | | | | | | | | |
| | 14 | | | | — 1,3732 | | | | 666,9495 |

## 5. Kahl-Landesgrenze.

| Nr | A | J | Z | D | ±H | w | w² | w′ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 879. | Bayerische Höhenmarke ⊙ am Betriebsgebäude der Station Kahl, Perronseite, zwischen den beiden Thüren (vgl. Mittlg. VII, S. 50) | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | 748,5516 |
| 880. | Fixpunkt unter der Höhenmarke in Kahl, in die untere Einfassung des Kellerfenster-Lichtschachtes gehauen | | | | | | | | |
| | 1 | | | | + 1,6249 | | | | 750,1765 |
| | Nivellementsgrenzpfeiler mit Bolzen 6565 der K. Preussischen Landesaufnahme an der Chaussee Aschaffenburg-Hanau, dicht an der Landesgrenze | | | | | | | | |
| | 2 | 13 | 76 | 1989 | — 0,9852 | 0,5 | 0,2 | 0,3 | 749,1913 |

## 6. Offingen-Donauwörth-Ingolstadt-Regensburg.

| Nr | A | J | Z | D | ±H | w | $w^2$ | w′ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 638. | Höhenmarke ⊙ am Betriebsgebäude der Station Offingen, Rückseite, rechts neben der Eingangsthüre (vgl. Mittlg. II, Seite 17) | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | 419,7664 |
| 637. | Fixpunkt unter der Höhenmarke in Offingen, in die rechtseitige Treppenwange gehauen (neu gerichtet) | | | | | | | | |
| | 1 | | | | + 1,6868 | | | | 421,4532 |
| | ⊙ am Betriebshauptgebäude zu Neuoffingen, Perronseite, Pfeiler zwischen dem Wartsaal III. Klasse und dem Büffet; $2{,}50^m$ über Pl. | | | | | | | | |
| | 2 | 20 | 67 | 2699 | — 1,7063 | 0,8 | 0,7 | 0,5 | 419,7469 |
| | Schiefe eiserne Fachwerksbrücke über die Donau mit 2 Oeffnungen bei Kilometer $169 + 760^m$ (Zählung ab Regensburg), □ auf dem oberen Pfeilerkopf; $1{,}42^m$ unter Pl. | | | | | | | | |
| | 1 | 6 | 76 | 912 | + 3,1894 | 0,3 | 0,1 | 0,3 | 422,9363 |
| | □ im Sockel des Bahnwärterhauses Nr 76 bei Kilometer $168 + 640^m$, südöstliche Ecke; $0{,}46^m$ über Pl. | | | | | | | | |
| | 2 | 7 | 80 | 1119 | + 0,5849 | 0,4 | 0,1 | 0,3 | 423,5212 |
| | □ im Sockel des Bahnwärterhauses Nr 75 bei Kilometer $166 + 725^m$, südöstliche Ecke; $0{,}56^m$ über Pl. | | | | | | | | |
| | 3 | 13 | 80 | 2075 | + 3,0547 | 0,6 | 0,4 | 0,4 | 426,5759 |
| | □ im Sockel des Bahnwärterhauses Nr 74 bei Kilometer $165 + 225^m$, nordöstliche Ecke; $0{,}45^m$ über Pl. | | | | | | | | |
| | 4 | 11 | 68 | 1494 | + 0,8081 | 0,4 | 0,1 | 0,3 | 427,3840 |
| | □ auf der Trittstufe vor dem Eingang zum Wartsaal III. Klasse in Gundelfingen, rechtseitige, hintere Ecke, links unterhalb der Höhenmarke; $0{,}74^m$ über Pl. | | | | | | | | |
| | 5 | 17 | 68 | 2318 | + 1,7775 | 0,6 | 0,3 | 0,3 | 429,1615 |
| | ⊙ am Betriebshauptgebäude der Station Gundelfingen, Perronseite, nordöstliche Ecke | | | | | | | | |
| | 6 | 1 | | | — 1,8188 | | | | 427,3427 |

## Offingen-Donauwörth-Ingolstadt-Regensburg.

| Nr | A | J | Z | D | ±H | w | w² | w′ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Bahn- und Wegdurchlass bei Kilometer 161 + 510m, südöstliche Stirn, □ auf dem Abdeckstein des südwestlichen Böschungsflügels; 0,37m unter Pl. | | | | | | | | |
| | 1 | 9 | 77 | 1392 | — 4,2442 | 0,6 | 0,3 | 0,5 | 424,9173 |
| | □ im Sockel des Bahnwärterhauses Nr 72 bei Kilometer 159 + 885m, nordöstliche Ecke; 0,42m über Pl. | | | | | | | | |
| | 2 | 10 | 81 | 1618 | — 3,4027 | 0,5 | 0,3 | 0,4 | 421,5146 |
| | □ in der Trittstufe vor dem Eingang zum Wartsaal III. Klasse im Bahnhof zu Lauingen, linke, hintere Ecke; 0,81m über Pl. | | | | | | | | |
| | 3 | 12 | 74 | 1774 | + 1,4960 | 0,4 | 0,2 | 0,3 | 423,0106 |
| | Höhenmarke ⊙ am Betriebsgebäude zu Lauingen, Perronseite, Pfeiler zwischen den beiden Wartesälen | | | | | | | | |
| | 4 | 1 | | | — 1,7098 | | | | 421,3008 |
| | □ im Sockel des Bahnwärterhauses Nr 71 bei Kilometer 156 + 610m, südwestliche Ecke; 0,49m über Pl. | | | | | | | | |
| | 1 | 10 | 75 | 1498 | + 0,5944 | 0,5 | 0,2 | 0,4 | 423,6050 |
| | □ auf dem Bahngrenzstein Nr 68 südlich der Bahn bei Kilometer 155 + 350m; 0,87m unter Pl. | | | | | | | | |
| | 2 | 8 | 78 | 1253 | + 3,1138 | 0,5 | 0,2 | 0,4 | 426,7188 |
| | □ auf der Trittstufe vor dem Eingang zum Wasserhaus in der Station Dillingen, linke, hintere Ecke; 0,08m über Pl. | | | | | | | | |
| | 3 | 14 | 74 | 2083 | + 0,5238 | 0,6 | 0,4 | 0,4 | 427,2426 |
| | Höhenmarke ⊙ am Betriebsgebäude zu Dillingen, Perronseite, nordöstlicher Ausbau, nordöstliche Ecke | | | | | | | | |
| | 4 | 1 | | | — 2,2804 | | | | 424,9622 |
| | □ im Sockel des Bahnwärterhauses Nr 69 bei Kilometer 151 + 425m, südwestliche Ecke; 0,82m über Pl. | | | | | | | | |
| | 1 | 13 | 71 | 1844 | + 2,1000 | 0,5 | 0,3 | 0,4 | 429,3426 |

## Offingen-Donauwörth-Ingolstadt-Regensburg.

| Nr | A | J | Z | D | ±H | w | w² | w' | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Bahnbrücke über die Eggau bei Kilometer 149 + 970$^{m}$, rechtseitiges Widerlager, ▢ auf einem Brüstungsstein der oberen Stirn; 0,28$^{m}$ über Pl. | | | | | | | | |
| | 2 | 9 | 81 | 1451 | + 5,2148 | 0,4 | 0,2 | 0,3 | 434,5574 |
| | = auf dem Kilometerstein Nr 149 in der Haltestelle Steinheim; 0,70$^{m}$ über Pl. | | | | | | | | |
| | 3 | 6 | 80 | 964 | — 0,4483 | 0,4 | 0,2 | 0,4 | 434,1091 |
| | Bahnbrücke über den Schlangenbach und den Deisenhofer Weg bei Kilometer 146 + 925$^{m}$, linkseitiges Widerlager, ▢ auf einem Gesimsstein der unteren Stirn; 0,03$^{m}$ über Pl. | | | | | | | | |
| | 4 | 13 | 80 | 2070 | + 6,2350 | 0,3 | 0,1 | 0,2 | 440,3441 |
| | ▢ auf der Trittstufe vor dem Eingang zum Expeditionslokal in Höchstädt, linke, vordere Ecke; 0,67$^{m}$ über Pl. | | | | | | | | |
| | 5 | 7 | 65 | 904 | — 0,6219 | 0,5 | 0,2 | 0,5 | 439,7222 |
| | Höhenmarke ⊙ am Betriebsgebäude der Station Höchstädt, Perronseite, östliche Ecke | | | | | | | | |
| | 6 | 1 | | | — 1,8308 | | | | 437,8914 |
| | Bahndurchlass für den Sonderheimer Graben bei Kilometer 144 + 500$^{m}$, südöstliche Stirn, ▢ auf dem Abdeckstein des nordöstlichen Böschungsflügels; 1,61$^{m}$ unter Pl. | | | | | | | | |
| | 1 | 11 | 78 | 1719 | — 1,6868 | 0,3 | 0,1 | 0,3 | 438,0354 |
| | Bahndurchlass für den Lutzinger Graben bei Kilometer 143 + 165$^{m}$; südöstliche Stirn, ▢ auf dem Abdeckstein des südwestlichen Böschungsflügels; 1,60$^{m}$ unter Pl. | | | | | | | | |
| | 2 | 10 | 66 | 1327 | + 0,2759 | 0,4 | 0,1 | 0,3 | 438,3113 |
| | ▢ auf der Trittstufe vor dem Wartsaal am Stationsgebäude zu Blindheim, rechts unterhalb der Höhenmarke; 0,79$^{m}$ über Pl. | | | | | | | | |
| | 3 | 16 | 61 | 1956 | + 2,2931 | 0,6 | 0,3 | 0,4 | 440,6044 |

## Offingen-Donauwörth-Ingolstadt-Regensburg.

| Nr | A | J | Z | D | ±H | w | w² | w′ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Höhenmarke ⊙ am Betriebsgebäude der Station Blindheim, Perronseite, mittlerer Wandpfeiler | | | | | | | | | |
| 4 | 1 | | | | — 1,7106 | | | | 438,8938 |
| Offner Bahndurchlass bei Kilometer 138 + 535$^m$ für den Schwenninger Graben, nordöstliches Widerlager, □ auf dem Abdeckstein des nordwestlichen Böschungsflügels; 0,07$^m$ unter Pl. | | | | | | | | | |
| 1 | 17 | 79 | 2674 | | — 0,9339 | 0,5 | 0,3 | 0,3 | 439,6705 |
| = auf dem Kilometerstein Nr 137; 0,37$^m$ über Pl. | | | | | | | | | |
| 2 | 10 | 76 | 1529 | | — 1,1994 | 0,4 | 0,2 | 0,3 | 438,4711 |
| Bahndurchlass bei Kilometer 135 + 695$^m$, □ auf einem Abdeckstein der südöstlichen Stirn; 0,06$^m$ unter Pl. | | | | | | | | | |
| 3 | 8 | 81 | 1298 | | + 1,7503 | 0,5 | 0,3 | 0,4 | 440,2214 |
| Höhenmarke ⊙ am Betriebsgebäude der Station Tapfheim, Perronseite, südwestliche Ecke; 2,52$^m$ über Pl. | | | | | | | | | |
| 4 | 8 | 81 | 1302 | | + 2,0670 | 0,3 | 0,1 | 0,3 | 442,2884 |
| Blechträgerbrücke über den Bollenbach bei Kilometer 133 + 290$^m$, südwestliches Widerlager, □ auf einem Brüstungsstein des südöstlichen Flügels; 0,36$^m$ über Pl. | | | | | | | | | |
| 1 | 8 | 69 | 1097 | | + 6,0267 | 0,2 | 0,0 | 0,2 | 448,3151 |
| Offner Bahndurchlass bei Kilometer 131 + 655$^m$, südwestliches Widerlager, □ auf einem Gesimsstein des südöstlichen Flügels; 0,13$^m$ unter Pl. | | | | | | | | | |
| 2 | 12 | 68 | 1629 | | + 7,5914 | 0,5 | 0,3 | 0,4 | 455,9065 |
| Offner Bahndurchlass bei Kilometer 130 + 45$^m$, südwestliches Widerlager, □ auf einem Gesimsstein der südöstlichen Stirn; 0,09$^m$ unter Pl. | | | | | | | | | |
| 3 | 12 | 67 | 1604 | | + 1,5219 | 0,6 | 0,4 | 0,5 | 457,4284 |
| □ im vorspringenden Sockel an der nordwestlichen Ecke der Lokomotivremise im Bahnhof zu Donauwörth; 0,20$^m$ über Pl. | | | | | | | | | |
| 4 | 17 | 78 | 2667 | | + 0,0918 | 0,8 | 0,7 | 0,5 | 457,5202 |

## Offingen-Donauwörth-Ingolstadt-Regensburg.

| Nr | A | J | Z | D | $\pm$H | w | w² | w′ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

1457. Fixpunkt unter der ⊙ 1458 am Betriebshauptgebäude zu Donauwörth, in die rechtseitige Treppenwange gehauen; 0,97ᵐ über Pl. (vgl. auch Mittlg. V, S. 47).

5 5 63 628 — 0,8864 0,4 0,2 0,5 456,6338
1876: 456,6335

1458. Höhenmarke ⊙ am Betriebshauptgebäude zu Donauwörth, Stadtseite, rechts neben dem Hauptportal (vgl. auch Mittg. V, S. 47)

6 — 1,6852 454,9486
1876: 454,9467

Eiserne Fachwerksbrücke über die Donau am östlichen Ende des Bahnhofes Donauwörth, linkseitiges Widerlager, ☐ auf einem Brüstungsstein des unteren Flügels, bei Kilometer 126 + 355ᵐ; 0,39ᵐ über Pl.

1 4 55 444 + 0,5587 0,1 0,0 0,2 457,1925

Blechträgerbrücke für das Hochwasser der Zusamm und der Donau, rechtseitiges Widerlager, ☐ auf einem Brüstungsstein des oberen Flügels, bei Kilometer 125 + 350ᵐ; 0,45ᵐ über Pl.

2 10 53 1053 + 0,0642 0,3 0,1 0,3 457,2567

Schiefe Blechträgerbrücke mit 2 Oeffnungen über die Schmutter, linkseitiges Widerlager, ☐ auf einem Gesimsstein des nördlichen Stirnflügels, bei Kilometer 124 + 280ᵐ; 0,05ᵐ unter Pl.

3 7 76 1066 + 1,5095 0,5 0,2 0,5 458,7662

Blechträgerbrücke für das Hochwasser des Egelseebaches bei Kilom. 122 + 370ᵐ, linkseitiges Widerlager, ☐ auf einem Gesimsstein des nördlichen Stirnflügels; 0,08ᵐ unter Pl.

4 12 79 1906 — 0,3194 0,4 0,2 0,3 458,4468

Blechträgerbrücke bei Kilometer 119 + 725ᵐ, westliches Widerlager, ☐ auf einem Gesimsstein des nördlichen Stirnflügels; 0,05ᵐ unter Pl.

5 17 77 2630 — 0,0572 0,7 0,6 0,5 458,3896

## Offingen-Donauwörth-Ingolstadt-Regensburg.

<table>
<tr><th>Nr</th><th>A</th><th>J</th><th>Z</th><th>D</th><th>±H</th><th>w</th><th>w²</th><th>w′</th><th>Kote</th></tr>
<tr><td colspan="10">Blechträgerbrücke bei Kilometer 118 + 430$^{m}$, östliches Widerlager, □ auf einem Gesimsstein des nördlichen Stirnflügels; 0,05$^{m}$ unter Pl.</td></tr>
<tr><td>6</td><td>8</td><td>81</td><td>1291</td><td>+ 0,0566</td><td>0,3</td><td>0,1</td><td>0,3</td><td>458,4462</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="10">Höhenmarke ⊙ am Haltstellgebäude in Genderkingen, Perronseite; 2,13$^{m}$ über Pl.</td></tr>
<tr><td>7</td><td>7</td><td>72</td><td>1013</td><td>— 2,5472</td><td>0,5</td><td>0,3</td><td>0,5</td><td>455,8990</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="10">Eiserne Fachwerksbrücke über den Lech, rechtseitiges Widerlager, □ auf dem Brüstungseckstein des oberen Stirnflügels, bei Kilometer 116 + 385$^{m}$; 0,41$^{m}$ über Pl.</td></tr>
<tr><td>1</td><td>8</td><td>72</td><td>1158</td><td>— 0,2296</td><td>0,5</td><td>0,3</td><td>0,5</td><td>455,6694</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="10">□ auf der Trittstufe vor dem Eingang zum Wartsaal III. Klasse in Rain, rechte, hintere Ecke; 0,68$^{m}$ über Pl.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>20</td><td>54</td><td>2148</td><td>— 0,6378</td><td>0,7</td><td>0,5</td><td>0,5</td><td>455,0316</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="10">Höhenmarke ⊙ am Betriebsgebäude der Station Rain, Perronseite, Pfeiler zwischen den beiden Wartsaalthüren</td></tr>
<tr><td>3</td><td>1</td><td></td><td></td><td>— 1,7330</td><td></td><td></td><td></td><td>453,2986</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="10">Blechträgerbrücke bei Kilometer 112 + 955$^{m}$, westliches Widerlager, □ auf einem Brüstungsstein der nördlichen Stirn; 0,39$^{m}$ über Pl.</td></tr>
<tr><td>1</td><td>14</td><td>45</td><td>1267</td><td>— 2,0162</td><td>0,6</td><td>0,4</td><td>0,6</td><td>453,0154</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="10">Wegdurchlass nördlich der Bahn bei Bahnwärterposten Nr 52 und Kilometer 110 + 665$^{m}$, □ auf der östlichen Stirndeckplatte; 0,39$^{m}$ unter Pl.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>24</td><td>47</td><td>2280</td><td>+ 4,3892</td><td>0,8</td><td>0,6</td><td>0,5</td><td>457,4046</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="10">Gewölbte Bahnbrücke bei Kilometer 109 + 690$^{m}$, □ auf einem Brüstungsstein der nördlichen Stirn; 0,50$^{m}$ über Pl.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>6</td><td>81</td><td>973</td><td>+ 1,4814</td><td>0,3</td><td>0,1</td><td>0,3</td><td>458,8860</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="10">Wegdurchlass südlich der Bahn bei Kilometer 107 + 570$^{m}$, östliche Stirn, □ auf dem nördlichen Flügelabdeckstein; 0,42$^{m}$ unter Pl.</td></tr>
<tr><td>4</td><td>14</td><td>76</td><td>2114</td><td>— 0,8646</td><td>0,8</td><td>0,6</td><td>0,5</td><td>458,0214</td><td></td></tr>
</table>

## Offingen-Donauwörth-Ingolstadt-Regensburg.

| Nr | A | J | Z | D | ±H | w | w² | w′ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Höhenmarke ⊙ am Betriebsgebäude der Station Burgheim, Perronseite, östliche Ecke; 2,49m über Pl. | | | | | | | | |
| | 5 | 10 | 40 | 805 | − 2,5107 | 0,5 | 0,2 | 0,5 | 455,5107 |
| | Gewölbte Bahnbrücke bei Kilometer 105 + 440m, □ auf einem Brüstungsstein der nordwestlichen Stirn; 0,41m, über Pl. | | | | | | | | |
| | 1 | 13 | 51 | 1327 | + 2,1180 | 0,6 | 0,4 | 0,5 | 457,6287 |
| | Bahndurchlass für den nördlichen Bahngraben bei Kilometer 103 + 885m, □ auf dem östlichen Stirndeckstein; Pl. | | | | | | | | |
| | 2 | 12 | 65 | 1560 | − 1,8955 | 0,6 | 0,3 | 0,5 | 455,7332 |
| | □ auf der Trittstufe vor dem Eingang zum Wartsaal in Unterhausen, rechtseitige, vordere Ecke; 0,90m über Pl. | | | | | | | | |
| | 3 | 23 | 63 | 2920 | −13,8237 | 0,9 | 0,8 | 0,5 | 441,9095 |
| | Höhenmarke ⊙ am Betriebsgebäude der Station Unterhausen, Perronseite, südöstliche Ecke | | | | | | | | |
| | 4 | 1 | | | − 1,8685 | | | | 440,0410 |
| | Bahndurchlass bei Kilometer 98 + 510m, □ auf einer Abdeckplatte der nördlichen Stirn; 0,76m unter Pl. | | | | | | | | |
| | 1 | 17 | 71 | 2423 | +11,7262 | 0,7 | 0,4 | 0,4 | 453,6357 |
| | Gewölbte Bahnbrücke bei Kilometer 96 + 840m, □ auf einem Brüstungsstein der nordwestlichen Stirn; 0,44m über Pl. | | | | | | | | |
| | 2 | 11 | 76 | 1662 | + 7,2000 | 0,4 | 0,2 | 0,3 | 460,8357 |
| | □ im Sockel der Läutebude bei Bahnwärterposten Nr 45, Mitte der Bahnseite; 0,66m über Pl. | | | | | | | | |
| | 3 | 4 | 75 | 596 | + 2,7331 | 0,2 | 0,1 | 0,3 | 463,5688 |
| | Höhenmarke ⊙ am Betriebshauptgebäude der Station Neuburg a. D., Perronseite, nordwestlicher Anbau, südwestliche Ecke; 2,77m über Pl. | | | | | | | | |
| | 4 | 18 | 45 | 1637 | + 4,4072 | 0,5 | 0,3 | 0,4 | 467,9760 |

## Offingen-Donauwörth-Ingolstadt-Regensburg.

| Nr | A | J | Z | D | ±H | w | w² | w′ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

Gewölbte Bahnbrücke bei Kilometer 94 + 325m, □ auf einem Brüstungsstein der nordwestlichen Stirn; 0,39m über Pl.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 69 | 275 | + 2,4485 | 0,5 | 0,2 | 0,9 | 470,4245 |

Gewölbte Bahnbrücke über den Längenmüllerbach bei Kilometer 92 + 595m, □ auf einem Brüstungsstein der oberen Stirn; 0,31m über Pl.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 11 | 78 | 1723 | + 8,4292 | 0,4 | 0,1 | 0,3 | 478,8537 |

Gedeckter Bahndurchlass bei Kilometer 89 + 845m, nördliche Stirn, □ auf dem Abdeckstein des östlichen Böschungsflügels; 1,27m unter Pl.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 22 | 62 | 2734 | + 4,4724 | 0,7 | 0,4 | 0,4 | 483,3261 |

Höhenmarke ⊙ am Betriebsgebäude der Station Rohrenfeld, Perronseite, westliche Ecke; 2,51m über Pl.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 9 | 77 | 1381 | — 2,8519 | 0,5 | 0,2 | 0,4 | 480,4742 |

□ im Sockel des Bahnwärterhauses Nr 41 bei Kilometer 86 + 385m, südöstliche Ecke; 0,50m über Pl.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 14 | 79 | 2225 | + 3,3335 | 0,7 | 0,5 | 0,5 | 483,8077 |

Wegbrücke über die Schornreuter Grabenkorrektion bei Kilometer 84 + 465m, westliche Stirn, □ auf einem Gesimsstein des nördlichen Böschungsflügels; 0,14m unter Pl.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 12 | 80 | 1914 | + 2,0900 | 0,6 | 0,3 | 0,4 | 485,8977 |

Höhenmarke ⊙ am Betriebsgebäude der Station Weichering, Perronseite, Pfeiler zwischen dem Gepäcklokal und dem Wartsaalfenster; 2,31m über Pl.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 8 | 80 | 1283 | — 1,4621 | 0,5 | 0,3 | 0,5 | 484,4356 |

Hölzerne Strassenbrücke über die Ach bei Kilometer 81 + 310m, linkseitiges Widerlager, □ auf dem nordwestlichen Gesimsstein des oberen Flügels; 0,06m über Pl.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 12 | 78 | 1867 | + 3,5501 | 0,5 | 0,2 | 0,3 | 487,9857 |

## Offingen-Donauwörth-Ingolstadt-Regensburg.

| Nr | A | J | Z | D | ±H | w | w² | w′ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | □ im Sockel des Bahnwärterhauses Nr 36 bei Kilometer 77 + 20$^m$, südöstliche Ecke; 0,58$^m$ über Pl. | | | | | | | | |
| | 2 | 27 | 79 | 4267 | + 2,2569 | 0,7 | 0,5 | 0,3 | 490,2426 |
| | Gewölbte Bahnbrücke bei Kilometer 74 + 675$^m$, □ auf einem Brüstungsstein der südwestlichen Stirn; 0,30$^m$ über Pl. | | | | | | | | |
| | 3 | 15 | 78 | 2339 | + 2,7382 | 0,6 | 0,3 | 0,4 | 492,9808 |
| | Linkseitiger Turm am Einfahrtsthor der Donaubrücke in Ingolstadt, □ auf dem Wulste des vorspringenden Sockelgesimses, in der Mitte desselben; 1,45$^m$ über der Höhe des Uferpfades | | | | | | | | |
| | 1 | 12 | 64 | 1525 | + 1,4606 | 0,6 | 0,4 | 0,5 | 494,4414 |
| | Nullpunkt des Donaupegels in Ingolstadt, berechnet aus den Ablesungen auf dem korrespondierenden Pegel an der, den rechtseitigen Thoreingang flankierenden Festungsmauer | | | | | | | | |
| | 2 | 1 | | | + 3,1006 | | | | 497,5420 |
| | Fixpunkt unter der Höhenmarke zu Ingolstadt; 0,91$^m$ über Pl. | | | | | | | | |
| | 4 | 5 | 77 | 765 | — 0,5921 | 0,4 | 0,2 | 0,5 | 492,3887 |
| | Höhenmarke ⊙ am Betriebshauptgebäude des Zentralbahnhofes zu Ingolstadt, Perronseite, Pfeiler zwischen dem Königssalon und dem Wartsaal III. Klasse | | | | | | | | |
| | 5 | | | | — 1,6805 | | | | 490,7082 |
| | □ im Granitsockel der Läutebude bei Bahnwärterposten Nr 34 und Kilometer 72 + 195$^m$, 0,22$^m$ über Pl. | | | | | | | | |
| | 1 | 11 | 78 | 1707 | + 1,3283 | 0,4 | 0,2 | 0,3 | 493,7170 |
| | Strassenbrücke über die Sandrach bei Kilometer 70 + 197$^m$, linkseitiges Widerlager, □ auf dem Eckgesimsstein des unteren Stirnflügels; 0,03$^m$ über Pl. | | | | | | | | |
| | 2 | 13 | 76 | 1987 | + 2,5850 | 0,4 | 0,2 | 0,3 | 496,3020 |

## Offingen-Donauwörth-Ingolstadt-Regensburg.

| Nr | A | J | Z | D | ±H | w | w² | w′ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Eiserne Fachwerksbrücke mit 4 Oeffnungen über die Paar bei Kilometer 67 + 965ᵐ, linkseitiges Widerlager, Gesimsstein des oberen Flügels, ☐ innerhalb der Brüstung; Pl. | | | | | | | | | |
| 3 | 15 | 74 | 2232 | | + 0,3666 | 0,6 | 0,4 | 0,4 | 496,6686 |
| Höhenmarke ⊙ am Betriebsgebäude der Station Manching, Perronseite, zwischen der Thüre und dem Fenster des Wartsaals; 2,54ᵐ über Pl. | | | | | | | | | |
| 4 | 10 | 68 | 1359 | | — 1,3603 | 0,4 | 0,2 | 0,4 | 495,3083 |
| Offner Bahndurchlass bei Kilometer 64 + 785ᵐ für den Achgraben, östliches Widerlager, ☐ auf einem Brüstungsstein der nördlichen Stirn; 0,14ᵐ über Pl. | | | | | | | | | |
| 1 | 14 | 78 | 2181 | | + 3,8886 | 0,7 | 0,4 | 0,4 | 499,1969 |
| Gewölbter Bahndurchlass bei Kilometer 63 + 170ᵐ, ☐ auf einem Gesimsstein der nordwestlichen Stirn; 0,26ᵐ unter Pl. | | | | | | | | | |
| 2 | 10 | 79 | 1582 | | + 0,7121 | 0,5 | 0,2 | 0,4 | 499,9090 |
| Blechträgerbrücke über den Moosgraben bei Kilometer 61 + 755ᵐ, linkseitiges Widerlager, ☐ auf einem Brüstungsstein der unteren Stirn; 0,25ᵐ über Pl. | | | | | | | | | |
| 3 | 9 | 78 | 1407 | | — 0,4983 | 0,3 | 0,1 | 0,2 | 499,4107 |
| Höhenmarke ⊙ am Betriebsgebäude der Station Vohburg, Perronseite, zwischen den beiden Wartsaalthüren; 2,32ᵐ über Pl. | | | | | | | | | |
| 4 | 13 | 70 | 1831 | | — 2,0701 | 0,5 | 0,2 | 0,3 | 497,3406 |
| Gewölbter Bahndurchlass bei Kilometer 57 + 810ᵐ, nördliche Stirn, ☐ auf dem Abdeckstein des westlichen Böschungsflügels; 0,19ᵐ unter Pl. | | | | | | | | | |
| 1 | 13 | 81 | 2106 | | + 2,6987 | 0,7 | 0,4 | 0,5 | 500,0393 |
| ☐ im Sockel des Bahnwärterhauses Nr 26 bei Kilometer 55 + 520ᵐ, südwestliche Ecke; 0,62ᵐ über Pl. | | | | | | | | | |
| 2 | 14 | 81 | 2280 | | + 2,2819 | 0,4 | 0,2 | 0,3 | 502,3212 |
| ☐ auf der Trittstufe vor dem Eingang zum Wartsaal III. Klasse in Münchsmünster, linke Ecke; 0,76ᵐ über Pl. | | | | | | | | | |
| 3 | 12 | 77 | 1844 | | + 0,6394 | 0,4 | 0,2 | 0,3 | 502,9606 |

## Offingen-Donauwörth-Ingolstadt-Regensburg.

| Nr | A | J | Z | D | ± H | w | w² | w' | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Höhenmarke ⊙ am Betriebsgebäude der Station Münchsmünster, Perronseite, zwischen den beiden Wartsaalthüren | | | | | | | | |
| | 4 | 1 | | | — 1,7070 | | | | 501,2536 |
| | Gewölbter Bahndurchlass bei Kilometer 52 + 120^m für den Kaltenbach, □ auf einem Gesimsabdeckstein der unteren Stirn; 0,07^m unter Pl. | | | | | | | | |
| | 1 | 10 | 78 | 1555 | + 1,0579 | 0,6 | 0,4 | 0,5 | 504,0185 |
| | Gewölbter Bahndurchlass bei Kilometer 50 + 795^m, Stirne am Auslauf, □ auf dem Abdeckstein des linkseitigen Böschungsflügels; 0,14^m unter Pl. | | | | | | | | |
| | 2 | 8 | 82 | 1310 | + 1,4505 | 0,4 | 0,2 | 0,4 | 505,4690 |
| | Gewölbter Bahndurchlass bei Kilometer 48 + 690^m für den Moosgraben, untere Stirn, □ auf dem Abdeckstein des rechtseitigen Böschungsflügels; 0,11^m unter Pl. | | | | | | | | |
| | 3 | 13 | 81 | 2099 | + 0,8426 | 0,5 | 0,2 | 0,3 | 506,3116 |
| | □ auf der Trittstufe vor dem Eingang zum Wartsaal III. Klasse in Neustadt a. D., linke vordere Ecke; 0,69^m über Pl. | | | | | | | | |
| | 4 | 15 | 79 | 2375 | — 0,1475 | 0,6 | 0,4 | 0,4 | 506,1641 |
| | Höhenmarke ⊙ am Betriebsgebäude der Station Neustadt a. D., Perronseite, zwischen der Thüre zum Wartsaal III. und dem Fenster des Wartsaals II. Klasse | | | | | | | | |
| | 5 | 1 | | | — 1,5977 | | | | 504,5664 |
| | Gedeckter Bahndurchlass bei Kilometer 44 + 850^m, □ auf einem Abdeckstein der norwestlichen Stirn; 1,12^m unter Pl. | | | | | | | | |
| | 1 | 9 | 80 | 1444 | + 1,2069 | 0,4 | 0,2 | 0,4 | 507,3710 |
| | Gewölbter Bahndurchlass bei Kilometer 42 + 825^m, Stirne am Einlauf, □ auf einem Abdeckstein des rechtseitigen Flügels; 0,04^m unter Pl. | | | | | | | | |
| | 2 | 15 | 68 | 2027 | — 6,3343 | 0,6 | 0,3 | 0,4 | 501,0367 |

## Offingen-Donauwörth-Ingolstadt-Regensburg.

| Nr | A | J | Z | D | ± H | w | $w^2$ | w' | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Blechträgerbrücke bei Kilometer 41 + $435^m$, westliches Widerlager, □ auf einem Gesimsstein des nördlichen Flügels; $0{,}04^m$ unter Pl. | | | | | | | | | |
| | 3 | 14 | 49 | 1386 | — 4,4225 | 0,4 | 0,2 | 0,3 | 496,6142 |
| Höhenmarke ⊙ am Betriebsgebäude der Station Abensberg, Perronseite, nordöstliche Ecke; $2{,}36^m$ über Pl. | | | | | | | | | |
| | 4 | 15 | 53 | 1585 | — 8,3410 | 0,6 | 0,4 | 0,5 | 488,2732 |
| Gewölbter Bahndurchlass bei Kilometer 38 + $250^m$, □ auf einer Deckplatte der nordwestlichen Stirn; $1{,}38^m$ unter Pl. | | | | | | | | | |
| | 1 | 10 | 79 | 1590 | + 2,6945 | 0,5 | 0,3 | 0,4 | 490,9677 |
| Gewölbter Bahndurchlass bei Kilometer 36 + $785^m$, □ auf einer Deckplatte der westlichen Stirn; $0{,}13^m$ unter Pl. | | | | | | | | | |
| | 2 | 9 | 81 | 1458 | — 7,1000 | 0,5 | 0,2 | 0,4 | 483,8677 |
| Gewölbte Bahnbrücke über einen Holzabfuhrweg bei Kilometer 34 + $430^m$, □ auf einem Brüstungsstein der westlichen Stirn; $0{,}43^m$ über Pl. | | | | | | | | | |
| | 3 | 15 | 78 | 2347 | + 6,9558 | 0,7 | 0,4 | 0,4 | 490,8235 |
| Gewölbte Bahnbrücke über den Hopfenbach bei Kilometer 33 + $460^m$, □ auf einem Brüstungsstein der westlichen Stirn; $0{,}45^m$ über Pl. | | | | | | | | | |
| | 4 | 6 | 81 | 968 | + 4,3717 | 0,4 | 0,2 | 0,4 | 495,1952 |
| □ auf der Trittstufe vor der westlichen Thüre des Wartsaals in Thaldorf; $0{,}68^m$ über Pl. | | | | | | | | | |
| | 5 | 12 | 74 | 1786 | + 6,0008 | 0,7 | 0,5 | 0,5 | 501,1960 |
| Höhenmarke ⊙ am Betriebsgebäude der Station Thaldorf, Perronseite, zwischen den beiden Thüren des Wartsaals | | | | | | | | | |
| | 6 | 1 | | | — 1,6737 | | | | 499,5223 |
| Gewölbte Bahnbrücke bei Kilometer 29 + $275^m$ über den Hopfenbach und einen Feldweg, □ auf einem Brüstungsstein der nördlichen Stirn; $0{,}40^m$ über Pl. | | | | | | | | | |
| | 1 | 16 | 74 | 2379 | + 8,0202 | 0,6 | 0,4 | 0,4 | 509,2162 |

## Offingen-Donauwörth-Ingolstadt-Regensburg.

| Nr | A | J | Z | D | ±H | w | w² | w′ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Gewölbte Bahnbrücke bei Kilometer 26 + 390ᵐ über den Hopfenbach und einen Feldweg, □ auf einem Brüstungsstein der nordwestlichen Stirn; 0,40ᵐ über Pl. | | | | | | | | |
| | 2 | 19 | 76 | 2875 | + 4,5745 | 0,5 | 0,3 | 0,3 | 513,7907 |
| | □ unter der Höhenmarke in Kehlheim, in den Sockel gehauen; 0,64ᵐ über Pl. | | | | | | | | |
| | 1 | 26 | 68 | 3559 | — 4,6075 | 0,7 | 0,5 | 0,4 | 509,1832 |
| | Höhenmarke ⊙ am Betriebsgebäude der Station Kehlheim, Perronseite, zwischen dem Wartsaal II. Klasse und dem Gepäcklokal | | | | | | | | |
| | 2 | | | | — 1,8199 | | | | 507,3633 |
| | Eiserne Strassenbrücke über die Donau in Kehlheim, □ auf der östlichsten Abdeckplatte der Böschungsmauer am linkseitigen Donauufer, unterhalb der Brücke | | | | | | | | |
| | 3 | 7 | 53 | 751 | + 10,5601 | 0,3 | 0,1 | 0,4 | 519,7433 |
| | Nullpunkte der Donaupegel an der eisernen Strassenbrücke, aus den Ablesungen auf denselben berechnet | | | | | | | | |
| | a) des korrespondierenden, in das rechtseitige Widerlager eingehauenen Pegels | | | | | | | | |
| | | | | | + 2,7975 | | | | 522,5408 |
| | b) des Holzpegels am ersten rechtseitigen Pfeiler | | | | | | | | |
| | | | | | + 2,7484 | | | | 522,4917 |
| | c) des korrespondierenden, in das linkseitige Widerlager eingehauenen Pegels | | | | | | | | |
| | | | | | + 2,7420 | | | | 522,4853 |
| | Oberste Haltung des Ludwigs-Donau-Mainkanals in Kehlheim, Kammerschleuse Nr 1, Unterhaupt, □ auf einer Abdeckplatte der nordwestlichen Schleusenmauer, unmittelbar über dem dort befestigten Pegel | | | | | | | | |
| | 4 | 4 | 82 | 659 | — 0,5544 | 0,4 | 0,1 | 0,5 | 519,1889 |
| | Nullpunkte der Kanalpegel an der Schleuse Nr. 1 | | | | | | | | |
| | a) Pegel am Schleusenunterhaupt | | | | | | | | |
| | | | | | + 4,3760 | | | | 524,5649 |
| | b) Pegel am Schleusenoberhaupt | | | | | | | | |
| | | | | | + 2,7566 | | | | 521,5455 |

## Offingen-Donauwörth-Ingolstadt-Regensburg.

| Nr | A | J | Z | D | ±H | w | w² | w′ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Höhenmarke ⊙ am Betriebsgebäude der Station Saal, Perronseite, zwischen den beiden Wartsaalthüren; 2,44m über Pl. | | | | | | | | |
| | 3 | 11 | 79 | 1735 | — 0,4230 | 0,6 | 0,3 | 0,4 | 513,3677 |
| | Gewölbter Strassendurchlass für den südlichen Seitengraben der Bahn, nördliches Widerlager, ☐ auf dem östlichen Stirndeckstein bei Kilom. 23 + 45m; 0,53m über Pl. | | | | | | | | |
| | 1 | 10 | 80 | 1595 | + 3,9115 | 0,4 | 0,1 | 0,3 | 517,2792 |
| | Blechträgerbrücke bei Kilometer 20 + 410m, südwestliches Widerlager, ☐ auf einem Gesimsstein des nordwestlichen Flügels; 0,06m unter Pl. | | | | | | | | |
| | 2 | 17 | 77 | 2618 | — 1,3211 | 0,6 | 0,3 | 0,3 | 515,9581 |
| | ☐ auf der Trittstufe vor dem Eingang zum Wartsaal III. Klasse in Abbach, linke vordere Ecke; 0,87m über Pl. | | | | | | | | |
| | 3 | 10 | 70 | 1404 | — 5,0897 | 0,4 | 0,2 | 0,4 | 510,8684 |
| | Höhenmarke ⊙ am Betriebsgebäude der Station Abbach, Perronseite, östliche Ecke | | | | | | | | |
| | 4 | 1 | | | — 1,7038 | | | | 509,1646 |
| | Blechträgerbrücke bei Kilometer 17 + 280m, südliches Widerlager, ☐ auf einem Gesimsstein des westlichen Flügels; 0,12m über Pl | | | | | | | | |
| | 1 | 11 | 78 | 1720 | + 0,9231 | 0,7 | 0,4 | 0,5 | 511,7915 |
| | ☐ auf der unteren Treppenstufe vor dem Eingang zum Wartsaal in der Haltestelle Gundelshausen; 0,76m über Pl. | | | | | | | | |
| | 2 | 14 | 76 | 2129 | — 1,5333 | 0,6 | 0,3 | 0,4 | 510,2582 |
| | Höhenmarke ⊙ am Haltstellgebäude zu Gundelshausen, Perronseite, zwischen dem Fenster und der Thüre des Wartsaals | | | | | | | | |
| | 3 | 1 | | | — 1,6763 | | | | 508,5819 |
| | Gewölbte Bahnbrücke für einen Waldweg bei Kilometer 13 + 635m, westliche Stirn, ☐ auf dem Abdeckstein des südlichen Flügels; 0,82m unter Pl. | | | | | | | | |
| | 1 | 10 | 75 | 1504 | + 4,9203 | 0,4 | 0,2 | 0,3 | 515,1785 |

## Offingen-Donauwörth-Ingolstadt-Regensburg.

| Nr | A | J | Z | D | ± H | w | w² | w′ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | □ im Granitsockel der Läutebude bei Bahnwärterposten Nr 4 und Kilometer 11 + 372ᵐ; 0,35ᵐ über Pl. | | | | | | | | |
| | 2 | 14 | 81 | 2256 | + 3,9994 | 0,5 | 0,2 | 0,3 | 519,1779 |
| | □ im Sockel der Läutebude bei Bahnwärterposten Nr 3 und Kilom. 9 + 395ᵐ; 0,20ᵐ über Pl. | | | | | | | | |
| | 3 | 19 | 52 | 1970 | + 2,4006 | 0,5 | 0,3 | 0,4 | 521,5785 |
| | Gedeckter Bahndurchlass bei Kilometer 7 + 645ᵐ; □ auf einem Gesimsstein der westlichen Stirn; 0,81ᵐ unter Pl. | | | | | | | | |
| | 4 | 12 | 73 | 1743 | — 3,4457 | 0,8 | 0,6 | 0,6 | 518,1328 |
| | Höhenmarke ⊙ am Betriebsgebäude der Station Sinzing, Perronseite, nordwestliche Ecke; 2,36ᵐ über Pl. | | | | | | | | |
| | 5 | 9 | 80 | 1445 | — 5,3409 | 0,5 | 0,2 | 0,4 | 512,7919 |
| | Eiserne Donaubrücke bei Sinzing, rechtseitiges Widerlager, □ auf der südöstlichen Gesimsplatte innerhalb der Brüstung bei Kilometer 5 + 150ᵐ; 0,30ᵐ über Pl. | | | | | | | | |
| | 1 | 8 | 75 | 1205 | + 2,5899 | 0,4 | 0,2 | 0,4 | 515,3818 |
| 1163. | Höhenmarke ⊙ am Betriebsgebäude der Station Prüfening, Perronseite, neben dem Eingang zur Expedition; 2,46ᵐ über Pl. (vgl. Mittlg. III, S. 27) | | | | | | | | |
| | 2 | 11 | 72 | 1581 | — 3,8267 | 0,5 | 0,2 | 0,4 | 511,5551 |
| | | | | | | | | 1873: | 511,5497 |
| XXI. | Höhenmarke ⊙ an der Kumpfmühler Wegbrücke für die Staatsstrasse von Regensburg nach Kehlheim in Regensburg, in der gewölbten Durchfahrt für die Zufuhrstrasse zur Güterhalle, Mitte der Stadtseite (vgl. Mittlg. V, S. 39) | | | | | | | | |
| | 1 | 19 | 75 | 2864 | + 7,9512 | 0,8 | 0,6 | 0,4 | 519,5063 |
| | | | | | | | | 1877: | 519,5105 |
| | □ auf einer Abdeckplatte der rechtseitigen Ufermauer unter der eisernen Donaubrücke in Regensburg | | | | | | | | |
| | 1 | 14 | 69 | 1927 | + 11,6593 | 0,6 | 0,3 | 0,4 | 531,1656 |

## Offingen-Donauwörth-Ingolstadt-Regensburg.

| Nr | A | J | Z | D | ±H | w | w² | w′ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Nullpunkte der Donaupegel in Regensburg berechnet nach den Ablesungen an den sichtbaren Teilen derselben | | | | | | | | |
| | a) Nullpunkt des in den rechtseitigen Thorpfeiler gehauenen korrespondierenden Meterpegels, vor dem kleinen Thor „am Wiedfang“ (am rechten Donauufer) | | | | | | | | |
| | | | | | + 13,6185 | | | | 533,1248 |
| | b) Nullpunkt des korrespondierenden Holzpegels am städtischen Leihhaus, unterhalb der steinernen Brücke (am rechten Donauufer) | | | | | | | | |
| | | | | | + 13,9134 | | | | 533,4197 |
| | c) Nullpunkt des in die Ufermauer eingehauenen Meterpegels am linkseitigen Donauufer, dicht unterhalb der eisernen Strassenbrücke nach Unterwöhr | | | | | | | | |
| | | | | | + 14,2514 | | | | 533,7577 |
| 1106. | Höhenmarke ⊙ am Bahnhofgebäude in Regensburg, aus ⊙ 1163 in Prüfening und dem 1873 gemessenen Höhenunterschied zwischen ⊙ 1106 und ⊙ 1163 berechnet | | | | | | | | |
| | | | | 3771 | + 8,6046 | | | | 520,1597 |
| | | | | | | | | 1872: | 520,1540 |

## III. Die Arbeiten im Frühjahr 1890.

Um alle im rechtsrheinischen Bayern noch beabsichtigten Nivellierungen in der gegenwärtigen VIII. Mitteilung vereinigen zu können, liessen wir in der Zeit vom 28. März bis 4. April ds. Jhrs. noch die Höhen der Wasserspiegel einiger grösseren oberbayerischen Gebirgsseen, sowie die Nullpunkte mehrerer Flusspegel, welche bisher noch nicht eingemessen worden waren, durch doppelte Nivellements bestimmen.

Es sind zu diesem Zweck durch unsern Assistenten K. Oertel folgende Nivellements ausgeführt worden:

1. Wilzhofen-Diessen-Ammersee,
2. Schaftlach-Gmund-Tegernsee,
3. Endorf-Simssee,
4. Traunstein-Wagingersee,
5. Inn- und Mangfallpegel in Rosenheim,
6. Traunpegel in Traunstein.

Die Zahlenergebnisse dieser Nivellements finden sich im nachfolgenden Fixpunktsverzeichnis IV.

# IV.

## Fixpunkt-Verzeichnis

für die im Frühjahr 1890 ausgeführten Doppel-Nivellements:

1. **Wilzhofen-Diessen-Ammersee,**
2. **Schaftlach-Gmund-Tegernsee,**
3. **Endorf-Simssee,**
4. **Traunstein-Waginger-See,**
5. **Pegelnullpunkte in Rosenheim und Traunstein.**

## I. Wilzhofen-Ammersee.

| Nr | A | J | Z | D | ± H | w | $w^2$ | $w'$ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

1504. Gewölbte Bahnbrücke mit 3 Oeffnungen über den Grünbach bei Wilzhofen, ☐ auf der östlichen Brüstung in der Mitte, bei Kilometer $48 + 390^m$; $0{,}25^m$ über Pl. (vgl. Mittlg. V, S. 55)

| Nr | A | J | Z | D | ± H | w | $w^2$ | $w'$ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | 273,9881 |

Strassendurchlass Lit. a 45 an der Staatsstrasse von Weilheim nach Augsburg, nördliches Widerlager, ☐ auf der Deckplatte am Auslauf; $0{,}66^m$ unter Strassenplanie

| Nr | A | J | Z | D | ± H | w | $w^2$ | $w'$ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | | | | + 2,0867 | | | | 276,0748 |

═ auf dem Abweisstein an der untern Stirn der Strassenbrücke am obern Eingang des Dorfes Pähl, beim rechtseitigen Widerlager; horizontal abgearbeitete Fläche des pyramidenförmigen Kopfes

| Nr | A | J | Z | D | ± H | w | $w^2$ | $w'$ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | | | | + 12,2787 | | | | 288,3535 |

☐ auf der mittleren Treppenstufe vor der Kapelle im Dorfe Fischen, nördliche Ecke

| Nr | A | J | Z | D | ± H | w | $w^2$ | $w'$ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | | | | + 25,1901 | | | | 313,5436 |

☐ auf der obersten Stufenplatte des öffentlichen Brunnens vor dem Rathhaus im Markte Diessen

| Nr | A | J | Z | D | ± H | w | $w^2$ | $w'$ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 4 | | | | + 3,3311 | | | | 316,8747 |

Höhe des hölzernen Landungssteges für das Dampfschiff in Diessen, am äussersten Ende (Oberkante des Bretterbeleges)

| Nr | A | J | Z | D | ± H | w | $w^2$ | $w'$ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 5 | | | | + 9,63 | | | | 326,50 |

Mittlerer Wasserspiegel des Ammersees am 28. und 29. März 1890

| Nr | A | J | Z | D | ± H | w | $w^2$ | $w'$ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 6 | | | | + 1,79 | | | | 328,29 |

## 2. Schaftlach-Gmund-Tegernsee.

| Nr | A | J | Z | D | ±H | w | w² | w′ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1474. | ⊙ am Betriebsgebäude in Schaftlach, Perronseite, nördliche Ecke (vgl. Mittlg. V, S. 52) | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | 101,6193 |
| 1473 | □ auf dem Sockel der Signal-Glockensäule am nordwestlichen Ende des Bahnhofes Schaftlach, nördliche Ecke (ist beim Bahnhofumbau versetzt worden, wodurch die 1878 gefundene Kote sich änderte) | | | | | | | | |
| | 1 | | | | + 2,2490 | | | | 103,8683 |
| | Offne Bahnbrücke 125$^{m}$ oberhalb der Haltestelle Moosrain, linkseitiges Widerlager, □ auf dem nordöstlichen Stirnflügel | | | | | | | | |
| | 2 | | | | + 0,1735 | | | | 104,0418 |
| | Hölzerne Strassenbrücke Lit. b 49 über die Mangfall im Dorfe Gmund, linkseitiges Widerlager, □ auf der Abdeckplatte am untern Flügel | | | | | | | | |
| | 3 | | | | +27,1597 | | | | 131,2015 |
| | Freitreppe vor der Westfront des herzoglichen Schlosses in Tegernsee südlich der Kirche, □ auf dem rechtseitigen Wangenstein des südlichen Treppenflügels | | | | | | | | |
| | 4 | | | | + 0,7672 | | | | 131,9687 |
| | Höhenmarke ⊙ an der Schlosskirche zu Tegernsee, Südecke der Westfront | | | | | | | | |
| | 5 | | | | — 2,2390 | | | | 129,7297 |
| | Nullpunkt des Meterpegels an der Schiffhütte unterhalb H.-Nr 49 | | | | | | | | |
| | 6 | | | | + 6,69 | | | | 136,42 |
| | Mittlerer Wasserspiegel des Tegernsees am 31. März 1890 (0,09$^{m}$ über M. W.) | | | | | | | | |
| | 7 | | | | — 0,47 | | | | 135,95 |

### 3. Endorf-Simssee.

| Nr | A | J | Z | D | ±H | w | w² | w′ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 821. | Gewölbte Bahndurchfahrt bei Kilometer 77 + 390m und Bahnwärterposten Nr 37 bei Endorf, ═ auf der nordwestlichen Brüstung; 0,47m über Pl. (vgl. II. Mittlg. S. 37) | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | 370,8358 |
| | ═ auf dem Abweisstein an der südwestlichen Ecke des Wohngebäudes in der Grottenmühle | | | | | | | | |
| | 1 | | | | + 17,9176 | | | | 388,7534 |
| | Mittlerer Wasserspiegel des Simssees unterhalb der Grottenmühle am 1. April 1890, Abends 6h | | | | | | | | |
| | 2 | | | | + 2,81 | | | | 391,56 |

### 4. Traunstein-Waginger-See.

| Nr | A | J | Z | D | ±H | w | w² | w′ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 845. | Gewölbte Bahnbrücke und Durchfahrt mit 5 Oeffnungen über die Traun in Traunstein, ⌂ (Cementplatte) am südwestlichen Widerlager (vgl. II. Mittlg. S. 39) | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | 265,1139 |
| 846. | Bahngrenzstein nördlich der Bahn, oberhalb des Weilers Hufschlag (hat sich seit 1871 um 0,011m gesenkt) | | | | | | | | |
| | 1 | | | | — 12,0805 | | | | 253,0334 |
| | ═ auf dem 5. Kilometerstein an der Distriktsstrasse von Traunstein nach Waging | | | | | | | | |
| | 2 | | | | + 3,6925 | | | | 256,7259 |
| | Gewölbter Strassendurchlass Lit. b 9 an der Wegabzweigung nach Otting, ☐ auf dem östlichen Brüstungsstein der nördlichen Stirn | | | | | | | | |
| | 3 | | | | + 104,7734 | | | | 361,4993 |

## Traunstein-Waginger-See.

| Nr | A | J | Z | D | ±H | w | w² | w' | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ☐ auf der linkseitigen Treppenwange der Freitreppe vor dem Schulhause zu Waging | | | | | | | | |
| | 4 | | | | + 35,1162 | | | | 396,6155 |
| | Höhenmarke ⊙ am Schulhaus im Markte Waging, linkseitige Lisene am Eingang | | | | | | | | |
| | 5 | | | | — 1,8440 | | | | 394,7715 |
| | Dielenoberkante des hölzernen Landungssteges an der Ueberfuhr von Waging nach Tettenhausen | | | | | | | | |
| | 6 | | | | + 22,39 | | | | 419,00 |
| | Mittlerer Wasserspiegel des Waginger Sees am 2. April 1890, Abends $7^h$. | | | | | | | | |
| | 7 | | | | + 0,37 | | | | 419,37 |

## 5. Pegelnullpunkte in Rosenheim und Traunstein.

| Nr | A | J | Z | D | ±H | w | w² | w' | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 817. | Gewölbte Bahnbrücke mit 7 Oeffnungen über den Inn bei Rosenheim, ☐ am nordöstlichen Widerlager (vgl. II. Mittlg., S. 36) | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | 409,0410 |
| | Nullpunkt des korrespondierenden Pegels unter der eisernen Strassenbrücke über den Inn bei Rosenheim, am linkseitigen Widerlager | | | | | | | | |
| | 1 | | | | + 11,2181 | | | | 420,2591 |
| | Nullpunkt des Flusspegels im Inn, unter derselben Brücke | | | | | | | | |
| | 2 | | | | + 11,2149 | | | | 420,2559 |
| | Nullpunkt des Flusspegels in der Mangfall, oberhalb der Strassenbrücke über dieselbe in Rosenheim, rechtseitiges Ufer | | | | | | | | |
| | 3 | | | | + 10,2777 | | | | 419,3187 |

## Pegelnullpunkte in Rosenheim und Traunstein.

| Nr | A | J | Z | D | ±H | w | w² | w′ | Kote |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Nullpunkt des korrespondierenden Pegels am rechtseitigen Widerlager derselben Brücke | | | | | | | | |
| | 4 | | | | +10,2837 | | | | 419,3247 |
| 846. | Bahngrenzstein nördlich der Bahn bei Traunstein, oberhalb des Weilers Hufschlag (vgl. S. 442) | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | 253,0334 |
| | Nullpunkt des korrespondierenden Pegels am linkseitigen steinernen Widerlager der hölzernen Strassenbrücke über die Traun, gegenüber dem städtischen Krankenhause in Traunstein | | | | | | | | |
| | | | | | +33,0121 | | | | 286,0455 |
| | Nullpunkt des eigentlichen Flusspegels unter der nämlichen Brücke, am ersten linkseitigen Brückenpfeiler | | | | | | | | |
| | | | | | +33,0018 | | | | 286,0352 |

# Nachtrag zu den Mitteilungen II und III

über die

# Ergebnisse

aus

# Beobachtungen der terrestrischen Refraktion

von

**Carl Max von Bauernfeind.**

---



# Nachtrag zu den Mitteilungen II und III

über die

# Ergebnisse
# aus Beobachtungen der terrestrischen Refraktion

von

**Carl Max von Bauernfeind.**

Nach meinen in den Astronomischen Nachrichten der Jahre 1864 (Nr. 1478—1480) und 1866 (Nr. 1587—1590) veröffentlichten Abhandlungen über „die atmosphärische Strahlenbrechung auf Grund einer neuen Aufstellung über die physikalische Konstitution der Atmosphäre“ wächst der Krümmungshalbmesser der Lichtkurve stetig von unten nach oben, und er wird an der oberen Atmosphärengrenze oder da, wo das Lichtbrechungsvermögen des Dunstkreises aufhört, unendlich gross, was anzeigt, dass von dort ab die Lichtkurve in eine Gerade übergeht, die sich bis zu den Sternen erstreckt. Hieraus folgt nicht blos eine Abnahme des Strahlenbrechungskoeffizienten mit der Höhe, sondern auch eine Verschiedenheit der Teilrefraktionen $\Delta z$ und $\Delta z'$ an den Enden eines die Atmosphäre ganz oder teilweise durchdringenden Lichtstrahls, wobei, wenn $\Delta z$ die Refraktion für den unteren und $\Delta z'$ jene für den oberen Endpunkt bezeichnet, stets $\Delta z > \Delta z'$ ist.

Die Richtigkeit dieses letzteren theoretischen Ergebnisses an der Hand der Erfahrung nachzuweisen, nachdem das erstere durch die trigonometrischen Höhenbestimmungen der Russischen Vermessungskammer im Kaukasus längst bestätigt war (vergl. Astron. Nachr. Bd. 67, Nr. 1590, Seite 87 und 88), bildete die wesentlichste Aufgabe der Refraktionsbeobachtungen, welche ich zwischen den Jahren 1877 und 1885 auf Kosten der Baye-

rischen Kommission für die Europäische Gradmessung (nunmehrige „Internationale Erdmessung“) zuerst im Fichtelgebirge zwischen den Punkten Döbra und Kapellenberg und dann in den Vorbergen der Bayerischen Alpen auf den Punkten Höhensteig ($H$) bei Rosenheim, Irschenberg ($I$) bei Miesbach und Kampenwand ($K$) bei Hohenaschau mit Hilfe tüchtiger Assistenten, die vorher meine Schüler waren, durchführte und worüber ich in den Jahren 1880, 1883, 1888 in drei den Denkschriften der K. Bayerischen Akademie der Wissenschaften einverleibten und auch durch Sonderabdrücke verbreiteten Abhandlungen, „Mitteilungen“ benannt, berichtete.

Bei einer so ausgedehnten Unternehmung, die nicht weniger als neun wissenschaftlich gebildete Mitarbeiter und drei praktisch geschulte Gehilfen forderte, ist es trotz aller Geschicklichkeit und Gewissenhaftigkeit derselben nicht ausgeschlossen, dass hie und da Messungsfehler gemacht werden, die der Leiter des Unternehmens bei genauester Prüfung der Beobachtungshefte nicht entdecken kann, wie z. B. wenn bei der nivellitischen Bestimmung des Höhenunterschiedes zweier Stationen einmal Rück- und Vorblick verkehrt aufgeschrieben oder auch, ohne dass der aufschreibende Gehilfe es bemerkte, in umgekehrter Reihenfolge abgelesen worden, oder wenn die Zahl der ganzen Meter um eine Einheit falsch bestimmt wird u. s. w. Einige solche Fehler kamen leider bei dem im Jahre 1881 von zwei tüchtigen Assistenten ausgeführten Präzisionsnivellement zwischen Höhensteig und Kampenwand ($H$—$K$) vor, wie sich im Jahre 1889 durch die von dem gegenwärtigen Assistenten unserer Erdmessungskommission vorgenommene dritte Bestimmung des bezeichneten Höhenunterschiedes zuverlässig herausstellte. Nach dem Berichte des Assistenten Oertel war von Höhensteig bis zum Fixpunkte Nr. 1629 bei Hohenaschau Alles in Ordnung; von da ab, wo auf dem Reitwege zur Kampenhöhe nivelliert worden war, stellten sich alsbald einige erhebliche Abweichungen ein. Zunächst war nämlich im Jahre 1881 der Höhenunterschied zwischen den Punkten Nr. 1629 und Nr. 1634 infolge unrichtiger Aufschreibung eines eben neu aufgenommenen Schreibgehilfen um etwa 2,7 m zu klein und der Unterschied zwischen den Punkten Nr. 1634 und Nr. 1635 um ebensoviel zu gross gefunden worden, wodurch sich also die Kote des Punktes Nr. 1635 als richtig darstellte. In der nächsten Abteilung steckte nach dem auf ihr zuerst

vorgenommenen Flugnivellement ein Fehler von nahezu 1,5 m. Nachdem eine Wiederholung des Flugnivellements an diesem Ergebnisse nichts änderte und auch der Höhenunterschied der folgenden Abteilung in Ordnung war, wurde ein genaues Nivellement der Strecke von Nr. 1635 bis Nr. 1636 ausgeführt, welches in der That den Höhenunterschied ihrer Endpunkte um 1,4344 m grösser ergab, als im Jahre 1881. Die Weiterführung des Flugnivellements ergab die Richtigkeit aller Koten bis auf die des letzten, mit Nr. 1642 bezeichneten Zwischenpunktes.

Dieser war an Einem Felsblock zweimal durch horizontale, regelmässig behauene und durch Quadrate begrenzte Flächen bezeichnet, welche letzteren aber mehr als zwei Dezimeter vertikalen Abstand hatten. Bezeichnen wir den unteren dieser zwei Punkte, welcher im Jahre 1881 bestimmt worden ist, mit Nr. 1642 und den oberen, im Jahre 1882 von einem anderen Assistenten bei der Einmessung der Oberfläche des auf der Kampenhöhe stehenden Pfeilers benützten Fixpunkt mit Nr. 1642[a], so entstand bei Bestimmung der Kote des Beobachtungspunktes auf der Kampenwand, welcher die Nr. 1643 führt, durch Verwechselung der Punkte 1642 und 1642[a] ein neuer Fehler von + 0,2020 m, so dass nunmehr die Gesamtänderung des im Jahre 1881 bestimmten Höhenunterschiedes $HK$ betrug:

$$\varDelta H = 1{,}4344 + 0{,}2020 = 1{,}6364 \text{ m}$$

wofür man auch 1,636 m schreiben kann, wenn man die Koten nur auf drei Dezimalstellen angeben will, wie ich dieses kürzlich bei Besprechung des vorliegenden Falles in der 7. Auflage meiner „Elemente der Vermessungskunde“ (Band II, Seite 454) gethan habe.

Dieser Fehler, der selbstverständlich für die von $K$ abwärts gezählten Vertikalabstände (Tiefen) mit dem negativen Vorzeichen versehen, also

$$\varDelta H = -1{,}4344 - 0{,}2020 = -1{,}6364 \text{ m}$$

geschrieben werden muss, hätte allerdings von vorneherein durch zwei ganz von einander unabhängige Nivellements vermieden werden können; dass es nicht geschah, lag lediglich in finanziellen Erwägungen, die ich jetzt um so mehr zu bedauern habe, als sich schliesslich die Bayerische Erdmessungskommission doch entschliessen musste, für das dritte Nivellement so viel aufzuwenden, dass die Gesamtkosten der dreifachen

Nivellierung denen zweier ganz gesonderten Präzisionsnivellements gleich kamen.

Auf Grund der nun einmal bestehenden Thatsache muss ich hier leider über einige Verbesserungen der in meinen Mitteilungen II und III enthaltenen Messungs-Ergebnisse und der aus ihnen gezogenen Schlussfolgerungen berichten. So schwer mir dieses der geehrten Leser dieses Nachtrages wegen fällt, so gereicht es mir doch andrerseits zu grosser Befriedigung, dass durch die notwendig gewordene Aenderung einiger früherer Angaben die Uebereinstimmung zwischen meiner Theorie der terrestrischen Strahlenbrechung und den faktischen Refraktionswerten sich wesentlich erhöht. und zwar in dem Sinne, wie ich dieses schon in der dritten Mitteilung vom Jahre 1888 auf Seite 21 (Abhandlungen der math.-phys. Klasse, Bd. XVI, Seite 537) bei Besprechung des hypothetischen Falles, dass der Höhenunterschied $HK$ um 2 m grösser wäre, als er 1881 gefunden wurde. im Voraus angedeutet habe. Hätte ich doch damals die Vollendung meiner Abhandlung bis nach der Ausführung des dritten Nivellements verschoben!

Verfolgt man nun den Einfluss des in der Gesamthöhe $HK$ bestehenden Fehlers von 1,6364 m schrittweise, so ergeben sich zunächst nachstehende Aenderungen:

1. Die richtigen Meereshöhen der Instrumentenaxen betrugen im Jahre 1881:

für Höhensteig ($H$) unverändert: 484,000 m
„ Irschenberg ($I$) unverändert: 753,626 „
„ Kampenwand ($K$) verbessert: 1565,968 „

Die Höhenunterschiede der Instrumentenaxen waren mithin damals:

für $HI$ unverändert: $x_1 = 269{,}626$ m; $\log x_1 = 2{,}4307618$
„ $HK$ verbessert: $x_2 = 1081{,}968$ „ ; $\log x_2 = 3{,}0342144$
„ $IK$ verbessert: $x_3 = 812{,}342$ „ ; $\log x_3 = 2{,}9097389$

2. Die wahren Zenitdistanzen in den einzelnen Vertikalschnitten (II, Seite 10) berechneten sich mit Rücksicht auf den Fehler 1,6364 m wie folgt:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| In $H - I$ war $Z =$ | $89^{0}$ | $10'$ | $52''$ | ,69 |
| $I - H$ | 90 | 58 | 23 | ,93 |
| $H - K$ | 87 | 3 | 46 | ,91 |
| $K - H$ | 93 | 7 | 13 | ,89 |
| $I - K$ | 88 | 47 | 8 | ,74 |
| $K - I$ | 91 | 31 | 10 | ,34 |

Als Mittelwerte der beobachteten Refraktionen (II, Seite 35 und 36) ergeben sich aus diesen verbesserten Zenitdistanzen nunmehr folgende:

a) zwischen $H$ und $K$, und zwar

in $H$: $76'',7 - 16'',7 = 60'',0$

in $K$: $35\ ,0 + 16\ ,7 = 51\ ,7$

im Mittel beobachtet: $55\ ,9$

b) zwischen $I$ und $K$, und zwar

in $I$: $95'',8 - 10'',0 = 85'',8$

in $K$: $71\ ,4 + 10\ ,0 = 81\ ,4$

im Mittel beobachtet: $83\ ,6$

Ein Blick auf die Ergebnisse in den einzelnen Stationen zeigt sofort, dass nunmehr die Mittel der beobachteten Refraktionen für die obere und untere Station erheblich besser übereinstimmen als früher, und dass, den Anforderungen der Theorie entsprechend, auch jetzt noch die auf den unteren Stationen beobachteten Refraktionen etwas grösser sind, als die auf den oberen.

3. Die aus den Ablesungen an den meteorologischen Instrumenten nach der Formel

$$r = v\varphi\left\{1 - 2y + \left(2 + \frac{p}{3}y^2\right) - \ldots\ldots\right\}$$

theoretisch berechneten Refraktionen werden durch den Fehler der geometrischen Höhenmessung nicht beeinflusst; es bleibt nach wie vor in Uebereinstimmung mit Mitteilung III (Seite 6, bezw. 522) das Mittel derselben:

a) für $H - K = 55'',8$ und b) für $I - K = 90'',8$

so dass also durch den mehrfach genannten Fehler in der Höhenmessung die bemerkenswert gute Uebereinstimmung zwischen beobachteter und

berechneter Refraktion, besonders für die Seite $H-K$ nicht gestört wird. Da übrigens bei gegenseitigen, zum Zwecke von Refraktionsbestimmungen angestellten Zenitdistanzmessungen, wie leicht ersichtlich, der Einfluss eines nicht zu grossen Fehlers im Höhenunterschied der beiden Beobachtungsorte sich in den beiden Punkten stets in gleicher Grösse, aber im entgegengesetzten Sinne geltend macht. so können die mittleren Ergebnisse gegenseitiger Beobachtungen von solchen Fehlern überhaupt nicht beeinflusst werden.

4. Die eben erwähnte gute Uebereinstimmung zwischen den beobachteten und den berechneten Refraktionen geht, wie früher, zum Teil wieder verloren, wenn die ersteren wegen der in den drei Stationen stattfindenden Lotabweichungen und Fernrohrbiegungen verbessert werden. Die Beträge der in den sechs Vertikalschnitten dem Normalpunkt der Bayerischen Landesvermessung gegenüber stattfindenden Lotabweichungen sind bereits in der III. Mitteilung (Seite 9, bezw. S. 525) nach der damaligen vorläufigen Reduktion der einschlägigen astronomischen Beobachtungen zusammengestellt. Die inzwischen erfolgte Schlussreduktion dieser Beobachtungen ergab nachstehende endgiltige, gegen früher etwas veränderte Werte:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| für $H$ | in der Richtung | $H-I$ | den Wert | $\lambda = +0'',89$ |
| „ | „ „ | $H-K$ | „ „ | $\lambda = -5\;\;,08$ |
| „ $I$ | „ „ | $I-H$ | „ „ | $\lambda = +5\;\;,74$ |
| „ | „ „ | $I-K$ | „ „ | $\lambda = +1\;\;,82$ |
| „ $K$ | „ „ | $K-I$ | „ „ | $\lambda = +4\;\;,27$ |
| „ | „ „ | $K-H$ | „ „ | $\lambda = +8\;\;,74$ |

Die Biegung des Fernrohrs für die im Jahre 1885 zwischen $H$ und $K$ angestellten Refraktionsbeobachtungen bleibt unverändert und es beträgt somit für diese Beobachtungen die Gesamtverbesserung der beobachteten Refraktionen

$$\text{in } H\text{: } +5'',08 - 5'',15 = -\;\;0'',07$$
$$\text{in } K\text{: } -8\;\;,74 - 4\;\;,21 = -12\;\;,95$$

In der III. Mitteilung sind zunächst noch die auf Seite 14 (bezw. Seite 530) angegebenen wahren (ellipsoidischen) Zenitdistanzen für die

Refraktionsbeobachtungen vom Jahre 1885 zu berichtigen. Es ist nämlich für

$H - K$ (Heliotrop) $Z_0 = 87^0\ 3'\ 46'',91 + 12'',41 = 87^0\ 3'\ 59'',32$
$H - K$ (Signaltafel) $Z_0 = 87\ \ 3\ \ 46\ ,91 - \ \ 7\ ,26 = 87\ \ 3\ \ 39\ ,65$
$K - H$ (Heliotrop) $Z_0 = 93\ \ 7\ \ 13\ ,89 + \ \ 9\ ,28 = 93\ \ 7\ \ 23\ ,17$

Demgemäss müssen auch die Mittel der beobachteten Refraktionen (III, Seite 17, bezw. Seite 533) um $\pm 16'',7$ verbessert werden, so dass man als Mittel der beobachteten Refraktionen erhält

in $H$ (nach $K$): $69'',0 - 16'',7 = 52'',3$
in $K$ (nach $H$): $36\ ,6 + 16\ ,7 = 53\ ,3$

Die Mittel der berechneten Refraktionen mit $55'',3$ und bezw. $56'',0$ bleiben auch hier unverändert, und es ist auch hier die Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung sofort ersichtlich.

5. Nach den vorstehend mitgeteilten Zahlen wird nunmehr die Summe der Verbesserungen der im Jahre 1885 gemessenen Zenitdistanzen wegen Biegung des Fernrohrs und wegen Lotabweichung für $H - K$ $= + 0'',07$ (früher $+ 2'',92$) und für $K - H = + 12'',95$ (früher $+ 11'',60$). Die aus diesen Summen entspringenden Verbesserungen der trigonometrisch bestimmten Höhe betragen somit jetzt für $H - K$: $- 0{,}007$ m und für $K - H$: $- 1.285$ m. Hiezu kommt nunmehr die weitere Verbesserung wegen des Fehlers in der geometrischen Höhenmessung mit 1,636 m, welche für die Differenzen

nivellierte minus trigonometrisch bestimmte Höhe

das Vorzeichen $+$ erhält für die Messungen in $H$ und $-$ für jene in $K$.

Berechnet man für die im Jahre 1885 in $H$ und $K$ angestellten Refraktionsbeobachtungen die Mittel der sämtlichen aus denselben erhaltenen Differenzen der trigonometrisch bestimmten Höhen gegen die nivellierte (aus Mitteilung III, Tafeln 1 A und 2 A, Seite 46 und 49, bezw. Seite 562 und 565), so folgt für den Vertikalschnitt

$H - K$: $\Delta x' = - 0{,}046$ m und für $K - H$: $\Delta x' = + 2{,}595$ m.

Diese Mittel an den obenstehenden Verbesserungen angebracht, geben nunmehr die verbesserten Mittel

| | für $H — K$: | für $K — H$: |
|---|---|---|
| Mittel aller $\varDelta x'$ = | — 0,046 m | + 2,595 m |
| Nivellierfehler = | + 1,636 m | — 1,636 m |
| $(\varDelta x)$ = | + 1,590 m | + 0,959 m |
| Korrektion für Lotablenkung u. Biegung | + 0,007 m | + 1,285 m |
| $\varDelta x$ = | + 1,597 m | + 2,244 m |

Wir haben nunmehr die auffallende Erscheinung, dass die verbesserten Höhendifferenzen $\varDelta x$ (welche bekanntlich, wenn der Höhenunterschied von unten nach oben positiv genommen wird, für $H — K$ „nivellierte minus trigonometrisch bestimmte Höhe“, für $K — H$ dagegen umgekehrt „trigonometrisch bestimmte minus nivellierte Höhe“ bedeuten) für die beiden Stationen von gleichem Vorzeichen und nahezu gleicher Grösse sich ergeben. Es ist also der verbesserte Höhenunterschied ($h$), wie er auf trigonometrischem Wege bestimmt wurde, auf der unteren Station um fast denselben Betrag kleiner, um den er auf der oberen Station grösser ist, als der nivellierte Höhenunterschied ($H$), d. h. es ist unten $+\varDelta x = +H - h$ und oben $+\varDelta x = -H - (-h) = +h - H$. Um diese Erscheinung zu erklären, kommt man zunächst auf die Vermutung, dass der nivellierte Höhenunterschied $H$ beider Stationen einer weiteren Verbesserung bedürfe, welche davon herrühren könnte, dass das Geoid in der Richtung $H — K$ sich über das Ellipsoid um einen merkbaren Betrag erhebt (was ja an sich höchst wahrscheinlich ist), um den also der nivellierte Höhenunterschied gegen den der ellipsoidischen Oberfläche entsprechenden trigonometrisch bestimmten falsch erhalten wird. Aber eine hiedurch bedingte Verbesserung des nivellierten Höhenunterschieds $H$ würde ebenso, wie eine aus irgendwelchen anderen Gründen notwendige, die Differenzen $\varDelta x$ nicht gleichzeitig zu Null machen, es würde vielmehr, wie man sich leicht überzeugt, die eine grösser und die andere kleiner werden. Dagegen würde $\varDelta x$ in beiden Fällen gleich Null sein, wenn die auf beiden Stationen gemessenen Zenitdistanzen um etwa 20″ kleiner wären. Nachdem aber nunmehr die gemessenen Zenitdistanzen von den Fehlern, welche durch die Lotablenkung und die Fernrohrbiegung hervorgerufen wurden, befreit sind, könnten weitere Fehler dieser Zenitdistanzen, besonders in dem angegebenen Betrag, nur

dadurch veranlasst worden sein, dass während der Dauer der Messungen die Konstitution der Atmosphäre infolge der Bodenstrahlung nicht so beschaffen war, wie sie jede Refraktionstheorie voraussetzen muss, dass nämlich in beiden Fällen die untersten Luftschichten nicht die dichtesten waren. Der Einfluss eines solchen abnormen Luftzustandes ist aber bereits in der II. Mitteilung (Seite 42 ff.) besprochen worden. Auffallend bleibt aber die Uebereinstimmung der Messungsergebnisse von 1885 mit denen von 1881, welche unter diesen Gesichtspunkten nur durch die nicht gerade wahrscheinliche Annahme erklärt werden kann, dass der abnorme Zustand der Luft während der zeitlich so sehr auseinanderliegenden Beobachtungsperioden fast ganz derselbe gewesen sei. Allerdings ist zu bemerken, dass diese Perioden beide Male in die gleiche Jahreszeit fielen, nämlich 1880 in den August, 1885 in $H$ in den Juli, in $K$ in den August.

6. Schliesslich mag es gestattet sein, zu bemerken, dass sich der Fehler von 1,6364 m auch in den Höhenunterschieden zwischen den Stationen $H$, $K$ und $I$, $K$ geltend macht, welche aus den im Jahre 1881 gleichzeitig mit den Zenitdistanzmessungen auf den Punkten $H$, $I$, $K$ angestellten Barometerbeobachtungen berechnet worden sind. Obwohl diese Höhenunterschiede nicht in den oben genannten „Mitteilungen“ enthalten sind, sondern in einer gesonderten von mir verfassten und in den Denkschriften unserer Akademie (Band XIV, 3. Abteilung Seite 113 u. ff.) gedruckten Abhandlung „Neue Beobachtungen über die tägliche Periode barometrisch bestimmter Höhen“, so habe ich es doch unterlassen zu dürfen geglaubt, hievon in der Ueberschrift gegenwärtigen Nachtrages etwas zu sagen. Das Mittel der in der eben genannten Schrift aufgeführten 340 Beobachtungen (gleichzeitigen Ablesungen am Barometer, Thermometer und Psychrometer) betrug damals

zwischen $H$ und $K$: $+ 1,85$ m und
„ $K$ und $I$: $+ 3,47$ m.

Bringt man an beiden die Verbesserung wegen der Höhenmessungsfehler mit — 1,64 m an, so wird nunmehr das Mittel des barometrisch bestimmten Höhenunterschiedes

zwischen $H$ und $K$: $+ 0,21$ m und
„ $K$ und $I$: $+ 1,83$ m.

Es stimmen also auch hier die neuen Mittel besser mit einander überein als früher, und es mag hierin ein weiterer Beweis für die Richtigkeit meiner Aufstellungen und Entwicklungen über die Konstitution der Atmosphäre, die Ursache der täglichen Perioden barometrisch und trigonometrisch bestimmter Höhen, sowie über die Theorie der astronomischen und der terrestrischen Strahlenbrechung gefunden werden.

Ueber

# Zusammenstösse und Theilungen planetarischer Massen

von

**H. Seeliger.**



Täglich erleben wir das Schauspiel des Zusammenstosses kosmischer Massen mit unserer Erde. Wir werden hierdurch nothwendigerweise zu der Erkenntniss geführt, dass der interplanetarische Raum keineswegs leer ist, vielmehr eine nicht unbeträchtliche Zahl kleiner Massen enthält, die wir als planetarische bezeichnen können, da sie in der Hauptsache nur der Attraction der Sonne folgend sich nach den Kepler'schen Gesetzen um diese bewegen müssen. Infolge dieser Beobachtungsthatsachen, denen man allerdings erst seit verhältnissmässig kurzer Zeit erhöhte Aufmerksamkeit schenkt, bietet sich von selbst die Aufgabe dar, die Einwirkung solcher fortwährenden Zusammenstösse eines Planeten mit kleinen kosmischen Massen auf die Bewegung des ersteren zu untersuchen. Diese Aufgabe soll im Folgenden nach einigen Richtungen hin, welche einiges Interesse darzubieten scheinen, behandelt werden.

In mechanischem Sinne ist die Explosion planetarischer Massen d. h. die Theilung infolge innerer Kräfte als das Umgekehrte einer Vereinigung zu betrachten, so dass sich bei der Besprechung des genannten Problemes von selbst Bemerkungen über die Reactionskräfte, die bei solchen Theilungen ausgelöst werden, darbieten. Hierher gehören nach dem heutigen Stande unserer Kenntnisse in fast unzweifelhafter Weise die Ausströmungserscheinungen bei den Cometen und von ihnen wird also auch im Folgenden kurz die Rede sein.

Der Uebersicht wird es förderlich sein, wenn ich mit wenigen Worten den Inhalt der folgenden Artikel angebe.

Art. 1. Die Grundgleichungen für die Bewegung eines Körpers, der von einem continuirlichen Strome planetarisch bewegter Massenpuncte getroffen wird.

Art. 2. Einige im Wesentlichen bereits bekannte Sätze über die relative Bewegung eines Meteorschwarmes gegen die Erde.

Art. 3. Berechnung der Geschwindigkeitsveränderung eines Planeten infolge des Zusammentreffens mit einem Meteorschwarm.

Art. 4. Verfolgung der Hypothese, dass Meteore aus allen Gegenden des Sonnensystems mit gleicher Wahrscheinlichkeit dem Planeten begegnen.

Art. 5. Berechnung der im Vorhergehenden auftretenden Integralausdrücke.

Art. 6. Ableitung der säcularen Aenderungen der Bahnelemente eines in einer Kreisbahn um die Sonne laufenden Planeten. Anwendung auf die Bewegung der Erde und des Mondes, wobei sich die Gelegenheit darbietet, auf eine von Oppolzer gegebene Erklärung des bekannten empirischen Coefficienten der Acceleration der mittleren Mondbewegung zurückzukommen.

Art. 7. Anwendung auf die Cometen. Die in Art. 4 entwickelten Formeln führen auf eine Widerstandsbewegung, bei welcher die störende Kraft proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit des Cometen ist, so dass hierdurch die bekannten Anomalien des Encke'schen Cometen in formeller Beziehung eine Erklärung finden können.

Art. 8. Die Ausströmungserscheinungen der Cometen können, wie Bessel gezeigt hat, sehr bedeutende Anomalien in der Bewegung dieser Himmelskörper hervorrufen. Sie können aber nicht, wie vielfach behauptet worden ist, ohne neue und zweifelhafte Hypothesen einzuführen, in ihrer Wirkung mit derjenigen eines widerstehenden Mittels identificirt werden. Auch die in neuerer Zeit wiederholt beobachteten Theilungen cometarischer Massen haben wahrscheinlich nichts mit explosiven Erscheinungen zu thun.

1.

Im Folgenden soll stets nur der Fall in Betracht gezogen werden, in welchem zwei bewegte Massen zusammenstossen und nach dem Zusammentreffen mit einander verbunden bleiben. Analog hierzu ist bei der Theilung anzunehmen, dass diese plötzlich vor sich geht und eine

Trennung dauernd bestehen bleibt. Da von selbst klar ist, dass die zweite Erscheinung denselben mechanischen Gesetzen folgt, wie die erste, so soll vorläufig der Fall des Zusammenstosses allein behandelt werden.

Für diesen aber gilt unter allen Bedingungen das Prinzip von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunctes und hieraus allein müssen sich alle anderen Folgerungen ergeben.

Haben die Schwerpuncte der beiden Massen $m_0$ und $\mu$ im Augenblicke unmittelbar vor dem Zusammenstosse die Geschwindigkeitscomponenten

$$\frac{dx_0}{dt},\ \frac{dy_0}{dt},\ \frac{dz_0}{dt}\ \text{bezw.}\ \frac{d\xi}{dt},\ \frac{d\eta}{dt},\ \frac{d\zeta}{dt}$$

und sind

$$\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}$$

die Geschwindigkeitscomponenten des Schwerpunctes der vereinigten Massen unmittelbar nach ihrer Vereinigung, so ist

$$\left.\begin{aligned}(m_0+\mu)\frac{dx}{dt} &= m_0\frac{dx_0}{dt}+\mu\frac{d\xi}{dt}\\ (m_0+\mu)\frac{dy}{dt} &= m_0\frac{dy_0}{dt}+\mu\frac{d\eta}{dt}\\ (m_0+\mu)\frac{dz}{dt} &= m_0\frac{dz_0}{dt}+\mu\frac{d\zeta}{dt}\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Wenn ferner ein System beliebiger Massenpuncte $m_0$ in beliebiger Bewegung begriffen mit dem Massenpuncte $\mu$ zusammenstösst, so wird der Werth des Ausdruckes

$$\Sigma m_0\left(x_0\frac{dy_0}{dt}-y_0\frac{dx_0}{dt}\right)+\mu\left(\xi\frac{d\eta}{dt}-\eta\frac{d\xi}{dt}\right)$$

und die anologen Ausdrücke für die beiden anderen Coordinaten durch den Zusammenstoss nicht geändert, wie sich augenblicklich aus (1) ergiebt.

Die Rotationsverhältnisse eines Körpers, welche unmittelbar vor dem Zusammenstosse durch die Grössen

$$\Sigma m_0\left(x_0\frac{dy_0}{dt}-y_0\frac{dx_0}{dt}\right)\ \text{etc.}$$

gegeben waren, sind nach dem Zusammenstosse mit dem Massenpuncte $\mu$ gegeben durch

$$\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\Sigma m_0\left(x_0\frac{dy_0}{dt}-y_0\frac{dx_0}{dt}\right)+\mu\left(\xi\frac{d\eta}{dt}-\eta\frac{d\xi}{dt}\right) \quad (2)$$

wo dann $\Sigma m = \Sigma m_0 + \mu$ ist.

Es soll zunächst (1) anders geschrieben werden. Bezeichnet man:

$$\Delta\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{dx}{dt}-\frac{dx_0}{dt}$$

$$m = m_0 + \mu$$

und analog für die andern Coordinaten, so hat man

$$\Delta\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{\mu}{m}\left(\frac{d\xi}{dt}-\frac{dx_0}{dt}\right)$$

$$\Delta\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{\mu}{m}\left(\frac{d\eta}{dt}-\frac{dy_0}{dt}\right)$$

$$\Delta\left(\frac{dz}{dt}\right)=\frac{\mu}{m}\left(\frac{d\zeta}{dt}-\frac{dz_0}{dt}\right)$$

woraus sich ergibt, dass nur die relative Geschwindigkeit gegen den Schwerpunkt des Körpers vor dem Zusammenstoss eine Rolle spielt. Wenn nun ein Planet ($m$) in einen Strom discreter Massenpuncte, d. h. also in ein System planetarisch bewegter kleiner Massen, eintritt, so werden eine gewisse Zeit lang in continuirlicher Folge Zusammenstösse und eine Vermehrung der vorläufig als punctförmig zu betrachtenden Planetenmasse $m$ stattfinden. Sieht man weiter, was stets erlaubt sein wird, von der Anziehung ab, welche Sonne und Planet durch die kleine Masse erfahren, so wird man das in (1) benutzte Coordinatensystem in die Sonne legen dürfen, weil nur die relative Bewegung der auffallenden Massentheilchen gegen den Planeten in Frage kommt. Bezeichnet dann $\mu$ die Masse, welche in der Zeiteinheit auf den Planeten fällt und beachtet man, dass für eine sehr kleine Zeit $dt$ das Zeichen $\Delta$ in das Differentialzeichen $d$ übergeht, so kann man die Gesammtbeschleunigung, welche der Planet in der Richtung einer Coordinate z. B. der $x$-Coordinate erfährt, leicht berechnen. Diese besteht in jedem Zeitmoment aus zwei Theilen. Zunächst bewirkt die Anziehung der Sonne in üblicher Bezeichnung die Beschleunigung

$$-\frac{k^2(1+m)}{r^3}x$$

Ausserdem aber wird durch den Zusammenstoss nach den obigen Formeln die Beschleunigung erzeugt:

$$\frac{\mu}{m}\left(\frac{d\xi}{dt}-\frac{dx_0}{dt}\right)$$

Es ergeben sich so, wenn man noch in erlaubter Weise $\frac{dx_0}{dt}$ mit $\frac{dx}{dt}$ etc. vertauscht, die Differentialgleichungen der Bewegung:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}+k^2(1+m)\frac{x}{r^3}&=\frac{\mu}{m}\left(\frac{d\xi}{dt}-\frac{dx}{dt}\right)\\\frac{d^2y}{dt^2}+k^2(1+m)\frac{y}{r^3}&=\frac{\mu}{m}\left(\frac{d\eta}{dt}-\frac{dy}{dt}\right)\\\frac{d^2z}{dt^2}+k^2(1+m)\frac{z}{r^3}&=\frac{\mu}{m}\left(\frac{d\zeta}{dt}-\frac{dz}{dt}\right)\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

Die Masse $m$ ist natürlich auch mit der Zeit veränderlich, indem

$$\left.\begin{aligned}m&=m_0+\varDelta m\\\varDelta m&=\int_{t_0}^{t}\mu\,dt\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

ist. Man kann die durch (3) definirte Bewegung auch als ein Störungsproblem auffassen. Dann bereitet die Integration, etwa durch die Methode der Variation der Contanten, keine besonderen Schwierigkeiten. Als Störungscomponenten treten hier auf:

$$\left.\begin{aligned}X&=-k^2\varDelta m\frac{x}{r^3}+\frac{\mu}{m}\left(\frac{d\xi}{dt}-\frac{dx}{dt}\right)\\Y&=-k^2\varDelta m\frac{y}{r^3}+\frac{\mu}{m}\left(\frac{d\eta}{dt}-\frac{dy}{dt}\right)\\Z&=-k^2\varDelta m\frac{z}{r^3}+\frac{\mu}{m}\left(\frac{d\zeta}{dt}-\frac{dz}{dt}\right)\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

Man könnte noch zweifelhaft sein, ob die Anwesenheit einer Atmosphäre diese Gleichungen nicht wesentlich insofern ändern könnte, als man für $\frac{d\xi}{dt}$ nicht die kosmische, sondern die durch den Luftwiderstand fast vollkommen vernichtete Geschwindigkeit, mit welcher thatsächlich der Zusammen-

stoss mit dem festen Planeten erfolgt, zu nehmen hätte. Hält man aber fest, dass auch die äussersten Lufttheilchen noch zu dem System, das wir Planet nannten, gehört, so sieht man sofort, dass der Schwerpunct dieses Systemes sich nach den Gleichungen (1) bewegen muss, wo also $\frac{d\xi}{dt}$ die Geschwindigkeit ist, welche die auffallende Masse beim Eintreten in diese äussersten Luftschichten besitzt. Man hat also bei etwaigen genaueren Rechnungen darauf zu achten, dass man den Radius des übrigens im folgenden stets als kugelförmig betrachteten Planeten angemessen zu vergrössern hat.

Die Ermittlung des Störungscomponenten ist nun sehr einfach, wenn die Geschwindigkeitscomponenten $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$ gegeben sind. Diese beziehen sich aber auf einen mit planetarischer Geschwindigkeit um die Sonne bewegten Massenpunct, sie sind also abhängig von der Anziehung der Sonne sowohl als auch des Planeten. Vernachlässigt man die letztere, so sind die gesuchten relativen Geschwindigkeitscomponenten in der einfachsten Weise bekannt. Von vornherein erscheint aber eine solche Vernachlässigung als durchaus nicht statthaft, weil im Gegentheile die relative Geschwindigkeit zweier zusammenstossender planetarischer Massen bekanntlich sehr nahe so berechnet werden kann, als ob die Sonne gar nicht und nur der anziehende Planet vorhanden wäre.[1]) Jedenfalls ist eine nähere Untersuchung dieses Zusammenhanges nothwendig. Ehe dies geschieht, soll noch die Gleichung (2) umgeformt werden. Dieselbe bezieht sich auf ein festes Coordinatensystem. Führt man nun aber relative Coordinaten ein und zwar in Bezug auf den Schwerpunct des Körpers mit der Masse $m_0$ vor dem Zusammenstoss, dessen Coordinaten $\Xi_0\, Y_0\, Z_0$ seien und in Bezug auf den Schwerpunct des ganzen Körpers nach dem Zusammenstoss mit der Masse $m$ und den Coordinaten $\Xi\, Y Z$, indem man setzt

$$
\begin{aligned}
x &= \Xi + x' & M &= \Sigma m \\
x_0 &= \Xi_0 + x_0' & M_0 &= \Sigma m_0 \\
\xi &= \Xi_0 + \xi' & M &= M_0 + \mu
\end{aligned}
$$

1) Vergl. Laplace mécanique céleste, livre IX, Chap. II.

so kann man (2) auf eine sehr einfache Form bringen. Bezeichnet man zu diesem Zwecke der Einfachheit wegen allgemein:

$$a \frac{db}{dt} - b \frac{da}{dt} = [a\, b]$$

so geben zunächst die Definitionsgleichungen für den Schwerpunct:

$$\Sigma m\, [x'\, y'\,] = \Sigma m\, [x\, y\,] - M\, [\Xi\, Y\,]$$
$$\Sigma m_0 [x_0'\, y_0'] = \Sigma m_0 [x_0\, y_0] - M_0 [\Xi_0\, Y_0]$$

Nach (2) haben wir also:

$$\Sigma m [x'\, y'] - \Sigma m_0 [x_0'\, y_0'] = \mu [\xi\, \eta] - M [\Xi\, Y] + M_0 [\Xi_0\, Y_0]$$

Nach leichten Zwischenrechnungen findet man aber für die rechte Seite

$$\mu \frac{M_0}{M} \cdot [\xi'\, \eta']$$

Wir haben demnach:

$$\Sigma m \left( x' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dx'}{dt} \right) - \Sigma m_0 \left( x_0' \frac{dy_0'}{dt} - y_0' \frac{dx_0'}{dt} \right) = \mu \frac{M_0}{M} \left( \xi' \frac{d\eta'}{dt} - \eta' \frac{d\xi'}{dt} \right)$$

Das erste Glied enthält die Coordinaten in Bezug auf den neuen Schwerpunct der Gesammtmasse, das zweite in Bezug auf den Schwerpunct des Körpers vor dem Zusammenstoss, während rechts die Coordinaten des auffallenden Massentheilchens $\mu$ in Bezug auf den ursprünglichen Schwerpunct des Körpers vorkommen.

Von einer weiteren Untersuchung des Einflusses auf die Rotation auf Grund der letzten Gleichung soll abgesehen werden, weil eine Aufforderung hierzu durch die Beobachtungen bisher nicht erfolgt ist. Indessen ist es äusserst leicht auf Grund der bekannten Theorie der Rotation der Planeten, die Veränderung der Rotationsaxe im Raume und im Planetenkörper abzuleiten. Diese Veränderungen werden aber voraussichtlich stets minimal sein, da die kosmischen Massen sehr klein sind und nahezu in symmetrischer Vertheilung auf den Planetenkörper auffallen.

## 2.

Die Bewegung der kleinen Massen gegen einen Planeten kommt mit der geocentrischen Bewegung eines Meteors überein, welche von

Schiaparelli[1]) und Hoek[2]) näher untersucht worden ist. Einige dieser Sätze bilden den Ausgangspunct der folgenden Betrachtungen und sollen hier erwähnt werden.

Wir wollen gleich annehmen, dass ein Meteor, dessen Bewegung untersucht werden soll, zu einem Meteorschwarm gehört. Da die einzelnen Theile eines solchen keine nennenswerthen Anziehungen aufeinander ausüben, diejenigen Theile aber, welche auf die Erde fallen, räumlich von einander nicht sehr getrennt sind, so werde angenommen, dass dieselben sich in parallelen Richtungen bewegen, ehe sie in die Attractionssphäre der Erde gelangen. Die heliocentrische Bewegung der Meteore darf als eine sehr rasche angenommen werden. Man kann deshalb nach Laplace die an sich sehr verwickelte Bewegung eines solchen Körpers näherungsweise so behandeln, dass man die beiden Grenzfälle, wo nämlich nur die Anziehung der Sonne oder nur die Anziehung der Erde diese Bewegung bestimmt, sprungweise in einem passend gewählten Zeitmomente an einander grenzen lässt und die geringen Bahnveränderungen, welche in der kurzen Uebergangszeit vor sich gehen, wo die Anziehung der Sonne und Erde von gleichem Range sind, vernachlässigt. Es wird dies bei der geringen Genauigkeit, die hier gefordert wird, unzweifelhaft gestattet sein. Dann wird jedes Meteor mit einer leicht bestimmbaren Anfangsgeschwindigkeit $v_0$ relativ zur Erde in deren Anziehungssphäre dringen und um den Erdmittelpunct als Brennpunct eine Hyperbel beschreiben. Die Geschwindigkeit an der Erdoberfläche, die als eine Kugel mit dem Radius $R$ angenommen werde, sei $v$, ferner $a$ und $e$ halbe grosse Axe (also in diesem Falle eine negative Zahl) und Excentricität der Bahnhyperbel. Setzt man noch der Kürze wegen die Erdmasse = 1, so ist

$$v^2 = v_0^2 + \frac{2k^2}{R}; \quad v_0^2 = -\frac{k^2}{a}; \quad \frac{2a}{R} = \frac{v_0^2 - v^2}{v_0^2} \tag{1}$$

Nimmt man die Richtung der Asymptote der Hyperbel und zwar derjenigen, welche die Bewegungsrichtung des Meteors vor dem Zusammenstosse mit der Erde angiebt, zur $X$-Axe eines Coordinatensystemes, dessen

1) Entwurf einer astron. Theorie der Sternschnuppen. Stettin 1871.

2) Monthly notices 1868.

Anfang im Erdmittelpunkt liegt, während die $Y$-Axe in der Ebene der Bahn so angenommen wird, dass das Meteor von ihrer positiven Seite herkommt, so ist in dem Flächensatze

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = k\sqrt{a(1-e^2)}$$

in sehr grosser Entfernung von der Erde zu setzen

$$\frac{dy}{dt} = 0; \quad \frac{dx}{dt} = -v_0$$

also

$$y v_0 = k\sqrt{a(1-e^2)}$$

Bezeichnet weiter $\alpha$ den Winkel, den die Asymptote mit der grossen Axe der Hyperbel bildet, so ist $\cos\alpha = \frac{1}{e}$, woraus folgt

$$y = -a \operatorname{tg} \alpha$$

$a$ ist für alle Bahnen desselben Schwarmes constant. Als Grenzfälle sind folgende zu betrachten: 1) wenn das Meteor central zur Erde fällt, entsprechend den Werthen $e = 1$ und $y = o$. 2) wenn die betreffende Bahnhyperbel die Erde berührt. In diesem Falle ist $a(1-e) = R$ und demzufolge, wie leicht zu sehen:

$$y = y_1 = R\frac{v}{v_0}$$

Diese beiden Hyperbeln schliessen alle Sternschnuppen ein, welche auf die Erde fallen. Bezeichnet man demnach mit $A_0$ die Anzahl der Sternschnuppen, welche auf die Erde fielen, wenn die Erdanziehung vernachlässigt würde, alle Bahnen also gradlinig wären und mit $A$ die Anzahl der thatsächlich mit der Erde zusammentreffenden, so ist

$$\frac{A}{A_0} = \left(\frac{y_1}{R}\right)^2 = \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \qquad (2)$$

Die Richtung des Radiationspunctes bei Vernachlässigung der Erdanziehung wird gegeben durch die Richtung der Asymptote der Bahnhyperbel, während die Tangente an diese in jenem Puncte, wo sie die Erdkugel schneidet, den beobachteten Radiationspunct angiebt. Bezeichnet $\zeta$ und $z$ die Zenithdistanz des ersten bezw. zweiten Radianten, ferner $\gamma$

den Winkel, den die genannte Tangente mit der grossen Axe der zugehörigen Hyperbel bildet, so ergeben sich leicht folgende Formeln:

$$e \cos \gamma = \cos z; \quad \zeta - z = \gamma - \alpha$$

Hieraus findet man mit Hülfe des Flächensatzes

$$\left.\begin{aligned} R v \sin z &= - a v_0 \operatorname{tg} \alpha \\ \sin \gamma &= \sin \alpha \frac{v^2 + v_0^2}{2 v v_0} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

und weiter die Formel für die sogenannte Zenithattraction $\zeta - z$:

$$\operatorname{tg} \frac{\zeta - z}{2} = \frac{v - v_0}{v + v_0} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} z$$

Es soll nun der Einfluss der Erdanziehung auf die Häufigkeit der Sternschnuppen für einen bestimmten Beobachtungsort abgeleitet werden. Nennt man $D$ die Anzahl Meteore, welche in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit einer auf der oben festgelegten $X$-Axe senkrechten Ebene hindurchgiengen, falls keine Erdanziehung vorhanden wäre, so wäre die Anzahl $N_0$ der Meteore, welche durch einen unendlich schmalen Kreisring vom Radius $y$ unter denselben Bedingungen hindurchgiengen:

$$N_0 = 2 \pi D y \, d y$$

Dieselbe Anzahl fällt in derselben Zeit infolge der Erdanziehung auf eine unendlich schmale Kugelzone der Erde, welche von zwei unendlich nahen kleinen Kreisen begrenzt wird, deren Pol die Richtung der Asymptote ist und deren Winkel-Distanzen von diesem $\zeta$ und $\zeta + d\zeta$ sind. Bezeichnet also $\delta$ die Dichtigkeit des wirklichen Sternschnuppenfalles, d. h. die Anzahl der Meteore, welche in der Zeiteinheit auf die Flächeneinheit der Erde fallen, so ist auch

$$N_0 = 2 \pi \delta R^2 \sin \zeta \, d \zeta$$

und infolge dessen:

$$\frac{\delta}{D} = \frac{y \, d y}{R^2 \sin \zeta \, d \zeta}$$

Nun ist aber $\zeta = z + \gamma - \alpha$ und nach der Formel für die Zenithattraction $\frac{d(\gamma - \alpha)}{dz} = \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\sin z}$, ferner nach dem Flächensatze $R v \sin z = y v_0$.

Hieraus folgt

$$\frac{d\zeta}{dy} = \left\{1 + \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\sin z}\right\} \frac{v_0}{Rv\cos z}$$

woraus sich sofort ergiebt

$$\frac{\delta}{D} = \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \cdot \frac{\sin^2 z \cos z}{2\sin\zeta \sin\frac{\zeta}{2}\cos(z - \frac{1}{2}\zeta)} \tag{4}$$

Die Formeln (3) und (4), letztere in weniger einfacher Gestalt, sind bereits von Schiaparelli a. a. O. abgeleitet worden.

3.

Wir können jetzt die Zunahme der Geschwindigkeitscomponenten eines Planeten, wofür wir im Folgenden die Erde nehmen werden, durch den Zusammenstoss mit einem Meteorschwarm leicht berechnen. Wegen der Symmetrie, welche um die gemeinschaftliche Richtung der Asymptoten aller Bahnhyperbeln stattfindet, wird eine Zunahme nur in dieser Richtung stattfinden. Wir haben nach Art. 1 die Summe $\Sigma m\frac{dx}{dt}$ zu bilden, wo $m$ die auf einen Punct der Erde in der Zeiteinheit auffallende Masse und $\frac{dx}{dt}$ die Geschwindigkeitscomponente derselben in der Richtung der Asymptote ist. Nennt man nun $D$ die Masse, welche in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit einer auf der Asymptote senkrechten Ebene in sehr grosser Entfernung von der Erde hindurchgeht, so ist die Masse, welche auf die oben betrachtete sehr schmale Kugelzone fällt

$$2\pi D y\, dy$$

Bezeichnet noch $\mu$ den Winkel, den diejenige Tangente an die Bahnhyperbel, welche die Erde in einem Puncte jener Zone schneidet, mit der Asymptote bildet, so hat man

$$\Sigma m\frac{dx}{dt} = A = \Sigma 2\pi D y v \cos\mu \cdot dy$$

Die Summe $\Sigma$ kommt einer Integration in Bezug auf $y$ zwischen

den Grenzen $y = 0$ und $y = y_1 = R\frac{v}{v_0}$ gleich. Da man nun weiter hat $\mu = \gamma - \alpha$, so ist:

$$A = 2\pi D v \int_0^{y_1} \cos(\gamma - \alpha) \cdot y\, dy$$

Aus den Formeln (3) des vorigen Art. folgt aber, wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\lambda = \frac{v^2 + v_0^2}{2 v v_0} \tag{1}$$

und berücksichtigt, dass:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{y}{a}$$

$$\sin \gamma = -\frac{\lambda \cdot \frac{y}{a}}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{a^2}}}$$

$$\cos \gamma = \sqrt{1 - \frac{\lambda^2 y^2}{a^2 + y^2}}$$

für $A$ die Formel:

$$A = 2\pi D v \int_0^{y_1} y\, dy \left\{ \lambda \frac{y^2}{a^2 + y^2} + \frac{a^2}{a^2 + y^2} \sqrt{1 - \frac{y^2}{y_1^2}} \right\}$$

Diese Integration kann man nach den gewöhnlichen Regeln ausführen. Es ist am vortheilhaftesten in der Endformel nur $\lambda$ beizubehalten. Dann ergiebt sich nach leicht durchführbarer Rechnung:

$$A = 2\pi D R^2 v \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \left\{ \lambda(\lambda^2 - 1) \log \frac{\lambda + 1}{\lambda} + 1 - \lambda^2 + \frac{\lambda}{2} \right\}$$

Setzt man demnach

$$f = 2\lambda(\lambda^2 - 1) \log \operatorname{nat} \frac{\lambda + 1}{\lambda} + 2 - 2\lambda^2 + \lambda \tag{2}$$

so hat man einfach

$$A = \pi R^2 D v \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 f$$

Aus der Definition der Grösse $D$ folgt, dass:

$$\pi R^2 D$$

die Meteormasse ist, welche bei Vernachlässigung der Erdanziehung in der Zeiteinheit auf die Erde fiele. Wegen (2) des Art. (2) ist also die in der Zeiteinheit auf die Erde fallende Masse $\mu$:

$$\mu = \pi R^2 D \left(\frac{v}{v_0}\right)^2; \text{ also: } A = \mu f v \tag{3}$$

Man kann noch bemerken, dass $D$ selbstverständlich von der Geschwindigkeit $v_0$ abhängt und mit dieser wächst. Um also vergleichbare Resultate zu haben, muss man bedenken, dass

$$D = D_0 v_0$$

ist, wo $D_0$ die räumliche Dichtigkeit des Schwarmes ist d. h. die Masse in der Raumheit.

Die negative Richtung der Asymptote ist aber das, was man den scheinbaren (von Zenithattraction natürlich befreiten) Radiationspunct nennt. Bezieht man die in Art. 1 vorkommenden Coordinaten auf das System der Längen und Breiten und bezeichnet man Länge und Breite des scheinbaren Radiationspunctes mit $\lambda'$ und $\beta'$, so werden die Art. (1) vorkommenden Grössen jetzt so dargestellt werden:

$$\left.\begin{aligned}
(1) &= \frac{\mu}{m}\left(\frac{d\xi}{dt} - \frac{dx}{dt}\right) = -\pi \frac{R^2 D_0}{m} \cdot \frac{v^3}{v_0} f \cos\beta' \cos\lambda' \\
(2) &= \frac{\mu}{m}\left(\frac{d\eta}{dt} - \frac{dy}{dt}\right) = -\pi \frac{R^2 D_0}{m} \cdot \frac{v^3}{v_0} f \cos\beta' \sin\lambda' \\
(3) &= \frac{\mu}{m}\left(\frac{d\zeta}{dt} - \frac{dz}{dt}\right) = -\pi \frac{R^2 D_0}{m} \cdot \frac{v^3}{v_0} f \sin\beta'
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Hierdurch ist Alles gegeben, um den Einfluss des Zusammentreffens mit einem Meteorschwarm auf die Bewegung eines Planeten berechnen können.

Was die Grösse $\lambda$ betrifft, so ist Folgendes zu bemerken: $v$ ist stets grösser als $v_0$. Als mögliche Grenzfälle treten auf $\frac{v}{v_0} = 1$ und $\frac{v}{v_0} = \infty$.

Im ersten Falle ist $\lambda = 1$, im zweiten $\lambda = \infty$, während $f$ die Werthe 1 bezw. 0 annimmt, so dass also $f$ und $\frac{1}{\lambda}$ positive echte Brüche sind. Bei den kleineren Planeten ist indessen $f$ stets sehr nahe gleich 1. So z. B. ist selbst in dem ungünstigsten Falle, wo nämlich die Sternschnuppen gleiche

Bewegungsrichtung mit der Erde haben, bei Voraussetzung parabolischer heliocentrischer Bewegung $f = 0.99$. Die parabolische Geschwindigkeit der Sternschnuppen ist freilich vorderhand nur eine Hypothese, aber eine solche, welche im grossen und ganzen den mittleren Verhältnissen bei den Meteoren Rechnung trägt. Es ist übrigens klar, dass eine Vergrösserung von $v_0$ den Werth von $f$ nur noch mehr der Einheit nähert. Jedenfalls soll im Folgenden direct $f = 1$ gesetzt werden, weil dies in den Fällen der Anwendung vollkommen genügt. Den oben erwähnten und benutzten Zusammenhang schreiben wir schliesslich, um Alles beisammen zu haben, noch etwas anders. Bezeichnet $g$ die Intensität der Schwere an der Oberfläche der Erde, so hat man:

$$\left.\begin{aligned} G &= 2gR \\ v^2 &= v_0^2 + G \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

4.

In den der Sonne näheren Theilen des Planetensystemes bewegen sich sehr viele grössere und kleinere Meteorschwärme. Gegenwärtig kennt man bereits mehrere Tausend solcher Ströme, welche die Erdbahn kreuzen. Ob das Beobachtungsmaterial aber ausreicht, um nähere Angaben, wie die Radianten und die Zahl der auffallenden Meteore mit der Länge der Erde in ihrer Bahn variiren, machen zu können, ist ohne genauere Untersuchungen nicht festzustellen. In Ermangelung solcher soll nun die möglichst einfache Hypothese betrachtet werden, die freilich vielleicht der Wahrheit nicht sehr nahe entsprechen wird, selbst wenn man von einigen sehr mächtigen Strömen, so den Leoniden und Perseiden, absieht, nämlich, dass die heliocentrischen Radianten gleichmässig am Himmel vertheilt sind, mit andern Worten, dass Sternschnuppen aus allen Gegenden mit gleicher Wahrscheinlichkeit herkommen, wenn von der Anziehung und Bewegung der Erde abgesehen wird. Ob man sich hierdurch dem wahren Zustand nähern wird, der durch den Einfluss der schwächeren Radianten erzeugt wird, muss also dahingestellt bleiben, wenngleich dies gegenwärtig als wahrscheinlich gelten darf.

Wie schon erwähnt, soll stets $f = 1$ angenommen werden. Ferner nehmen wir an, was die Allgemeinheit in keiner Weise beeinträchtigt,

dass der Planet (Erde), dessen Bewegung untersucht wird, sich in der Ecliptik bewege. Sind dann $w$, $\beta$, $\lambda$, ungestörte heliocentrische Geschwindigkeit des Meteores, Breite und Länge des wahren Radiationspunctes, $V$ und $L$ Geschwindigkeit und Länge des Apex der Planetenbewegung, während alle früheren Bezeichnungen bestehen bleiben, so hat man:

$$w \cos\beta \cos\lambda = v_0 \cos\beta' \cos\lambda' - V \cos L$$

$$w \cos\beta \sin\lambda = v_0 \cos\beta' \sin\lambda' - V \sin L$$

$$w \sin\beta = v_0 \sin\beta'$$

Hierbei ist darauf geachtet, dass der Radiationspunct die Gegend des Himmels angiebt, woher die Bewegung erfolgt, der Apex dagegen anzeigt, wohin sich der Planet bewegt. Aus den angeführten Gleichungen ergiebt sich:

$$v_0^2 = w^2 + V^2 + 2\,w\,V \cos\beta \cos(\lambda - L)$$

$$v^2 = v_0^2 + G$$

Die Gleichungen (4) des vorigen Artikels werden jetzt:

$$(1) = -\pi \frac{R^2 D_0}{m} (w \cos\beta \cos\lambda + V \cos L)\, W$$

$$(2) = -\pi \frac{R^2 D_0}{m} (w \cos\beta \sin\lambda + V \sin L)\, W$$

$$(3) = -\pi \frac{R^2 D_0}{m} w \sin\beta \cdot W$$

worin

$$W = \frac{[w^2 + V^2 + G + 2\,w\,V \cos\beta \cos(\lambda - L)]^{\frac{3}{2}}}{w^2 + V^2 + 2\,w\,V \cos\beta \cos(\lambda - L)}$$

Es handelt sich nun um die Auffindung der Mittelwerthe von (1), (2) und (3), wenn die wahren Radianten gleichmässig am Himmel vertheilt sind. Diese erhält man, wenn man mit dem Flächenelemente $\cos\beta\, d\beta\, d\lambda$ multiplicirt, darauf in Bezug auf die ganze Kugeloberfläche integrirt und das Resultat durch $4\pi$ dividirt.

Setzt man also

$$4\pi A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2\beta\, d\beta \int_0^{2\pi} W \cos\lambda\, d\lambda$$

$$4\pi B = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2\beta\, d\beta \int_0^{2\pi} W \sin\lambda\, d\lambda$$

$$4\pi C = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\beta\, d\beta \int_0^{2\pi} W\, d\lambda$$

so wird

$$(1) = -\frac{R^2\pi D_0}{m}(w A + V C \cos L)$$

$$(2) = -\frac{R^2\pi D_0}{m}(w B + V C \sin L)$$

$$(3) = 0$$

Man sieht also, was übrigens von vornherein klar war, dass die Bahnebene des Planeten nicht geändert wird. Führt man $\lambda - L = x$ ein, so kann man die obigen 3 Integrale auf 2 zurückführen, nämlich auf

$$\left.\begin{aligned} (\mathrm{I}) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\beta\, d\beta \int_0^{\pi} W \cos x\, dx \\ C &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\beta\, d\beta \int_0^{\pi} W\, dx \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Denn es ist, wie sofort zu sehen

$$A\cos L + B\sin L = (\mathrm{I})$$
$$A\sin L - B\cos L = 0$$

d. h.

$$A = (\mathrm{I})\cos L; \qquad B = (\mathrm{I})\sin L$$

$W$ hat hier selbstverständlich die Bedeutung:

$$W = \frac{(w^2 + V^2 + G + 2\,w\,V\cos\beta\cos x)^{\frac{3}{2}}}{w^2 + V^2 + 2\,w\,V\cos\beta\cos x}$$

Man hat also jetzt

$$\left.\begin{aligned}(1) &= -\frac{R^2\,\pi\,D_0}{m}\Big\{w\,(\mathrm{I}) + V\,C\Big\}\cos L \\ (2) &= -\frac{R^2\,\pi\,D_0}{m}\Big\{w\,(\mathrm{I}) + V\,C\Big\}\sin L\end{aligned}\right| \qquad (2)$$

Diese Störungscomponenten drücken aber eine einfache Widerstandsbewegung aus, denn die störende Kraft wirkt allein in der Richtung der Tangente der Bahn.

5.

Die Doppelintegrale (I) und $C$ lassen sich stets in endlicher Form angeben. Es ist das auf den ersten Blick etwas merkwürdig, weil die Integrale in Bezug auf $x$ elliptische sind. Diese Reduction beruht auf der allgemeineren Bemerkung, dass man das die allgemeine Function $f$ enthaltende Integral

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx \int_0^{\pi} f(\cos x \cos y)\,dy$$

sofort auf ein einfaches Integral zurückführen kann, wenn man $f$ innerhalb der Integrationsgrenzen in eine Potenzreihe entwickeln darf. Wird nämlich für $f(z)$ die Form

$$f(z) = A_0 + A_1\,z + A_2\,z^2 + \ldots.$$

vorausgesetzt und bezeichnet man

$$\frac{\pi}{2}\,U_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1.3.5.2n-1}{2.4.6\ldots 2n}$$

$$U_{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\,dx = \frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots.2n-1}\cdot\frac{1}{2n+1}$$

so wird

$$\int_0^\pi f(\cos x \cos y)\, dy = \pi \{ A_0 + A_2 U_2 \cos^2 x + A_4 U_4 \cos^4 x + \ldots\ldots. \}$$

und demzufolge

$$J = \pi \{ A_0 + A_2 U_2 U_3 + A_4 U_4 U_5 + \ldots. \}$$

Nun ist aber

$$U_{2n} U_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$$

und hieraus folgt

$$J = \pi \{ A_0 + \tfrac{1}{3} A_2 + \tfrac{1}{5} A_4 + \ldots. \}$$

Den Ausdruck rechts kann man aber sehr leicht summiren. Es ergiebt sich sofort:

$$J = \frac{\pi}{2} \cdot \int_{-1}^{+1} f(z)\, dz$$

Auf ein Integral von der Form $J$ lassen sich nun (I) und $C$ sofort zurückführen. Setzt man nämlich zur Abkürzung

$$b = \frac{2wV}{w^2 + V^2 + G}; \quad \beta = \frac{2wV}{w^2 + V^2} \tag{1}$$

so ist

$$(\mathrm{I}) = \frac{1}{\pi} \frac{(w^2 + V^2 + G^2)^{\frac{3}{2}}}{w^2 + V^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx \int_0^\pi \cos y \frac{(1 + b \cos x \cos y)^{\frac{3}{2}}}{1 + \beta \cos x \cos y} dy$$

$$C = \frac{1}{\pi} \frac{(w^2 + V^2 + G^2)^{\frac{3}{2}}}{w^2 + V^2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx \int_0^\pi \frac{(1 + b \cos x \cos y)^{\frac{3}{2}}}{1 + \beta \cos x \cos y} dy$$

Nach dem obigen Integralsatz ist also:

$$\left.\begin{aligned} 2\,(\mathrm{I}) \frac{w^2 + V^2}{(w^2 + V^2 + G)^{\frac{3}{2}}} &= \int_{-1}^{+1} z \frac{(1 + bz)^{\frac{3}{2}}}{1 + \beta z} dz = K \\ 2\,C \frac{w^2 + V^2}{(w^2 + V^2 + G)^{\frac{3}{2}}} &= \int_{-1}^{+1} \frac{(1 + bz)^{\frac{3}{2}}}{1 + \beta z} dz = J \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Zunächst hat man sofort

$$J + \beta K = \frac{2}{5b} \cdot \left[(1+b)^{\frac{5}{2}} - (1-b)^{\frac{5}{2}}\right] \tag{3}$$

Das Integral $J$ lässt sich auf eine einfachere Form bringen durch die Substitutionen

$$1 + \beta z = x; \quad a = \frac{b-\beta}{\beta}; \quad c = \frac{b}{\beta}$$

Dann wird nämlich

$$J = \frac{1}{\beta} \cdot \int\limits_{1-\beta}^{1+\beta} \frac{dx}{x} (a + c\,x)^{\frac{3}{2}}$$

und wenn die Integration nach bekannten Regeln ausgeführt wird:

$$J = \frac{2a}{\beta}\left\{\sqrt{1+b} - \sqrt{1-b}\right\} + \frac{2}{3\beta}\left[(1+b)^{\frac{3}{2}} - (1-b)^{\frac{3}{2}}\right] \tag{4}$$

$$+ \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\beta} \log\left\{\frac{\sqrt{1+b} - \sqrt{a}}{\sqrt{1+b} + \sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{1-b} + \sqrt{a}}{\sqrt{1-b} - \sqrt{a}}\right\}$$

Diese strengen Formeln (1), (2), (3) und (4) lösen die Aufgabe allgemein und sie werden bei den grossen Planeten in der That anzuwenden sein. Dazu liegt aber gegenwärtig wenig Veranlassung vor. Es sollen vielmehr solche Anwendungen derselben gemacht werden, die sehr bedeutende Vereinfachungen zulassen.

6.

Um zunächst die Verhältnisse bei der Erde in Betracht zu ziehen, so wird es jedenfalls erlaubt sein, die Erdbahn als Kreis anzunehmen. Ferner ist in Kilometern und Zeitsecunden ausgedrückt $V$ rund 30 und $G = 125$. Die parabolische Hypothese $w = V\sqrt{2}$ ist zwar in neuerer Zeit vielfach angezweifelt worden; es scheint aber doch, dass sie geeignet ist, bei rohen Mittelwerthen als Grundlage zu dienen. Sie soll deshalb hier angenommen werden. Man überzeugt sich auch leicht durch eine einfache Rechnung, dass es, obwohl damit nicht viel Mühe verbunden ist, unnöthig wäre, die strengen Formeln anzuwenden. Vielmehr erhält man bis auf wenige Procente richtige Werthe, wenn man $G = 0$ setzt, also die Erd-

anziehung ganz vernachlässigt. Dieses Resultat war von vornherein keineswegs selbstverständlich.

Machen wir die erwähnten Annahmen, so folgt nach Art. 5, (1)

$$b = \beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}; \quad a = 0$$

und man findet

$$(\mathrm{I}) = 0.300\, V$$
$$C = 1.650\, V$$

Hiermit werden also die durch den Zusammenstoss mit den Meteoriten erzeugten Störungscomponenten

$$\left.\begin{aligned} (1) &= -\frac{R^2 \pi D_0}{m} \lambda' V^2 \cos L \\ (2) &= -\frac{R^2 \pi D_0}{m} \lambda' V^2 \sin L \end{aligned}\right\} \quad \lambda' = 2.074 \qquad (1)$$

Diese Gleichungen definiren demnach eine Widerstandsbewegung, deren Charakter vollständig bekannt ist.

Es erübrigt noch, den Widerstandsfactor etwas anders zu bestimmen. Nach Art. 3, (3) ist die Masse $\mu$, welche in der Zeiteinheit, als welche in gebräuchlicher Weise der mittlere Sonnentag gewählt wird, auf die Erde fällt, definirt durch:

$$\mu = \pi D_0 R^2 \cdot \frac{v^2}{v_0}$$

also im vorliegenden Falle:

$$\mu = \frac{\pi D_0 R^2}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\beta\, d\beta \int_0^{2\pi} d\lambda \cdot \frac{w^2 + V^2 + G + 2wV\cos\beta\cos(\lambda - L)}{\sqrt{w^2 + V^2 + 2wV\cos\beta\cos(\lambda - L)}}$$

oder wenn auch hier $G$ vernachlässigt wird:

$$\mu = \pi D_0 R^2 C$$

Setzt man dies in (1) ein, so wird:

$$\begin{aligned} (1) &= -\frac{\mu}{m}\lambda V \cos L \\ (2) &= -\frac{\mu}{m}\lambda V \sin L \end{aligned} \qquad \lambda = 1.26$$

Hierzu kommen noch die Glieder, welche von der Massenvergrösserung der Erde herrühren. Man wird annehmen dürfen, dass diese der Zeit proportional vor sich geht, also setzen:

$$\varDelta m = \mu t$$

und die Störungscomponenten werden nach Art. 1, (5)

$$\left.\begin{aligned} X &= -k^2 \mu t \frac{x}{r^3} - \frac{\mu}{m} \lambda V \cos L \\ Y &= -k^2 \mu t \frac{y}{r^3} - \frac{\mu}{m} \lambda V \sin L \\ Z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Für die kreisförmige Erdbahn mit dem Radius $a$ ist $L = 90^0 + nt$, wo $n$ die mittlere Bewegung der Erde bedeutet. Die Störungscomponenten $R$ und $S$ in der Richtung des Radiusvectors, bezw. senkrecht darauf, sind dann:

$$R = -k^2 \frac{\mu t}{a^2}; \quad S = -\frac{\mu}{m} \lambda a n$$

Hierdurch entstehen bekanntlich in der mittleren Länge $l$ säculare Glieder. Diejenigen, welche von der Massenvergrösserung herrühren, sind, wenn die Sonnenmasse gleich 1 gesetzt wird:

$$\varDelta l_1 = \mu n t^2$$

während infolge des Zusammenstosses die Glieder zu Stande kommen:

$$\varDelta l_2 = \tfrac{3}{2} n \lambda \frac{\mu}{m} t^2$$

Hieraus folgt, das $\varDelta l_1$ gegenüber $\varDelta l_2$ gänzlich zu vernachlässigen ist. Denn man findet

$$\frac{\varDelta l_2}{\varDelta l_1} = \tfrac{3}{2} \lambda \frac{1}{m} = \text{rund } 610000$$

Wenn z. B. im Jahrhundert so viel meteorische Masse auf die Erde fiele, dass hierdurch eine gleichmässige Schicht von 1 mm Höhe und der mittleren Erddichte entstände, so würde wenn $t$ in Jahrhunderten angegeben wird, rund:

$$\varDelta l_2 = 0''.12\, t^2$$

Etwas anders gestaltet sich die Sache, wenn man die Mondbewegung untersucht. Es soll dies jetzt geschehen, weil ein ähnlicher Versuch bereits vorliegt. Bezeichnet man die heliocentrischen Coordinaten des Mondes $m'$ mit $x' y' z'$, seine heliocentrische Geschwindigkeit mit $V'$ und nimmt man der Einfachheit wegen die Neigung der Mondbahn gegen die Ecliptik gleich Null an, so wird die Breite der heliocentrischen Mondbewegung Null sein, während die Mondlänge $L'$ ist. Die der Erde zugehörigen Grössen sollen, wie früher, mit denselben ungestrichenen Buchstaben bezeichnet werden. Dann hat man für Mond bezw. Erde die Gleichungen:

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} + k^2(1+m')\frac{x'}{r'^3} = k^2 m \frac{x-x'}{\varDelta^3} - k^2 m \frac{x}{r^3} - \frac{\mu'}{m'}\lambda' V' \cos L'$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{x}{r^3} = -k^2 m' \frac{x-x'}{\varDelta^3} - k^2 m' \frac{x'}{r'^3} - \frac{\mu}{m}\lambda V \cos L$$

Hierin bedeutet selbstverständlich $\varDelta$ die Entfernung Mond—Erde und für die Mondmasse $m'$ haben wir zu setzen:

$$m' = m_0' + \mu' t$$

wo $\mu'$ die tägliche Zunahme der Mondmasse ist. Für die geocentrische Coordinate $\xi$ des Mondes ergiebt sich also durch Subtraction:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + k^2(m+m')\frac{\xi}{\varDelta^3} = -k^2\left(\frac{x'}{r'^3} - \frac{x}{r^3}\right) - \frac{\mu'}{m'}\lambda' V' \cos L' + \frac{\mu}{m}\lambda V \cos L$$

Die durch den Zusammenstoss erzeugte störende Kraft ist demnach:

$$X = -k^2(\mu+\mu')\frac{t\xi}{\varDelta^3} - \frac{\mu'}{m'}\lambda' V' \cos L' + \frac{\mu}{m}\lambda V \cos L$$

$$Y = -k^2(\mu+\mu')\frac{t\eta}{\varDelta^3} - \frac{\mu'}{m'}\lambda' V' \sin L' + \frac{\mu}{m}\lambda V \sin L$$

Wir wollen nun die Bahn des Mondes um die Erde als Kreisbahn mit dem Radius $a'$ und der mittleren Bewegung $n'$ annehmen. Dann sind die Störungscomponenten $R$ und $S$ in der Richtung des Radius-vectors und senkrecht darauf:

$$R = -k^2(\mu+\mu')\frac{t}{a'^2} + \left(\frac{\mu'}{m'}\lambda' - \frac{\mu}{m}\lambda\right) a n \sin(n'-n)t$$

$$S = -\frac{\mu'}{m'}\lambda' a' n' - \left(\frac{\mu'}{m'}\lambda' - \frac{\mu}{m}\lambda\right) a n \cos(n'-n)t$$

Wenn man nur die säcularen Glieder aufsucht, so fallen die zweiten Glieder auf den rechten Seiten fort. In der mittleren Mondlänge $\varLambda$ erhält man so nach dem Vorigen folgende Säcularveränderungen:

1) Infolge der Massenvergrösserung

$$\varDelta \varLambda_1 = \frac{\mu + \mu'}{m + m'} \cdot n' t^2$$

2) Infolge des Zusammenstosses

$$\varDelta \varLambda_2 = \tfrac{3}{2} n' \lambda' \frac{\mu'}{m'} t^2$$

Man wird die Dichtigkeit der auf den Mond fallenden Meteorschwärme gleich derjenigen, welche mit der Erde zusammentreffen, annehmen können und demzufolge, da auch die heliocentrische Mondbewegung sich nur wenig von der heliocentrischen Erdbewegung unterscheidet, $\lambda = \lambda'$ setzen dürfen. Es wird also genügen zu setzen

$$\mu' = \mu \left(\frac{R'}{R}\right)^2$$

wo $R'$ den Mondradius bedeutet. Wählt man nun wieder die obigen Annahmen als Beispiel, so folgen in runden Zahlen die Werthe

$$\varDelta \varLambda_1 = 0''.9\, t^2$$
$$\varDelta \varLambda_2 = 9''.2\, t^2$$

Der Zahlenwerth für $\varDelta \varLambda_2$ stimmt absolut nicht mit den Rechnungen überein, welche Oppolzer in einem sehr interessanten Aufsatze in Nr. 2573 der „Astronomischen Nachrichten“ ausgeführt hat. Dort wird eine Massenanhäufung von derselben Grösse wie in dem obigen Beispiel behandelt und die daraus sich ergebende Acceleration in der mittleren Mondbewegung bestimmt. Oppolzer findet für denjenigen Theil, welcher

aus der Vergrösserung der Mondmasse entsteht . . . 0''.87

von der Wirkung des Zusammenstosses herrührt . . . 0''.26

endlich wird die Rotationsdauer der Erde durch die eingetretene Massenvermehrung derselben geändert, was auf den Mond übertragen eine Acceleration hervorruft

im Betrage von . . . . . . . . . . . . . . . 0''.68

Alle drei Posten geben zusammen 1."81. Da nun bekanntlich die Störungstheorie etwa 5" in der mittleren Mondbewegung unerklärt lässt, so folgert Oppolzer, dass im Jahrhundert eine Menge kosmischen Staubes mit der Erde vereinigt wird, welche einer Schicht von 2.8 mm Höhe von einer Dichte gleich der mittleren Dichte der Erde gleich kommt. Aus dem Vorigen folgt, dass das Zahlenresultat Oppolzer's unrichtig ist, indem der Einfluss des Zusammenstosses 35 mal so gross ist als Oppolzer angenommen hat. Der begangene Fehler hat darin seinen Grund, dass Oppolzer der Meinung war, „es wird in dieser Hinsicht nur jene Masse in Wirksamkeit treten, die in dem Volumen enthalten ist, welches der Mond in seiner relativen Bewegung um die Erde durchstreift."

Auch die weitere Annahme Oppolzer's, dass die staubförmige Masse sich in absoluter Ruhe relativ zur Sonne befinde, dürfte wohl nicht haltbar sein, wodurch übrigens das Zahlenresultat nicht viel geändert wird. Indessen scheint es doch wünschenswerth, die Sachlage direct unter den von Oppolzer betrachteten Umständen klar zu stellen, um den erhobenen Widerspruch gegen das Resultat eines so bedeutenden Astronomen völlig zu begründen. Die heliocentrische Geschwindigkeitszunahme durch die Aufnahme ruhender Massen ist gegeben für den Mond durch

$$\Delta \frac{dx'}{dt} = -\frac{\mu'}{m'} \frac{dx'}{dt}$$

und für die Erde durch

$$\Delta \frac{dx}{dt} = -\frac{\mu}{m} \frac{dx}{dt}$$

also wird die Zunahme der relativen Geschwindigkeiten

$$\Delta \frac{d\xi}{dt} = -\frac{\mu'}{m'} \frac{d\xi}{dt} + \left(\frac{\mu}{m} - \frac{\mu'}{m'}\right) \frac{dx}{dt}$$

$$\Delta \frac{d\eta}{dt} = -\frac{\mu'}{m'} \frac{d\eta}{dt} + \left(\frac{\mu}{m} - \frac{\mu'}{m'}\right) \frac{dy}{dt}$$

was mit den obigen Formeln vollkommen übereinstimmt, wenn man $\lambda' = \lambda = 1$ setzt. In der That muss dies aber geschehen, wenn die Meteormassen keine heliocentrische Bewegung zeigen. Diese Formeln ergeben für die Acceleration der mittleren Mondbewegung 7."3 also rund 28 × 0."26.

Nach dem Vorstehenden wäre also die Oppolzer'sche Schicht auf etwa $^1/_2$ mm zu reduciren. Ob hierdurch der Erklärungsversuch wesent-

lich an Wahrscheinlichkeit gewinnt, ist natürlich eine ganz andere Frage, die voraussichtlich zu verneinen sein wird. Herr Braun hat in Nr. 2582 der A. N. eine solche Erklärung abgelehnt, weil die nothwendige Massenvergrösserung der Erde viel zu gross sei, und diese Ablehnung durch Gründe gestützt, denen man eine gewisse Berechtigung nicht wird absprechen können. Einige Einschränkungen wird man freilich wohl machen können, ohne mit den Beobachtungen in Widerspruch zu gerathen.

7.

Ein weiteres Beispiel der directen Anwendung der obigen Formeln geben die Cometen ab. Man wird hier ohne Zweifel von der Anziehung absehen können, welche diese Körper auf die Meteorschwärme ausüben. Ferner wird man sich erlauben können die Cometenbahnen als Parabeln anzusehen. Es ist das freilich bei den periodischen Cometen nur in nicht gar weiter Entfernung vom Perihel erlaubt, wird aber den Gesammterfolg schon deshalb wenig ändern, weil die Annahme viel für sich hat, dass die Dichtigkeit der Meteorschwärme in der Nähe der Sonne grösser ist und rasch mit der Entfernung von ihr abnimmt. Unter diesen Voraussetzungen ist also $w = V$ zu setzen und man erhält für die Störungscomponenten die Ausdrücke

$$(1) = -\tfrac{8}{5}\frac{R^2\pi}{m} D_0 V^2 \cos L$$

$$(2) = -\tfrac{8}{5}\frac{R^2\pi}{m} D_0 V^2 \sin L$$

Da ausserdem im vorliegenden Falle von einer Vergrösserung der Masse abgesehen werden kann, so ergiebt sich hier die bekannte Widerstandsbewegung, wie sie beim Encke'schen Cometen constatirt worden ist. Man mag über diese Erklärung der Anomalien in der Bewegung des Encke'schen Cometen denken wie man will, jedenfalls genügt sie den Beobachtungen vollkommen und lässt auch die sonst räthselhaften Veränderungen in der Widerstandsconstanten vollkommen erklärlich erscheinen. Denn wir haben gar keinen Anlass, $D_0$ als unabhängig von Ort und Zeit anzunehmen, ja sogar sprungweise Aenderungen desselben haben in keiner Weise etwas Auffallendes. Desgleichen wird die, wie es

scheint, von den Beobachtungen geforderte Annahme, dass $D_0$ mit der Entfernung von der Sonne abnimmt, nichts Ueberraschendes bieten.

Ich gehe nicht darauf ein zu zeigen, wie sich die hier und wohl auch früher schon gelegentlich erwähnte Hypothese über das sogenannte widerstehende Mittel vortheilhaft von andern unterscheidet. Desgleichen sollen andrerseits gewisse Schwierigkeiten, die sich ohne Zweifel angeben lassen, unerörtert bleiben. Nur einen Punct möchte ich hier erwähnen. Es war mir seit langer Zeit auffallend, wie man dieses Mittel mit dem die Bewegung des Lichtes vermittelnden Medium identificiren konnte. Von Astronomen ist diese Ansicht wohl kaum ernstlich ausgesprochen worden, in physikalischen Büchern und populären Schriften findet man aber noch heute diese Erklärung erwähnt. Abgesehen davon, dass diese Annahme sich nicht damit verträgt, was doch von den Beobachtungen gefordert wird, dass das Mittel die translatorische Bewegung des Sonnensystemes mitmachen müsste, bereitet die Annahme, dass die Dichtigkeit dieses Mittels von der Entfernung von der Sonne abhängt, fast unüberwindliche Schwierigkeiten. Zum mindesten, wenn man selbst eine auch sonst nicht als zulässig erscheinende Zusammendrückbarkeit dieses Aethers gelten lassen wollte, würden daraus infolge der Lichtbrechung in einem nicht überall gleich dichten Medium scheinbare Anomalien in der Bewegung der Planeten Mercur und Venus sich ergeben, von denen nichts bekannt ist. Freilich kann man wohl kaum Zahlenresultate in dieser Richtung anführen, aber diese Untersuchung müsste jedenfalls angestellt werden, ehe man dem Lichtaether solche ungewohnte Eigenschaften beizulegen sich entschliesst.

## 8.

Wie schon am Anfange dieses Aufsatzes bemerkt worden, folgt die Theilung planetarischer Massen infolge der Auslösung innerer Kräfte, da sie in mechanischem Sinne einer Explosion gleichkommt, genau denselben Gesetzen, wie der Zusammenstoss. Man hat nur die sich abtrennende Masse als negativ, also das mit $\mu$ behaftete Glied ebenfalls negativ anzusetzen. Solche explosive Erscheinungen traten bisher in einer Ausdehnung, die zu näherer Betrachtung auffordert, nur bei den Cometen auf. Hier ist aber das Problem ein sehr einfaches, weil

weder eine Verkleinerung der Cometenmasse in Rechnung gezogen zu werden braucht, und weil infolge der allem Anscheine nach sehr kleinen Cometenmasse gleich nach der Abtrennung von der gegenseitigen Anziehung beider Theile abgesehen werden darf. Die erste, übrigens leicht zu berücksichtigende, Vernachlässigung ist erlaubt wegen der geringeren Genauigkeit der Beobachtungen und weil die Umlaufszeit sich noch bei keinem Cometen so genau hat bestimmen lassen, dass dieser Umstand in Frage käme. Die zweite Vernachlässigung wird noch dadurch plausibler, dass die Ausströmungen und Theilungen der Cometenmassen mit grosser Geschwindigkeit vor sich gehen, wenn anders die betreffenden Theorien als zutreffend anerkannt werden.

Bessel hat in einem interessanten und in neuerer Zeit vielfach citirten Aufsatze[1]) den Einfluss der Ausströmungen auf die Bewegung der Cometen in einigen Richtungen untersucht, hieran aber Folgerungen geknüpft, gegen die sich, wie ich glaube, nicht unwesentliche Bedenken erheben lassen. Aus diesem Grunde soll hier auf diesen Gegenstand mit wenigen Worten eingegangen werden.

Als gesichertes Beobachtungsresultat werden wir ansehen können, dass die die Schweifbildung hervorrufenden Ausströmungen von der Sonne hervorgerufen werden und zunächst in der Richtung nach der Sonne hin stattfinden. Die Reaction, welche hierdurch auf die Hauptmasse des Cometen ausgeübt wird, geschieht also in der positiven Richtung des Radiusvectors. Dies gilt natürlich nur für den mittleren Zustand. Hieran wird aber durch die von Bessel zuerst erkannten und studirten periodischen Schwankungen der Ausströmung nichts geändert, vielmehr zeigen diese gerade, dass die Richtung des Radiusvectors eine Gleichgewichtslage, also eine mittlere Lage, darstellt. Es ist das auch von vornherein sehr wahrscheinlich, weil die Ausströmungen jedenfalls durch Kräfte hervorgerufen werden, die in der Sonne ihren Sitz haben, gleichgiltig ob dies in letzter Instanz thermische, electrische oder irgend welche andere sind. Ferner ist durch die Beobachtungen festgestellt, dass die Intensität der Ausströmung mit der Annäherung des Cometen an das Perihel zunimmt,

1) Bemerkungen über mögliche Unzulänglichkeit der die Anziehungen allein berücksichtigenden Theorie der Cometen. Astron. Nachr. Band 13. Abhandlungen Bessel's herausg. von Engelmann Band I pag. 80.

meistens nicht im Perihel sondern später das Maximum erreicht und überhaupt nach dem Perihel stärker ist als sie in den entsprechenden Puncten vor der Sonnennähe war. Es ist dies eine ganz ähnliche Erscheinung, wie wir sie sehr oft beobachten. Hierher gehört z. B. die Thatsache, dass nicht Mittags, sondern einige Stunden später das Maximum der Temperatur eintritt u. s. f.

Giebt man dies zu und ich glaube, dass neue Hypothesen nothwendig sind, um das Gesagte zu bestreiten und nicht um es zu bekräftigen, so folgt aber, dass die Ausströmungen bei periodischen Cometen niemals so wirken, wie das sogenannte widerstehende Mittel. Das Characteristische der Wirkung des letzteren besteht darin, dass die mittlere Länge im quadratischen Verhältnisse der Zeit zunimmt. Um also die eben gemachte Bemerkung zu rechtfertigen, ist es erforderlich zu zeigen, dass ein solches Glied als Folge der Ausströmung nicht auftritt.

Nennt man $g$ die Geschwindigkeit, mit der die Masse $\mu$ in der Richtung des Radiusvectors zur Sonne ausströmt, so sind die störenden Kräfte der Reaction auf die Bewegung des Cometen mit der Masse $m$:

$$X = +g\frac{\mu}{m}\frac{x}{r}$$

$$Y = +g\frac{\mu}{m}\frac{y}{r}$$

Hierdurch entsteht die störende Kraft $R$ in der Richtung des wachsenden Radiusvectors

$$R = +g\frac{\mu}{m}$$

und die Differentialgleichung für die Störung $\Delta l$ in der mittleren Länge ist, unter Beibehaltung der üblichen Bezeichnung für die übrigen Elemente

$$\frac{d(\Delta l)}{dt} = -\frac{2}{a^2 n} g r \frac{\mu}{m} - \frac{3e}{a\sqrt{1-e^2}} \int g \frac{\mu}{m} \sin v \, dt$$

Hieraus folgt

$$\Delta l = -\frac{2}{a^2 n} \int g r \frac{\mu}{m} dt - \frac{3e}{a\sqrt{1-e^2}} \int dt \int g \frac{\mu}{m} \sin v \, dt$$

Das erste Glied ist stets negativ, das zweite, solange man sich vor dem Perihel befindet, sicher positiv. Vom Perihel fängt dasselbe zu wachsen an, weil sin $v$ positiv ist und wächst. Da nun den obigen Auseinandersetzungen gemäss $g\frac{\mu}{m}$ nach dem Perihel grösser ist als in den Puncten mit demselben $v$ vor dem Perihel, so wird das zweite Glied für einen Punct mit positivem $v$ kleiner sein als es in einem Puncte mit demselben aber negativem $v$ war. Es wird also überhaupt, wenn man $\Delta l$ dadurch bestimmt, dass man einen periodischen Cometen von Umlauf zu Umlauf verfolgt, die mittlere Länge mit der Zeit abnehmen.

Dies ist aber gerade das Gegentheil von dem, was man beim Encke'schen Cometen beobachtet hat. Will man also die Ausströmungserscheinungen zu einer Erklärung der Anomalie in der Bewegung des Encke'schen Cometen verwenden, so muss entweder die Hypothese gemacht werden, dass im Durchschnitt die Ausströmung vor dem Perihel intensiver war als nach demselben, eine Hypothese, die ich, wenigstens nach dem gegenwärtigen Stande unseres Wissens, als sehr wenig wahrscheinlich betrachten muss oder man muss ganz bestimmte und vorderhand nicht bewiesene Annahmen über eine Abweichung der Richtung der Ausströmung von der des Radiusvectors voraussetzen. Ich halte es deshalb für nicht gerechtfertigt, wenn man in neuerer Zeit auf diese Erklärung für die Anomalien in der Bewegung des Encke'schen Cometen zurückgekommen ist.

In anderer Richtung sind aber die im Bessel'schen Aufsatze enthaltenen Anregungen von der grössten Wichtigkeit. Man erhält bei durchaus nicht extravaganten Annahmen so bedeutende periodische Störungen, dass man sich billigerweise verwundern muss, dass so bedeutende Einflüsse bei Cometen mit starker Schweifbildung bisher nicht bemerkt sein sollten. Wir besitzen seit Bessel's Zeit sehr viele gut beobachtete und umsichtig berechnete Cometenbahnen, nirgends haben sich aber bisher Differenzen zwischen Berechnung und Beobachtung ergeben, die nicht auf andere Weise erklärt werden könnten. Hierdurch ist man aber doch zu dem Schlusse berechtigt, dass die Grösse $g\frac{\mu}{m}$ bei allen diesen Cometen sehr klein sei und da andrerseits die nicht kleinen Werthe für $g$, welche die Bessel'sche Theorie der Schweifbildung ergiebt, als

ziemlich gesichert angesehen werden können, so muss geschlossen werden, dass $\frac{\mu}{m}$ nur einen minimalen Bruchwerth annehmen kann, dass also die ausströmende Masse selbst gegen die sehr kleinen Cometenmassen verschwindend klein ist. Diese Ansicht über die ungeheuere Dünnheit der Materie, welche die Cometenschweife bildet, steht auch sonst mit allen Beobachtungen im Einklang und sie schliesst sich den in neuerer Zeit gemachten Versuchen über die Zerstäubung belichteter Metallmassen in vieler Hinsicht so eng an, dass vorderhand die Vermuthung eines Zusammenhanges beider Erscheinungen, wie auch von anderer Seite bereits ausgesprochen worden ist, wenigstens nicht unbedingt abzuweisen ist.

Ueberhaupt hat man wohl keinen Grund die Ansicht festzuhalten, dass im oder vom Cometenkerne aus bedeutende Massen durch explosive Kräfte umgesetzt werden, denn dann müssten nothwendig Reactionswirkungen eintreten, von denen bisher nichts beobachtet worden ist. Sehr interessant ist in dieser Beziehung der grosse Comet 1882 II, welcher mehrere Kerne zeigte, die während seiner Sichtbarkeit mehr oder weniger hervorgetreten sind. Die erschöpfende Bearbeitung, welche Herr Dr. Kreutz [1]) für die von ihm als Hauptkern bezeichnete Verdichtung durchgeführt hat, hat Alles in die schönste Uebereinstimmung gebracht. Desgleichen hat sich nach den Untersuchungen des Herrn Tisserand [2]) gezeigt, dass die Bewegung der zweiten helleren Verdichtung durch die Kepler'schen Gesetze allein geregelt wird. Es kann also eine nennenswerthe Einwirkung der beiden Kerne aufeinander während der Sichtbarkeit nicht stattgefunden haben und eine Theilung im obigen Sinne musste jedenfalls früher sich vollzogen haben. Dies wird sich aber schwer sicher feststellen lassen. Wenn man sich ein Bild von solchen Erscheinungen wie die Theilung des Biela'schen Cometen, des plötzlichen Auftauchens von Nebencometen in grösseren oder kleineren Entfernungen vom Hauptkern u. s. f. machen will, so wird dies, wenn die Zukunft nicht ganz durchgreifende Richtigstellungen bringt, wohl kaum anders ausfallen können, als dass man annimmt, die physikalischen Bedingungen für Er-

---

1) Publication der Sternwarte in Kiel. 1888.
2) Bulletin astronomique.

scheinungen, welche Cometen genannt werden, könnten an mehreren Stellen, wenn auch in sehr verschiedenen Graden, gegeben sein. Halten wir den engen Zusammenhang zwischen Sternschnuppenschwärmen und Cometen fest, so würde also ein solcher Schwarm bald da bald dort die physikalischen Bedingungen erlangen, welche ihn als Cometen erscheinen lassen. Die Mitwirkung störender Planeten bei der Ausbreitung solcher Schwärme braucht selbstverständlich in keiner Weise ausgeschlossen werden. Das bekannte Vorkommen von Cometensystemen, die Theilung des Biela'schen Cometen, der Pogson'sche Comet und der wahrscheinlich mit ihm identische Sternschnuppenfall verlieren dann in astronomischer Beziehung das Auffallende und Merkwürdige, das ihnen noch anhaftet. Dass hiermit über die physikalische Erklärung der Cometen noch nichts gesagt ist und gesagt werden soll, versteht sich von selbst.

Es ist zu bedauern, dass der Biela'sche Comet, der für solche Fragen noch immer das geeignetste Object ist, bisher keine so eingehende Berechnung gefunden hat, als zu wünschen wäre. Es mag dies zum Theil darin liegen, dass die genannte Aufgabe nicht immer in jener Beschränkung angefasst worden ist, die vorläufig Aussicht auf Gelingen darbietet, dass man vielmehr gleich von Anfang an sich vornimmt, den Cometen durch möglichst viele Erscheinungen zu verfolgen. Es kommt vielmehr bei der wichtigen Frage, die sich beim Biela'schen Cometen darbietet, nämlich nach dem Verhalten der beiden Cometen, die sich im Jahre 1845 an Stelle des einen Cometen zeigten, wesentlich auf eine möglichst sorgfältige Verbindung der beiden Erscheinungen von 1832 und 1845 an. Die weitere Verbindung 1845—1852 wird dann erst in theoretischer Beziehung wichtig, denn bekanntlich hat Hubbard nicht mit voller Sicherheit festellen können, welche Oerter in beiden Erscheinungen zu demselben Objecte gehören.

Wenn eine Theilung durch explosive Kräfte stattgefunden hat, so lassen sich die Beziehungen zwischen den Elementen der beiden Theilcometen und dem ursprünglichen, aus denen sie hervorgegangen sind, sehr leicht ableiten. Denn es ist in Bezug auf ein festes heliocentrisches Coordinatensystem im Augenblick der Trennung:

$$(m_1 + m_2)\frac{dx}{dt} = m_1\frac{dx_1}{dt} + m_2\frac{dx_2}{dt}$$

$$(m_1 + m_2)\frac{dy}{dt} = m_1\frac{dy_1}{dt} + m_2\frac{dy_2}{dt}$$

$$(m_1 + m_2)\frac{dz}{dt} = m_1\frac{dz_1}{dt} + m_2\frac{dz_2}{dt}$$

wo $m_1\, m_2$ und $x_1\, y_1\, z_1\, x_2\, y_2\, z_2$ die Massen und Coordinaten der beiden Theile, $x\, y\, z$ die Cordinaten für den ursprünglichen Cometen bedeuten. Sehr einfach gestalten sich hieraus die folgenden Beziehungen zwischen den halben Parametern $p$, den Neigungen $i$ und den Knotenlängen $\Omega$ der drei Bahnen:

$$\sqrt{p}\cos i = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\sqrt{p_1}\cos i_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\sqrt{p_2}\cos i_2$$

$$\sqrt{p}\sin i\cos\Omega = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\sqrt{p_1}\sin i_1\cos\Omega_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\sqrt{p_2}\sin i_2\cos\Omega_2$$

$$\sqrt{p}\sin i\sin\Omega = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\sqrt{p_1}\sin i_1\sin\Omega_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\sqrt{p_2}\sin i_2\sin\Omega_2$$

Die Controle, welche diese Formeln, für eine im Uebrigen nach den obigen Bemerkungen nicht wahrscheinliche Hypothese über den Theilungsvorgang abgeben, wird aber meistens nur bei sorgfältig geführten Störungsrechnungen von Werth sein können.

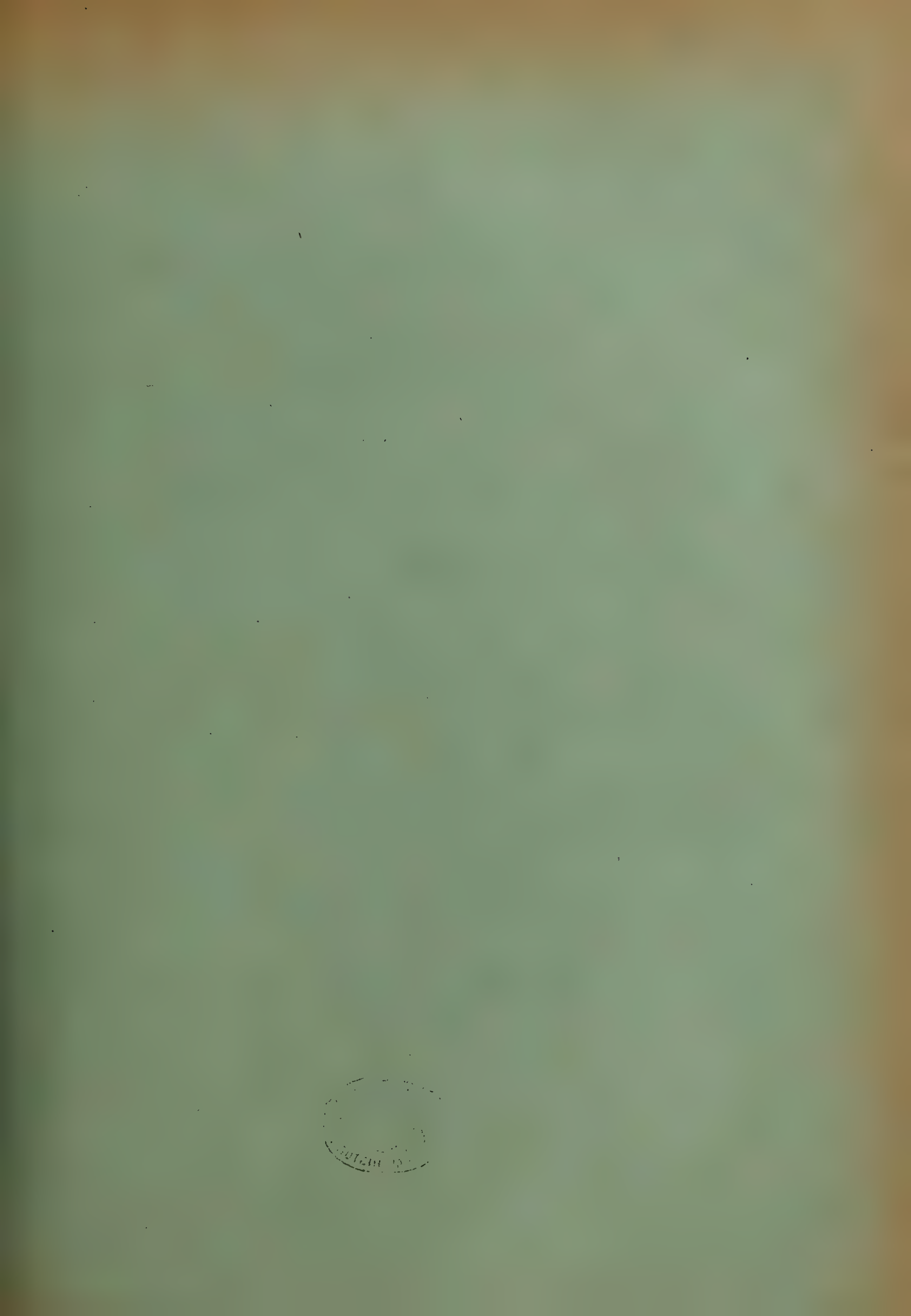
---

**Druckfehler:**

pag. 480, Zeile 2 v. u. vor der zweiten Klammer lies — statt +.

---





# Inhalt.



Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

# ABHANDLUNGEN

DER

# MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHEN CLASSE

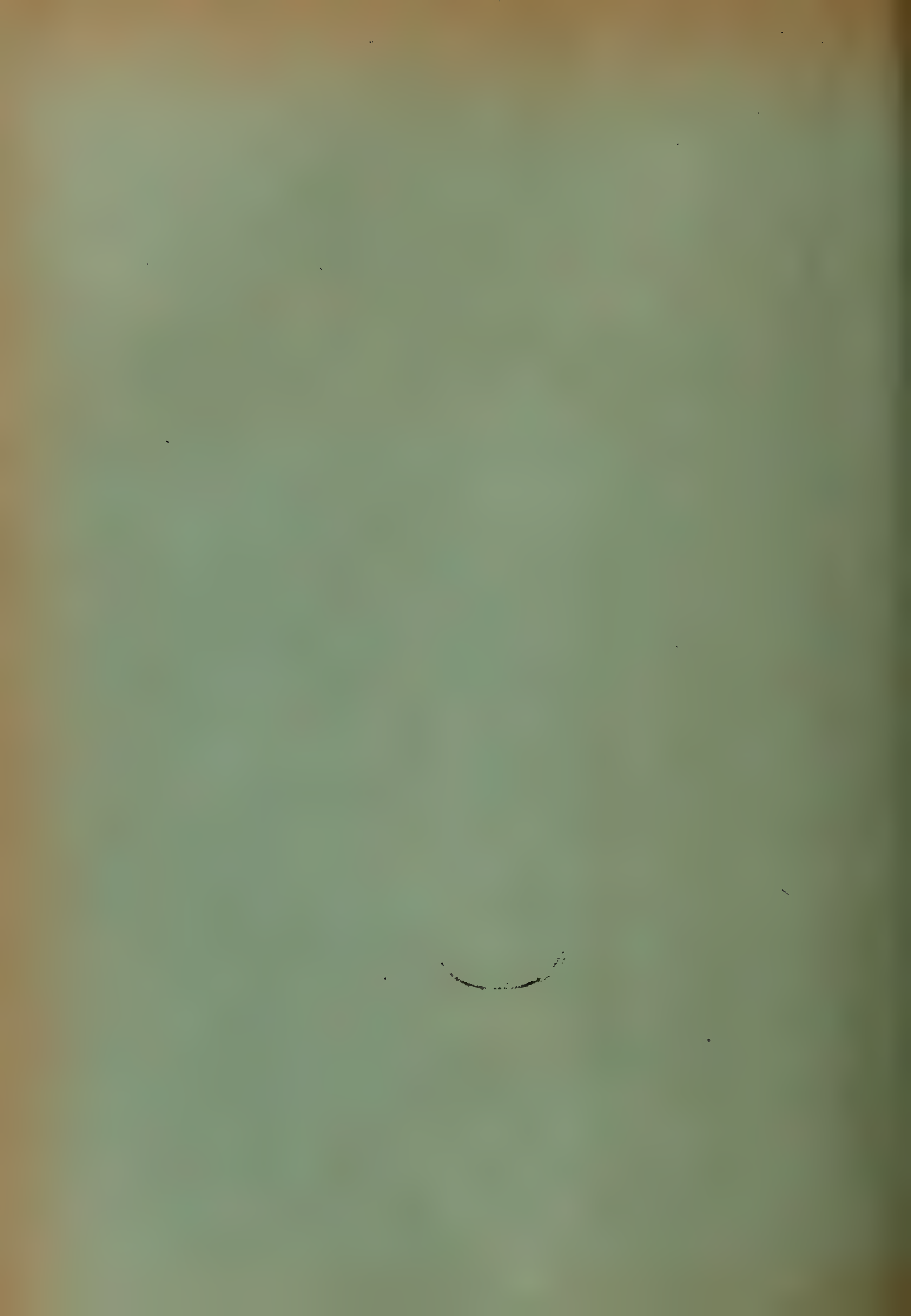
DER KÖNIGLICH BAYERISCHEN

# AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

SIEBZEHNTEN BANDES
DRITTE ABTHEILUNG.
IN DER REIHE DER DENKSCHRIFTEN DER LXIII. BAND.




MÜNCHEN 1892.
VERLAG DER K. AKADEMIE
IN COMMISSION BEI G. FRANZ.



# Berechnung von Mischfarben.

Von

**E. Lommel.**

(Mit 2 Tafeln.)



Bis in die neueste Zeit hat man, um den Farbenton einer Mischung beliebig gegebener einfacher Farben zu berechnen, sich der Newton'schen Regel bedient. Diese Regel besteht bekanntlich in Folgendem. Der Umfang eines Kreises vom Radius 1 wird in sieben Theile getheilt, welche den Zahlen $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{9}$ proportional sind, und in dieser Reihenfolge den sieben Hauptfarben Roth, Orange, Gelb, Grün, Blau, Indigo, Violett des prismatischen Spectrums entsprechen, mit allen ihren Uebergängen vom Roth bis zum Violett. Man sucht sodann für jeden dieser sieben Kreisbogen den Schwerpunkt, und denkt sich in demselben das Gewicht des zugehörigen Bogens angebracht. Der gemeinschaftliche Schwerpunkt aller Bogen oder des ganzen Kreisumfangs ist der Mittelpunkt des Kreises, und diesem Punkt entspricht als Mischfarbe aller Spectralfarben das reine Weiss. Sind die einfachen Farben in anderen Verhältnissen gemischt als im weissem Sonnenlicht, so hat man die Gewichte in den einzelnen Schwerpunkten mit den zugehörigen Verhältnisszahlen zu multipliciren. Sucht man jetzt den gemeinschaftlichen Schwerpunkt, so wird er im allgemeinen nicht in das Centrum des Kreises fallen, sondern excentrisch in einer Entfernung $r$ vom Mittelpunkte liegen. Die Mischung hat alsdann den Farbenton, welchen der Radius, der durch diesen Schwerpunkt geht, auf dem Kreisumfange angibt, und die gesuchte Mischfarbe ist aequivalent der Mischung aus einer Menge $r$ der entsprechenden homogenen Spectralfarbe und aus einer Menge $1-r$ von Weiss. Die Zahl $r$ gibt sonach den Sättigungsgrad der Mischfarbe an.

Wenn nun auch die Eintheilung des Newton'schen Farbenkreises aus einer nicht haltbaren Vergleichung der Farbenreihe des Spectrums mit der musikalischen (phrygischen) Tonleiter entsprungen ist, so gibt dieses Verfahren doch gute Resultate, und war lange Zeit das einzige Hilfsmittel, um Mischfarben durch Rechnung zu bestimmen. Biot[1]), Fresnel[2]), Abria[3]), Jamin[4]) u. A. haben dasselbe mit Erfolg hiezu angewendet. Jedenfalls sind die Voraussetzungen, auf welchen das Newton'sche Verfahren beruht, nämlich dass jede Mischfarbe als eine Mischung einer gesättigten Farbe mit Weiss angesehen, und dass diese Farbe durch eine Schwerpunktsconstruction gefunden werden könne, theoretisch nicht anfechtbar, wie Grassmann[5]) gezeigt hat, und die aus diesen Voraussetzungen gezogenen Folgerungen stehen mit den Thatsachen im Einklange.

In neuerer Zeit hat Maxwell[6]) im Anschluss an die Young'sche Vorstellung von nur drei physiologischen Grundempfindungen, vermöge welcher jede einfache oder zusammengesetzte Farbe durch eine lineare Function dreier Grundfarben ausgedrückt werden kann, durch Versuche die Coefficienten bestimmt, mit welchen man die Quantitäten der Grundfarben multipliciren muss, um die verschiedenen einfachen Farben zu erhalten. In der Farbentafel nehmen die von Maxwell gewählten drei Grundfarben, nämlich Roth von der Wellenlänge 630 Milliontel-Millimeter, Grün 528 und Blau 457 die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks ein, und der Ort einer jeden Farbe wird gefunden als Schwerpunkt dreier in den Eckpunkten des Farbendreiecks angebrachter Gewichte, deren Grösse proportional ist den relativen Mengen der drei Grundfarben, welche nöthig sind, um diese Farbe hervorzubringen. Der Ort des reinen Weiss ist der Schwerpunkt, der sich ergibt, wenn man die Ecken des Dreiecks mit Gewichten im Verhältniss von 3,973 — 6,520 — 6,460 belastet.

---

1) Biot, Traité de Physique, t. IV, p. 68. 1816.

2) Fresnel, namentlich in seinem Mémoire sur le calcul des teintes des lames cristallisées, Ouevres, t. I. p. 609.

3) Abria, Sur la diffraction de la lumière, Journal de Math. de Liouville, IV, p. 248. 1838.

4) Jamin, Mémoire sur la couleur des métaux, Ann. de Chim. et de Physique, 3. série, t. XXII, p. 322. 1848.

5) Grassmann, Pogg. Ann. Bd. LXXXIX. p. 69.

6) Maxwell, Phil. Trans. L. R. S. p. 57. 1860.

Auf Grund der Maxwell'schen Daten hat in neuester Zeit Lord Rayleigh[1]) die Farben dünner Blättchen berechnet. Es geschah diess mit Hilfe umfangreicher Zahlentabellen, und da eine grosse Anzahl von Punkten bestimmt werden muss, so nahmen die Rechnungen eine grosse Ausdehnung an.

Bei diesen Methoden ist das Resultat der Rechnung, welches den Ort der Mischfarbe in der Farbentafel angibt, ein rein numerisches. Weder das eine noch das andere Verfahren ist fähig, einen analytischen Ausdruck zu liefern, der z. B. für die Farben dünner Blättchen oder diejenigen der Beugungsfransen das Gesetz der Farbenfolge als Function der Dicke des Blättchens oder des Beugungswinkels angäbe.

Das mir öfters fühlbar gewordene Bedürfniss, die Reihe der mannigfaltigen Mischfarben, welche die mit weissem Lichte hervorgebrachten Interferenzerscheinungen zeigen, in eine übersichtliche Formel zusammengefasst zu sehen, gab Veranlassung zu vorliegender Arbeit. Die Aufgabe, die wir uns stellen, ist hienach die folgende: Wenn für irgend eine Lichterscheinung der Intensitätsausdruck für jede homogene Farbe als Function der Wellenlänge gegeben ist, aus diesem Ausdruck Formeln herzuleiten, welche bei Anwendung einer weissen Lichtquelle die Wellenlänge des Farbentons der Mischfarbe, deren Sättigungsverhältniss und Helligkeit darstellen, als Functionen derjenigen Veränderlichen, die in jedem Falle die Verschiedenheit der Farbenmischung bedingen.

Als Begrenzung der Farbentafel behalten wir die Newton'sche Kreislinie bei, und denken uns längs ihres Umfangs das „ideale Spectrum" Listing's[2]) aufgetragen, in welchem die Farben nach den Differenzen ihrer Schwingungszahlen angeordnet sind. Auch von Bezold[3]) ist in seiner Abhandlung: „Ueber das Gesetz der Farbenmischung und die physiologischen Grundfarben" zu dieser Eintheilung der Farbentafel gelangt, welche bei grosser Einfachheit eine gute Uebereinstimmung mit den Beobachtungen darbietet.

---

1) Lord Rayleigh, On the Colours of Thin Plates, Transactions of the Royal Society of Edinburgh, Vol. XXXIII. Part I. p. 157. 1886.

2) Listing, Pogg. Ann. Bd. CXXXI, p. 564.

3) v. Bezold, Pogg. Ann. Bd. CL. p. 241. 1873.

Bezeichnet man nun mit $\varphi$ die von irgend einem Anfangspunkte gezählte Bogenlänge dieses Farbenkreises, so besteht zwischen der Wellenlänge $\lambda$ und der ihr anzuweisenden Stelle auf dem Kreisumfang die Beziehung

$$\frac{1}{\lambda} = a + \frac{b}{2\pi}\varphi,$$

wo $a$ und $b$ noch zu bestimmende Constante sind.

Sind auf diese Weise die homogenen Farben des Spectrums, mit den Intensitätsverhältnissen, mit welchen sie für jede Schwingungszahl im Sonnenlicht vertreten sind, längs des Kreisumfanges aufgetragen, so betrachten wir diesen als ringsum gleichmässig belastet. Alsdann fällt der Schwerpunkt sämmtlicher Farben in den Mittelpunkt des Kreises, welcher sonach den Ort des Weiss darstellt; auf jedem Radius des Kreises herrscht die Farbe, welche dem Punkte des Umfanges zugehört, nach welchem der Radius gezogen ist, und zwar um so gesättigter, je mehr man sich auf dem Radius vom Mittelpunkt nach aussen gehend dem Umfange nähert.

Nehmen wir die Intensität des Weiss im Mittelpunkt als Einheit der Lichtstärke an, so ist, wenn auch der Radius des Kreises gleich 1 gesetzt wird, die Lichtstärke für die Einheit der Bogenlänge $1/2\pi$. und $d\varphi/2\pi$ für ein Bogenelement $d\varphi$.

Gemäss dieser Annahmen über Vertheilung und Intensität der Farben müssen je zwei homogene Farben, welche an den Endpunkten eines Durchmessers liegen, zu einander complementär sein, da ihr Schwerpunkt in den Mittelpunkt des Kreises fällt.

Kennt man daher aus der Erfahrung die Wellenlängen zweier complementärer homogener Farben, so ist hiedurch die Constante $b$ in obigem Ausdruck bestimmt.

Bezeichnen wir nämlich mit $\lambda_1$ und $\lambda_2$ die Wellenlängen zweier complementärer einfacher Farben, so muss

$$\frac{1}{\lambda_1} = a + \frac{b}{2\pi}\varphi,$$

$$\frac{1}{\lambda_2} = a + \frac{b}{2\pi}(\varphi + \pi),$$

und sonach

$$\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} = \frac{b}{2}$$

sein. Bei der angenommenen Maasseinheit für die Lichtmengen verschiedenfarbigen Lichtes, nach welcher solche Mengen, welche gemischt Weiss geben, als gleich angesehen werden, würde also für complementäre homogene Farbenpaare das einfache Gesetz gelten, dass die Differenz ihrer Schwingungszahlen constant ist.

Zur numerischen Bestimmung der Constanten $b$ wählen wir zwei complementäre einfache Farben, welche unserem Auge beim Betrachten des Spectrums nahezu gleich hell erscheinen, und zwar wählen wir aus den Beobachtungen von Helmholtz[1]) das Roth $\lambda = 656{,}2$ und das Blaugrün $\lambda = 492{,}1$, und finden hieraus:

$$b = 0{,}00101636, \quad \log b = 7{,}0070490 - 10.$$

Die Constante $a$, von deren Wahl die Lage des Anfangspunktes der Bogenzählung auf dem Kreisumfange abhängt, wird in der Folge ebenfalls aus Beobachtungsdaten bestimmt werden.

Bei der angenommenen Farbenvertheilung müssen ferner je drei, vier, fünf u. s. f. einfache Farben, welche in den Eckpunkten eines dem Kreise eingeschriebenen regelmässigen Drei-, Vier-, Fünfecks u. s. f. liegen, zusammen Weiss geben. —

Ist nun irgend ein Intensitätsausdruck, z. B. für eine Interferenzerscheinung, als Function $f\,(1/\lambda)$ der Wellenlänge oder der Schwingungszahl gegeben, so hat man, um die drei Merkmale Farbenton, Sättigung und Lichtstärke der Mischfarbe zu finden, die Mittelkraft und deren Angriffspunkt für die rings am Kreisumfang angreifenden parallelen Kräfte

$$\frac{1}{2\pi} f\left(a + \frac{b}{2\pi}\varphi\right) \cdot d\varphi$$

zu bestimmen. Die Mittelkraft $M$ oder die Lichtstärke der Mischung ergibt sich, wenn man vorstehenden Ausdruck über den ganzen Kreisumfang (von 0 bis $2\pi$) integrirt:

$$M = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(a + \frac{b}{2\pi}\varphi\right) \cdot d\varphi,$$

und die Coordinaten $x$ und $y$ ihres Angriffspunktes (Schwerpunktes) ergeben sich aus den Formeln:

1) Helmholtz, Handbuch der physiologischen Optik, p. 277. Leipzig, 1867.

$$Mx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + \frac{b}{2\pi}\varphi)\cos\varphi\, d\varphi,$$

$$My = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + \frac{b}{2\pi}\varphi)\sin\varphi\, d\varphi.$$

Der Winkel $\varphi$ des Radius, auf welchem dieser Punkt liegt, mit dem Anfangsradius, oder das Azimut des Farbentons der Mischung wird alsdann bestimmt durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} = \frac{\int_0^{2\pi} f(a + \frac{b}{2\pi}\varphi)\sin\varphi\, d\varphi}{\int_0^{2\pi} f(a + \frac{b}{2\pi}\varphi)\cos\varphi\, d\varphi},$$

wodurch vermöge der Beziehung

$$\frac{1}{\lambda} = a + \frac{b}{2\pi}\varphi$$

auch sofort die Wellenlänge dieses Farbentons bekannt ist. Die Strecke $r$ endlich, um welche der Schwerpunkt von dem Centrum des Kreises absteht, oder das Sättigungsverhältniss wird gegeben durch:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\cos\varphi} = \frac{y}{\sin\varphi}.$$

Als nächstliegendes Beispiel mögen die Farben dünner Krystallblättchen dienen. Der Intensitätsausdruck ist in diesem Falle bei gekreuzten Polarisationsebenen, wenn von der Dispersion abgesehen wird:

$$\sin\frac{2\pi d}{\lambda}$$

und bei parallelen Polarisationsebenen:

$$\cos\frac{2\pi d}{\lambda}$$

wenn unter $d$ die Dicke der Luftschicht verstanden wird, welche der durch den Krystall hervorgebrachten Verzögerung entspricht. Dieselben Ausdrücke gelten übrigens angenähert auch für die Farben dünner

isotroper Blättchen resp. im reflectirten und im durchgelassenen Licht, also für die Newton'schen Farbenringe.

Im ersteren Falle hat man:

$$M = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2 \pi d\left(a + \frac{b}{2\pi}\varphi\right) \cdot d\varphi$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left(1 - \cos 2\pi d(a + \frac{b}{2\pi}\varphi)\right) d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sin 2\pi d(a+b) - \sin 2\pi d a}{2\pi b d}\right),$$

oder:

$$M = \frac{1}{2}\left(1 - \cos \pi d(2a+b) \cdot \frac{\sin \pi b d}{\pi b d}\right).$$

Es ist ferner:

$$Mx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2 \pi d(a + \frac{b}{2\pi}\varphi) \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left(\cos\varphi - \cos 2\pi d(a + \frac{b}{2\pi}\varphi) \cdot \cos\varphi\right) d\varphi$$

$$= -\frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}[\cos(2\pi d a - (1 - b d)\varphi) + \cos(2\pi d a + (1 + b d)\varphi)]\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{8\pi}\left(\frac{\sin(2\pi d(a+b) - 2\pi) - \sin 2\pi d a}{1 - b d} - \frac{\sin(2\pi d(a+b) + 2\pi) - \sin 2\pi d a}{1 + b d}\right.$$

$$= \frac{1}{8\pi}(\sin 2\pi d(a+b) - \sin 2\pi d a)\left(\frac{1}{1 - b d} - \frac{1}{1 + b d}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cos \pi d(2a+b)\sin \pi b d \cdot \frac{b d}{1 - b^2 d^2}.$$

Berechnet man in ähnlicher Weise $My$, so hat man schliesslich:

$$Mx = \quad \frac{1}{2\pi} \cos \pi d (2a + b) \sin \pi b d \cdot \frac{b d}{1 - b^2 d^2},$$

$$My = -\frac{1}{2\pi} \sin \pi d (2a + b) \sin \pi b d \cdot \frac{1}{1 - b^2 d^2}.$$

Das Azimut $\varphi$ der Mischfarbe wird demnach gegeben durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\operatorname{tg} \pi d (2a + b)}{b d}.$$

Für die complementäre Erscheinung bei parallelen Polarisationsebenen hat man, wenn man die analogen Grössen mit Accenten bezeichnet, augenscheinlich:

$$M' = 1 - M, \qquad M'x' = -Mx, \qquad M'y' = -My,$$

$$\operatorname{tg} \varphi' = \operatorname{tg} \varphi, \qquad \sin \varphi' = -\sin \varphi, \qquad \cos \varphi' = -\cos \varphi.$$

Durch diese Gleichungen und insbesondere durch die einfache Formel:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\operatorname{tg} \pi d (2a + b)}{b d}$$

ist nun das Gesetz der Farbenfolge ausgedrückt.

Fasst man zunächst den Fall gekreuzter Polarisationsebenen in's Auge, so erkennt man, dass das Azimut $\varphi$ der Mischfarbe von einem Grenzwerthe $\varphi_0$ für $d = o$, der durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = -\pi \cdot \frac{2a + b}{b}$$

bestimmt wird, und in den vierten Quadranten des Farbenkreises fällt (da, wie wir später zeigen werden, $\cos \varphi_0$ positiv, $\sin \varphi_0$ negativ ist), bei wachsendem $d$ abnimmt, und Null wird, wenn

$$\pi d (2a + b) = 2\pi$$

geworden ist. Von hier an kehren die Farbentöne, abgesehen von Sättigung und Lichtstärke, in derselben Ordnung wieder und durchlaufen die ganze Farbenskala jedesmal, wenn $\pi d (2a + b)$ um $2\pi$ wächst, und jede solche Farbenreihe oder „Ordnung“ endigt mit dem nämlichen dem Azimute Null zugehörigen Farbenton. Bezeichnen wir den Werth von $d$, welcher der vorstehenden Gleichung genügt, mit $2\delta$, so tritt dieser Farbenton, mit welchem jede Farbenordnung schliesst und die folgende

beginnt, ein für $d = 2\delta, 4\delta, 6\delta \ldots$, und der complementäre im Azimute $\varphi = \pi$ wiederholt sich jedesmal, wenn $d = \delta, 3\delta, 5\delta \ldots$ wird. Ebenso wiederholt sich die dem Azimut $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ entsprechende Farbe bei $d = \frac{1}{2}\delta, \frac{5}{2}\delta, \frac{9}{2}\delta \ldots$, und die zugehörige Ergänzungsfarbe im Azimute $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, wenn $d = \frac{3}{2}\delta, \frac{7}{2}\delta, \frac{11}{2}\delta \ldots$ wird.

Die Grösse $2\delta$ ist hienach diejenige Dicke der Luftschicht, mit welcher die Reihe der Farben erster Ordnung endigt und diejenige zweiter Ordnung beginnt. Diese Luftdicke ist aber aus der Erfahrung bekannt; sie beträgt 550,6 Milliontel Millimeter, und ist gleich der Wellenlänge derjenigen Stelle im Spectrum, welche unserem Auge am hellsten erscheint.

Hiedurch ist aber die bisher unbestimmt gelassene Constante $a$ ebenfalls gegeben, denn nach obiger Gleichung muss

$$2a + b = \frac{1}{\delta} = \frac{1}{275,3} = 0,0036324$$

und demnach, da $b = 0,00101636$ bereits gefunden ist,

$$a = 0,0013080$$

sein.

Nachdem nun in der Gleichung

$$\frac{1}{\lambda} = a + \frac{b}{2\pi}\varphi$$

die beiden Constanten

$$a = 0,0013080$$
$$b = 0,0010164$$

bekannt sind, ist es leicht, die Stellen anzugeben, welche die Fraunhofer'schen Linien auf dem Umfang des Farbenkreises einnehmen, indem man zu jeder Wellenlänge $\lambda$ das zugehörige Azimut $\varphi$ berechnet. Man findet so:

| | $\lambda$ | $\varphi$ |
|---|---|---|
| $A$ | 760,4 | 2° 31′ |
| $a$ | 718,3 | 29 49 |
| $B$ | 686,7 | 52 30 |
| $C$ | 656,2 | 76 28 |
| $D$ | 589,6 | 137 28 |

| | $\lambda$ | $\varphi$ | |
|---|---|---|---|
| $E$ | 526,9 | 208 | 57 |
| $b$ | 518,3 | 220 | 40 |
| $F$ | 486,1 | 265 | 24 |
| $G$ | 430,7 | $359^0$ | 3 |
| $H$ | 396,8 | $360^0 + 69$ | 20 |

Aus derselben Gleichung ergeben sich für die Hauptazimute

$$\varphi = 0;\ \tfrac{1}{2}\pi;\ \pi;\ \tfrac{3}{2}\pi;\ 2\pi$$

der Reihe nach die Wellenlängen

$$\lambda = 764{,}5;\ 640{,}2;\ 550{,}6;\ 483{,}0;\ 430{,}2.$$

Die Farbenreihe des Kreises beginnt, wie man sieht, bei $\varphi = 0$ mit dem äussersten Roth und endigt bei $\varphi = 360^0$ mit dem Anfang des Violett, und das Violett selbst legt sich, aus dem vierten in den ersten oder fünften Quadranten hinübergreifend, über den Anfang des Roth. Dieses Verhalten deutet darauf hin, dass in diesem den beiden Endfarben des Spectrums gemeinsamen Gebiete die purpurnen Farbentöne Platz zu finden haben, welche zu den gegenüberliegenden grünen complementär sind. Ergibt sich bei Berechnung eines Farbengemisches ein in diese Region fallendes Azimut, so ist die Mischfarbe als Purpur zu bezeichnen.

Will man den Farbenkreis in Sectoren theilen, welche den Farbeneindrücken auf unser Auge entsprechen, so dürfte die folgende Eintheilung die passendste sein, welche mit der von v. Bezold[1]) gewählten sowohl in der Benennung der Farben als auch in der Breite der zugehörigen Sectoren übereinstimmt.

| | $\varphi$ | $\lambda$ |
|---|---|---|
| Purpurviolett | $0^0$— $20^0$ | 765—733 ; 430—420 |
| Purpur | 20 — 38 | 733—707 ; 420 - 411 |
| Carmin | 38 — 58 | 707—679 ; 411—402 |
| Hochroth | 58 — 80 | 679—652 |
| Orange | 80 —108 | 652—620 |
| Gelb | 108 —140 | 620—587 |
| Gelbgrün | 140 —180 | 587—551 |

1) v. Bezold l. c.

| | $\varphi$ | $\lambda$ |
|---|---|---|
| Grün | 180—238 | 551—505 |
| Blaugrün | 238—278 | 505—478 |
| Cyanblau | 278—310 | 478—458 |
| Ultramarin | 310—338 | 448—442 |
| Blauviolett | 338—360 | 442—430 |

Den Purpurtönen (Purpurviolett, Purpur, Carmin), welchen in unserem Farbenkreis je zwei Wellenlängen (Roth und Violett) entsprechen, liegt das complementäre Grün diametral gegenüber. Statt der Newton'schen Bezeichnung „Indigo“ ist die Benennung „Ultramarin“ gewählt, nach dem Farbstoff, welcher den in dieser Region herrschenden Farbenton am richtigsten wiedergibt. Selbstverständlich können die angenommenen Farbengrenzen nicht als absolut feste angesehen werden, da die Farben allmählig in einander übergehen, und unser Urtheil namentlich an den Grenzen unsicher ist und ausserdem noch von der Helligkeit beeinflusst wird. Für eine bestimmte mittlere Helligkeit aber dürfte die Eintheilung angenähert richtig sein.

Führen wir in unsere Formeln die Grösse $\delta$ ein, d. i. die halbe Wellenlänge der hellsten Stelle des Spectrums, so lauten dieselben (für gekreuzte Polarisationsebenen):

$$M = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi d}{\delta} \cdot \frac{\sin \pi b d}{\pi b d}\right),$$

$$Mx = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{b d}{1 - b^2 d^2} \cdot \cos\frac{\pi d}{\delta} \sin \pi b d\,,$$

$$My = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{1 - b^2 d^2} \cdot \sin\frac{\pi d}{\delta} \sin \pi b d\,.$$

Die Coordinaten $x$ und $y$ entsprechen den Punkten einer Curve, die in ihrem Verlaufe auf der Farbentafel die Farbenfolge versinnlicht, indem ihr Radiusvector:

$$r = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin \pi b d}{1 - b^2 d^2} \cdot \frac{\sqrt{1 - (1 - b^2 d^2)\cos^2\frac{\pi d}{\delta}}}{1 - \cos\frac{\pi d}{\delta} \cdot \frac{\sin \pi b d}{b d}},$$

welcher vermöge der Gleichung

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\operatorname{tg} \pi d \delta^{-1}}{b d}$$

als Function des Polarwinkels $\varphi$ anzusehen ist, bei wachsender Dicke ($d$) der Luftschicht in rückläufiger Bewegung den Umkreis durchläuft, durch seine Richtung den Farbenton, durch seine Länge den Sättigungsgrad der Mischfarbe angibt, und für $d = 2\delta, 4\delta, 6\delta \ldots$ im Azimute $\varphi = 0$ jedesmal die Grenze einer Farbenordnung überschreitet.

Für $d = \frac{2n+1}{2}\delta$ ist stets $M = \frac{1}{2}$ und $x = 0$, das Azimut $\varphi$ sonach $\frac{1}{2}\pi$ oder $\frac{3}{2}\pi$ je nachdem $y$ positiv oder negativ ist. Da in diesem Falle wegen $M' = M$ auch $y' = -y$ und $r' = r$ ist, so sind hier die complementären Farbentöne bei gleicher Lichtstärke auch von gleicher Sättigung.

Wird die Dicke $d$ oder der Gangunterschied unendlich klein, so verschwindet zwar die Lichtstärke $M$ und wird Null für $d = 0$; die Farbe aber nähert sich einer bestimmten Grenze, und erreicht dieselbe, wie oben bereits erwähnt wurde, in dem Azimut

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = -\frac{\pi}{b\,d},$$

indem die Coordinaten und der Radiusvector für $d = 0$ die Grenzwerthe:

$$x_0 = \frac{6\,b^2\,\delta^2}{\pi^2(b^2\,\delta^2+3)}, \qquad y_0 = -\frac{6\,b\,\delta}{\pi\,(b^2\,\delta^2+3)}, \qquad r_0 = \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{6\,b\,\delta}{b^2\,\delta^2+3}\sqrt{\pi^2+b^2\,\delta^2}$$

annehmen. Von diesem Punkte, welcher, da $x_0$ positiv, $y_0$ negativ ist, im vierten Quadranten liegt, geht die Farbencurve aus.

Für die von uns angenommenen Werthe der Constanten $b$ und $\delta$ ergibt sich:

$$x_0 = 0{,}015462 \qquad y_0 = -0{,}173599\,, \qquad r_0 = 0{,}174286,$$
$$\varphi_0 = 360^0 - 84^0\,54'\,37''$$

und als Wellenlänge der Grenzfarbe:

$$\lambda_0 = 479{,}7 \text{ (Cyanblau)}$$

statt welcher jedoch, da die Lichtstärke $M = 0$ ist, Schwarz gesehen wird.

Bei der complementären Erscheinung nähert sich mit verschwindendem $d$ das Azimut dem von dem vorigen um $180^0$ verschiedenen Grenzwerth:

$$\varphi_0' = 180^0 - 84^0\,54'\,37''$$

und der Farbenton dem complementären Orange von der Wellenlänge

$$\lambda_0' = 634{,}4\,,$$

welche Farbe jedoch ebenfalls nicht gesehen wird. Denn da jetz $x' = 0$, $y' = 0$ und $M' = 1$ ist, so wird die Mischfarbe bei voller Lichtstärke reines Weiss, und die complementäre Farbencurve beginnt im Mittelpunkt des Kreises.

Wenn $\pi b d = 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi\ ..$ oder $d = 2/b,\ 3/b,\ 4/b\ ...$ wird, so verschwinden $x$ und $y$ gleichzeitig, und die Lichtstärken $M$ und $M'$ werden gleich $\frac{1}{2}$; die Curve geht alsdann in beiden Fällen durch den Mittelpunkt des Kreises oder durch Weiss.

Ist $b d = 1$ oder $d = 1/b$, so wird zwar ebenfalls $M = M' = \frac{1}{2}$, dagegen hat man jetzt, weil für $b d = 1$

$$\frac{\sin \pi b d}{1 - b^2 d^2} = \frac{\pi}{2}$$

ist:

$$x = \ \ \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{b\delta}\,,\quad y = -\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{b\delta}\,,\quad r = \frac{1}{2}\,,\quad \operatorname{tg}\varphi = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{b\delta} = \operatorname{tg}\varphi'\,,$$

$$x' = -\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{b\delta}\,,\quad y' = \ \ \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{b\delta}\,,\quad r' = \frac{1}{2}\,,\qquad \varphi = 4\pi - \frac{\pi}{b\delta}\,,\ \varphi' = 5\pi - \frac{\pi}{b\delta}\,,$$

$$\lambda = \frac{2}{3b}\,,\qquad \lambda' = \frac{1}{2b}\,,$$

und numerisch, da

$$\frac{\pi}{b\delta} = 11{,}22780 = 4\pi - 76^0\,41'\,40''$$

ist:

$$\varphi = 76^0\,41'\,40''\,,\quad \lambda = 656 \text{ (Hochroth bei } C)$$

und für die complementäre Erscheinung:

$$\varphi' = 256^0\,41'\,40'' \qquad \lambda' = 492 \text{ (Blaugrün).}$$

Mit unbegrenzt wachsender Dicke nähert sich die Lichtstärke dem Werthe $\frac{1}{2}$, mit immer kleiner werdenden Schwankungen ober- und unterhalb dieses Werthes, und der Farbenton nähert sich dem Weiss, da ersichtlich sowohl $x$ als $y$ mit zunehmendem $d$ gegen Null rücken.

Die Geschwindigkeit, mit welcher bei gleichmässigem Anwachsen der Dicke $d$ des Blättchens der Farbenton sich ändert, wird ausgedrückt durch den Differentialquotienten:

$$\frac{\delta \varphi}{\delta d} = -b \cdot \frac{\pi d \delta^{-1} - \frac{1}{2} \sin 2 \pi d \delta^{-1}}{\sin^2 \pi d \delta^{-1} + b^2 d^2 \cos^2 \pi d \delta^{-1}}.$$

Hieraus ergibt sich in den Hauptazimuten $\varphi = 0, \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$

$$\text{für } d = (n+1)\delta: \quad \frac{\delta \varphi}{\delta d} = -\frac{\pi}{(n+1) b \delta^2},$$

$$\text{für } d = \frac{2n+1}{2}\delta: \quad \frac{\delta \varphi}{\delta d} = -\frac{2n+1}{2} b \pi$$

und in Zahlen:

| $d$ | $\frac{\delta \varphi}{\delta d}$ | $d$ | $\frac{\delta \varphi}{\delta d}$ |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}\delta$ | — 0,001597 | $\delta$ | — 0,040784 |
| $\frac{3}{2}\delta$ | 0,004790 | $2\delta$ | 0,020392 |
| $\frac{5}{2}\delta$ | 0,007983 | $3\delta$ | 0,013595 |
| $\frac{7}{2}\delta$ | 0,011176 | $4\delta$ | 0,010196 |
| $\frac{9}{2}\delta$ | 0.014369 | | |

Man ersieht aus dieser kleinen Tabelle, dass in den niedrigeren Farbenordnungen der Farbenwechsel in den Azimuten $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ weit rascher erfolgt als in den zwischen liegenden Azimuten $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ und $\varphi = \frac{3}{2}\pi$, bei gleicher Zunahme von $d$; d. h. das Purpurviolett und das hiezu complementäre Gelbgrün sind, in den niedrigeren Ordnungen, „empfindliche Farben“ oder „Uebergangsfarben,“ welche bei geringer Aenderung des Gangunterschiedes sich am raschesten ändern. Die Maxima der Empfindlichkeit oder der Geschwindigkeit $\delta\varphi/\delta d$ fallen übrigens nicht genau mit den Hauptazimuten $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ zusammen: es tritt ein solches z. B. nicht genau bei $d = 2\delta$, sondern wenig davon abweichend bei $d = 2\delta - \frac{1}{15}\delta$ oder bei $\varphi = 7^0\, 12'$ im Purpurviolett ein, und beträgt daselbst:

$$\frac{\delta \varphi}{\delta d} = -0{,}020625.$$

Um unsere Theorie mit den Beobachtungen zu vergleichen, berechnen wir die Farbenskala, welche von Billet[1]) nach Beobachtungen von Brücke[2]) zusammengestellt worden ist.

1) Billet, Traité d'Optique physique, T. I, p. 490. 1858.
2) Brücke, Pogg. Ann. Bd. LXXXIV.

Die Rechnung nimmt dabei folgenden Gang. Aus der Gleichung:

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\operatorname{tg}\pi d \delta^{-1}}{b d}$$

bestimmt sich sofort für jede gegebene Luftdicke $d$ das Azimut $\varphi$, welches auf dem Farbenkreise (falls man nur noch die leicht ersichtlichen Vorzeichen von $x$ und $y$ berücksichtigt) die zugehörige Mischfarbe unmittelbar angibt. Will man daher blos den Farbenton der Mischung finden, so genügt diese einzige Gleichung, welche eine fast mühelose Rechnung gestattet. Hiemit ist das anmuthige Farbenspiel der Seifenblasen in die knappe Formel eines einfachen Gesetzes gefasst.

Die der Mischfarbe zugehörige Wellenlänge ergibt sich alsdann aus der Gleichung:

$$\frac{1}{\lambda} = a + \frac{b}{2\pi}\varphi.$$

Setzt man nun, behufs bequemer logarithmischer Rechnung,

$$\cos\frac{\pi d}{\delta}\cdot\frac{\sin\pi b d}{\pi b d} = \cos\psi,$$

so ist die Lichtstärke:

$$M = \sin^2\tfrac{1}{2}\psi$$

und der Sättigungsgrad $r$ bestimmt sich mittels der Gleichung:

$$M r = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{b^2 d^2}{1 - b^2 d^2}\cdot\frac{\cos\psi}{\cos\varphi}.$$

Hiedurch sind aber auch die entsprechenden Grössen für die complementäre Erscheinung sofort gegeben; denn man hat:

$$\varphi' = \varphi \pm \pi, \qquad \frac{1}{\lambda'} = \frac{1}{\lambda'} \pm \frac{b}{2},$$

$$M' \;= 1 - M = \cos^2\tfrac{1}{2}\psi,$$

$$M' r' = M r \text{ oder } r' = r \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\psi.$$

Die bei der Rechnung zu benutzenden Constanten sind, wie oben bereits angegeben:

$$a = 0{,}0013080, \qquad b = 0{,}0010164, \qquad \delta = 275{,}3.$$

Die Ergebnisse der Rechnung sind in der am Schlusse folgenden Tabelle zusammengestellt. Die Ueberschriften „Anfang schwarz" und

„Anfang weiss“ entsprechen resp. der Erscheinung bei gekreuzten und bei parallelen Polarisationsebenen, oder den Farbenringen mit schwarzer und mit weisser Mitte. Die Columne $d$ enthält die gemessenen Werthe der Luftdicke oder des Gangunterschiedes, wobei noch die Vielfachen der Grösse $\delta$, die in der Anordnung der Farbenreihe eine so wichtige Rolle spielt, angegeben sind, die Columnen „Farbe beobachtet“ enthalten die zugehörigen von Brücke[1]) beobachteten Farbentöne. Unter $\varphi$ steht, für die erste Erscheinung, das berechnete Azimut der Mischfarbe; das Azimut $\varphi'$ für die complementäre Erscheinung ist nicht angegeben, da es sich von $\varphi$ stets um $\pi$ unterscheidet und somit durch die Angabe von $\varphi$ bereits bestimmt ist. Die Columnen $\lambda$ und $\lambda'$ enthalten die berechneten Wellenlängen der Mischfarben. Die Lichtstärken $M$ und $M'$ und die Sättigungsverhältnisse $r$ und $r'$ sind in Procenten angegeben, d. i. auf 100 als Einheit bezogen. Die Rubriken „Farbe berechnet“ benennen die Farben nach ihrer Lage auf unserem Farbenkreise, ohne Rücksicht auf Lichtstärke und Sättigung, welche beiden Umstände noch mitberücksichtigt werden müssen, wenn der wirklich wahrgenommene Farbenton beurtheilt werden soll. So ist z. B. für $d = o$ der Lichteindruck in Wirklichkeit nicht Grünblau (die oben berechnete Grenzfarbe), sondern Schwarz, weil die Lichtstärke $M = o$ ist, und für die complementäre Erscheinung nicht Orange, sondern Weiss, weil die Sättigung $r = o$ ist. Ebenso ist für $d = 234$ die Mischfarbe ihrem Orte in der Farbentafel nach Grün, jedoch von geringer Sättigung ($r = 6\%$) und grosser Lichtstärke ($M = 91\%$). Die hiezu complementäre Farbe ist nach ihrer Lage im Farbenkreise Hochroth, jedoch von geringer Lichtstärke ($M' = 9{,}5\%$) und hohem Sättigungsgrad ($r' = 61\%$). Die Rechnung stimmt sonach auch hier mit der Erfahrung vollkommen überein, denn das schwachgesättigte lichtstarke Grün ist in der That „Grünlichweiss“, und das stark gesättigte lichtschwache Roth ist „Braun,“ wie die Beobachtung fordert. Berücksichtigt man in dieser Weise zu jeder berechneten Farbe die zu-

1) Von den Farbenbenennungen Billet's habe ich nur eine abgeändert, beziehungsweise nach Brücke's Beobachtungen richtig gestellt. In der Farbenreihe mit weissem Anfang ist nämlich bei $d = 259$ in der Billet'schen Tabelle „Rouge clair“ oder „Hellroth“ angegeben. Brücke hat aber an dieser Stelle nur dunkelrothe Farbentöne beobachtet. Dass letztere Angabe richtig ist, zeigt ein Blick in den Polarisationsapparat auf eine keilförmige Gypsplatte. Auch das darauffolgende „Carminroth“ ist sehr dunkel.

gehörige Intensität und Sättigung, so ergiebt sich eine sehr befriedigende Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung. Insbesondere stimmen auch die von Brücke beobachteten Maxima der Lichtstärke mit den Maximis unseres Ausdruckes $M$ genau überein. Derselbe findet nämlich die hellste Stelle in der ersten Farbenordnung (Anfang Schwarz) bei dem Uebergang des Weiss zum blassen Strohgelb, und die hellste Stelle der zweiten Ordnung beim Uebergang des Hellgrün zum Gelblichgrün.

Auf der Tafel I sind die beiden Farbencurven mit den Radienvectoren $r$ und $r'$ nach den Daten dieser Tabelle in den Farbenkreis eingezeichnet; diejenige für gekreuzte Polarisationsebenen ist ausgezogen, die complementäre für parallele Polarisationsebenen punktirt. Am Rande des Farbenkreises sind die Bezeichnungen der Farbensectoren nach von Bezold und die Lagen der Fraunhofer'schen Linien angegeben. Die Azimute der zu einander complementären Grenzfarben Orange und Grünlich-Blau werden durch den punktirten Durchmesser angezeigt.

Auf diesem Durchmesser liegt, nahe der Grenze zwischen Blaugrün und Cyanblau, der oben bestimmte Punkt, von welchem die erstere Curve ausgeht, wenn der Gangunterschied von Null an zunimmt. Sie nähert sich von hier aus fast geradlinig dem Weiss, und geht auf der grünen Seite sehr nahe daran vorüber; das Weiss erster Ordnung erscheint in der That sehr schwach grünlich. Die Curve geht sodann mit rasch wachsender Sättigung durch Gelb, Orange und Roth und erreicht im Carmin den höchsten Sättigungsgrad, worauf sie rasch durch Purpur und die erste Uebergangsfarbe hindurch das Ende der ersten Farbenordnung erreicht. In der zweiten Ordnung geht die Curve bald durch ein stark gesättigtes Blau, im Grün jedoch wird die Farbe wieder schlechter, das Grün zweiter Ordnung ist matt; dafür aber übertrifft das Gelb zweiter Ordnung dasjenige der ersten an Reinheit, wogegen die rothen Farbentöne hier hinter denjenigen der ersten Ordnung an Tiefe der Sättigung zurückbleiben. Die Curve gelangt sodann durch die zweite Uebergangsfarbe hindurch zum Ende der zweiten Farbenordnung. Das Blau der dritten Ordnung ist viel matter als dasjenige zweiter, die Farbe bessert sich schon im Blaugrün, und erreicht ihre höchste Reinheit im Grün, welches dem Grün zweiter Ordnung an Schönheit weit überlegen ist. Dagegen ist das Gelb dritter Ordnung nicht so rein wie dasjenige erster und

zweiter Ordnung; die Sättigung nimmt noch ab im Roth, wird aber im Purpur gegen Ende der Ordnung wieder etwas vollkommener. In der vierten Ordnung nähert sich die Curve, nachdem sie mit abnehmender Färbung Blau und Grün durchlaufen, rasch dem Weiss.

Die Curve gibt nur den Sättigungsgrad der Mischfarben an, nicht aber ihre Lichtstärke, auf welche doch, wie oben bereits gezeigt wurde, bei Beurtheilung des Farbentons ebenfalls Rücksicht zu nehmen ist. Man könnte sich, um das Diagramm nach dieser Richtung zu vervollständigen, die Intensität als dritte Coordinate in dem zugehörigen Curvenpunkte auf der Ebene der Farbentafel senkrecht errichtet denken, und dieselbe etwa durch Schattenconstruction in derselben Zeichnung ersichtlich machen, welche hiedurch freilich sehr verwickelt würde. Man kann aber auch die Licktstärke $M$ als zum Polarwinkel $\varphi$ gehörigen Radiusvector auffassen, und den Gang der Intensität wie jenen der Sättigung durch eine in dem Farbenkreise verlaufende Curve veranschaulichen, wie dies auf Taf. II geschehen ist, wo die ausgezogene Curve für die Lichtstärke bei gekreuzten, die punktirte bei parallelen Schwingungsebenen gilt.

Unter Mitberücksichtigung der Intensität ergibt sich z. B., dass das Roth erster Ordnung, obwohl gesättigter als das Roth der zweiten Ordnung, dennoch wegen seiner geringen Lichtstärke im Vergleich mit letzterem ziemlich unscheinbar sein muss. Blau und Gelb der zweiten Ordnung und Grün der dritten Ordnung vereinigen einen beträchtlichen Sättigungsgrad mit grosser Lichtstärke, und erscheinen daher als reine und glänzende Farben.

Die mit Weiss im Mittelpunkt des Kreises beginnende Farbencurve der complementären Erscheinung geht zuerst mit geringer Sättigung und grosser Lichtstärke durch die Grenzfarbe Orange rasch in Roth über; auch hier zeigt sich das Roth erster Ordnung gesättigter als dasjenige zweiter, und übertrifft hierin sogar noch das Roth der ersten Ordnung im vorigen Fall, bleibt jedoch wegen sehr geringer Lichtstärke an Glanz hinter dem Roth zweiter Ordnung zurück, welches bei etwas geringerer Reinheit hinreichende Intensität besitzt. Das Blau zweiter Ordnung ist stark gesättigt, aber viel dunkler als das schöne Blau der dritten Ordnung, und das Grün letzterer Ordnung wetteifert an Lichtstärke und Reinheit mit dem Grün gleicher Ordnung im vorigen Fall. Durch Rein-

heit zeichnen sich noch aus das Gelb und Orange der zweiten, und das Grün der vierten Ordnung, welches der entsprechenden Farbe der vorigen Reihe überlegen ist. Im Ganzen zeigt übrigens diese Farbenfolge einen ähnlichen Verlauf wie die vorige.

Bemerkenswerth sind noch die Durchschnittspunkte einer jeden der beiden Farbencurven, welche zeigen, dass man denselben Farbenton von gleicher Sättigung bei zwei verschiedenen Gangunterschieden erhalten kann. Bei der ersteren Curve gehört der erste Durchschnittspunkt, nahe der Grenze zwischen Roth und Orange, der ersten und zweiten Farbenordnung an; ein Blick auf die Tafel II ergibt, dass diese Farbe in der zweiten Ordnung heller ist. Die zweite und dritte Ordnung zeigen zwei solche Durchschnittspunkte, den einen im Blau, den anderen im Gelbgrün, mit geringem Unterschied in der Helligkeit. Bei der zweiten Farbencurve liegt ein den beiden ersten Ordnungen gemeinsamer Punkt im Roth, mit grösserer Lichtstärke in der zweiten Ordnung. In der zweiten und dritten Ordnung finden sich zwei Durchschnittspunkte, im Blau, dunkler in der zweiten, hell in der dritten, und im Gelb, hell in der zweiten, dunkler in der dritten Ordnung; ferner gibt es noch zwei der zweiten und der vierten Ordnung gemeinschaftliche Punkte im Blaugrün und Gelbgrün, beide mit grösserer Lichtstärke in der zweiten Ordnung.

Derselbe Gang der Rechnung und Discussion findet Anwendung auf jede Lichterscheinnng, für welche der Intensitätsausdruck als Function der Wellenlänge gegeben ist; nur werden die Integrationen nicht immer so einfach auszuführen sein, wie in dem mitgetheilten Beispiel der Farben dünner Blättchen. Für die Beugungserscheinung eines engen Spaltes z. B. hat man:

$$f\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{\sin^2 \pi \beta \sin \chi \lambda^{-1}}{(\pi \beta \sin \chi \lambda^{-1})^2},$$

wenn $\beta$ die Breite des Spaltes, $\chi$ den Beugungswinkel, folglich $\beta \sin \chi = d$ den Gangunterschied der Randstrahlen bezeichnet.

Die Integrale:

$$M = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \pi d(a + \frac{b}{2\pi}\varphi)}{(\pi d(a+\frac{b}{2\pi}\varphi))^2} d\varphi,$$

$$Mx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \pi d(a + \frac{b}{2\pi}\varphi)}{(\pi d(a+\frac{b}{2\pi}\varphi))^2} \cos\varphi\, d\varphi,$$

$$My = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \pi d(a + \frac{b}{2\pi}\varphi)}{(\pi d(a+\frac{b}{2\pi}\varphi))^2} \sin\varphi\, d\varphi$$

führen alsdann auf die transcendenten Functionen Integralsinus und Integralcosinus, und lassen sich mit Hilfe von Tabellen dieser Functionen leicht berechnen. Ohne für jetzt auf diese Rechnungen ausführlich einzugehen, beschränken wir uns darauf, die Mischfarbe zu ermitteln für den Fall, dass $\pi d$ sehr klein ist. Entwickelt man den Intensitätsausdruck in eine convergente nach Potenzen von $d$ fortschreitende Reihe und bleibt bei der zweiten Potenz von $d$ stehen, so wird:

$$\frac{\sin^2 \pi d(a + \frac{b}{2\pi}\varphi)}{(\pi d(a+\frac{b}{2\pi}\varphi))^2} = 1 - \frac{\pi^2 d^2}{3}\left(a + \frac{b}{2\pi}\varphi\right)^2 = 1 - \frac{\pi^2 d^2}{3}\left(a^2 + \frac{ab}{\pi}\varphi + \frac{b^2}{4\pi^2}\varphi^2\right).$$

Da nun

$$\int_0^{2\pi}\cos\varphi\, d\varphi = 0, \quad \int_0^{2\pi}\varphi\cos\varphi\, d\varphi = 0, \quad \int_0^{2\pi}\varphi^2\cos\varphi\, d\varphi = 4\pi,$$

$$\int_0^{2\pi}\sin\varphi\, d\varphi = 0, \quad \int_0^{2\pi}\varphi\sin\varphi\, d\varphi = -2\pi, \quad \int_0^{2\pi}\varphi^2\sin\varphi\, d\varphi = -4\pi^2$$

ist, so ergiebt sich:

$$M = 1 - \frac{\pi^2 d^2}{3}(a^2 + ab + \tfrac{1}{3}b^2) = 1 - \frac{\pi^2 d^2}{36\delta^2}(b^2\delta^2 + 3),$$

$$Mx = -\tfrac{1}{6}b^2 d^2,$$

$$My = \tfrac{1}{6}\pi b d^2(2a + b) = \frac{\pi b d^2}{6\delta}.$$

Demnach nähert sich das Azimut der Mischfarbe mit verschwindendem Gangunterschied, d. h. wenn entweder der Beugungswinkel oder die Breite des Spaltes immer kleiner wird, einem Grenzwerthe $\varphi_0$, welcher durch dieselbe Gleichung

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{\pi}{b \delta}$$

bestimmt wird, welche wir bei den Farben dünner Blättchen bereits gefunden haben. Da $x$ unmittelbar vor dem Verschwinden von $d$ negativ, $y$ positiv ist, so ist diese Grenzfarbe das oben schon erwähnte Orange $\lambda = 634$. Für $d = 0$ selbst wird sowohl $x$ als $y$ und somit auch die Sättigung Null, und $M = 1$; es herrscht also in der Mitte der Erscheinung reines Weiss mit voller Lichtstärke, welches nach beiden Seiten hin in das Grenz-Orange übergeht.

Es leuchtet übrigens ein, dass dieselbe Grenzfarbe jedesmal auftreten muss, wenn der Intensitätsausdruck sich in eine Reihe von der Form

$$f\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 1 - A\frac{d^2}{\lambda^2} + B\frac{d^4}{\lambda^4} - \dots$$

entwickeln lässt, wo $A$, $B$ u. s. f. positive Constante sind. Denn man hat alsdann:

$$M = 1 - A d^2(a^2 + a b + \tfrac{1}{3} b^2) = 1 - \frac{A d^2}{12 \delta^2}(b^2 \delta^2 + 3),$$

$$M x = -\frac{A b^2 d^2}{2 \pi^2},$$

$$M y = \frac{A b d^2}{2 \pi}(2 a + b) = \frac{A b d^2}{2 \pi \delta}.$$

Nimmt dagegen der Intensitätsausdruck, in eine Reihe nach steigenden Potenzen des Gangunterschiedes entwickelt, die Form

$$f\left(\frac{1}{\lambda}\right) = A\frac{d^2}{\lambda^2} - B\frac{d^4}{\lambda^4} + \dots$$

an, so findet man:

$$M = \frac{A d^2}{12 \delta^2}(b^2 \delta^2 + 3),$$

$$M x = \frac{A b^2 d^2}{2 \pi^2},$$

$$M y = -\frac{A b d^2}{2 \pi \delta};$$

in allen diesen Fällen also erlischt die Lichtstärke $M$ mit verschwindendem Gangunterschied, die Coordinaten $x$ und $y$ aber und mit ihnen die Sättigung $r$ convergiren gegen dieselben oben bereits gefundenen Grenzen:

$$x_0 = \frac{6\,b^2\,\delta^2}{\pi^2(b^2\,\delta^2+3)}\,,\quad y_0 = -\frac{6\,b\,\delta}{\pi\,(b^2\,\delta^2+3)}\,,\quad r_0 = \frac{6\,b\,\delta}{\pi^2(b^2\delta^2+3)}\sqrt{\pi^2+b^2\,\delta^2}\,,$$

und die Grenzfarbe ist jetzt, da $x_0$ positiv und $y_0$ negativ ist, das zu jenem Orange complementäre Cyanblau $\lambda = 480$.

Die beiden complementären Grenzfarben bilden demnach eine Erscheinung von grosser Allgemeinheit, welche unter den verschiedensten Umständen immer in derselben Weise auftritt.

Insbesondere dürften auch die Farben trüber Mittel, das Blau im auffallenden, das Orange im durchfallenden Licht, die „Grundphänomene" der Goethe'schen Farbenlehre, unseren beiden Grenzfarben entsprechen.

Nach der Theorie von Clausius[1]) wäre das Blau des Himmels nichts anderes als die Grenzfarbe Cyanblau mit der Wellenlänge 480, und nach meiner[2]) Theorie der Abendröthe, welche dieselbe als Beugungserscheinung erklärt, entspricht die Grenzfarbe Orange mit der Wellenlänge 634 der Farbe des Abendroths.

---

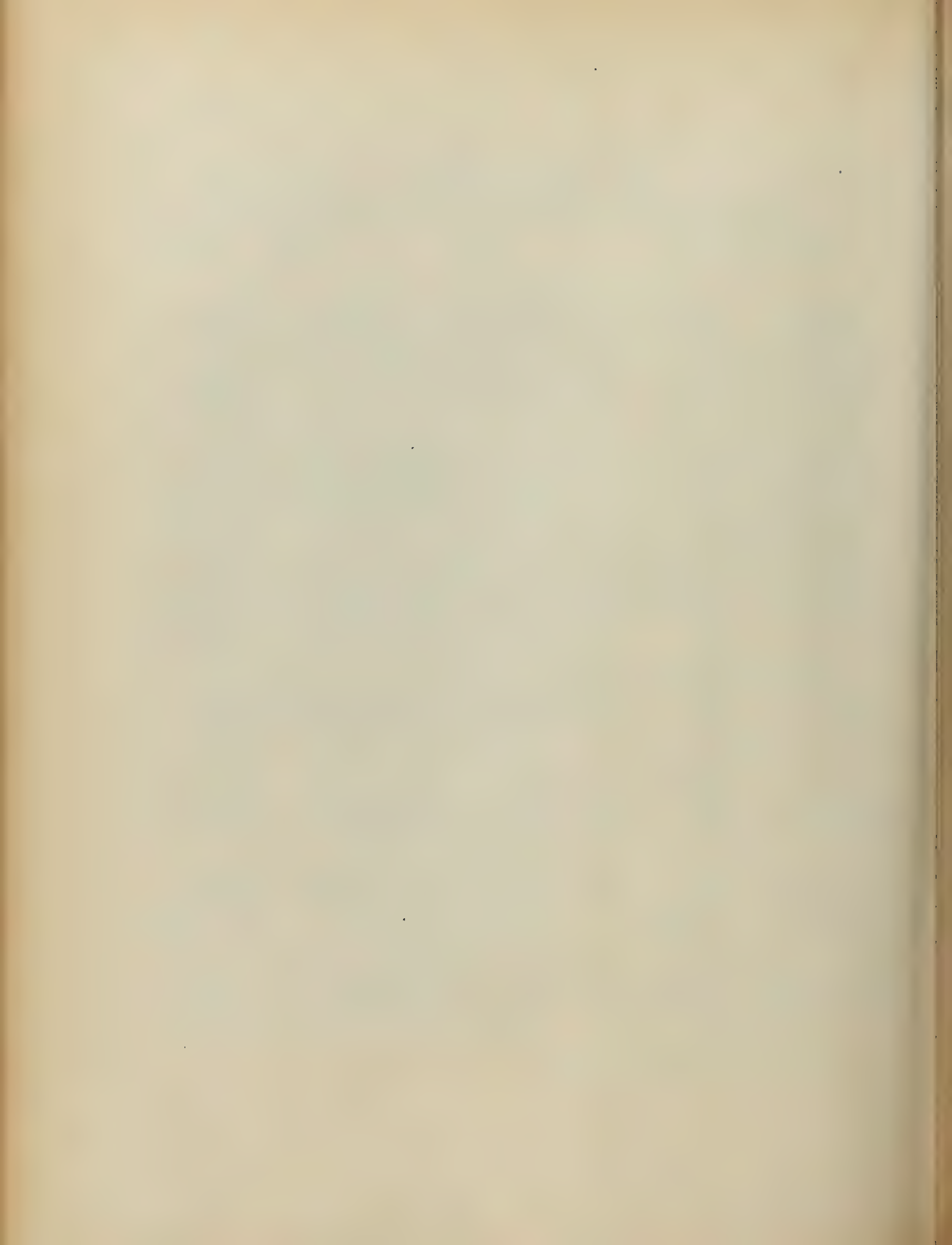
1) Clausius, Die Lichterscheinungen der Atmosphäre (Grunert, Beiträge zur meteorologischen Optik), Leipzig, 1850.

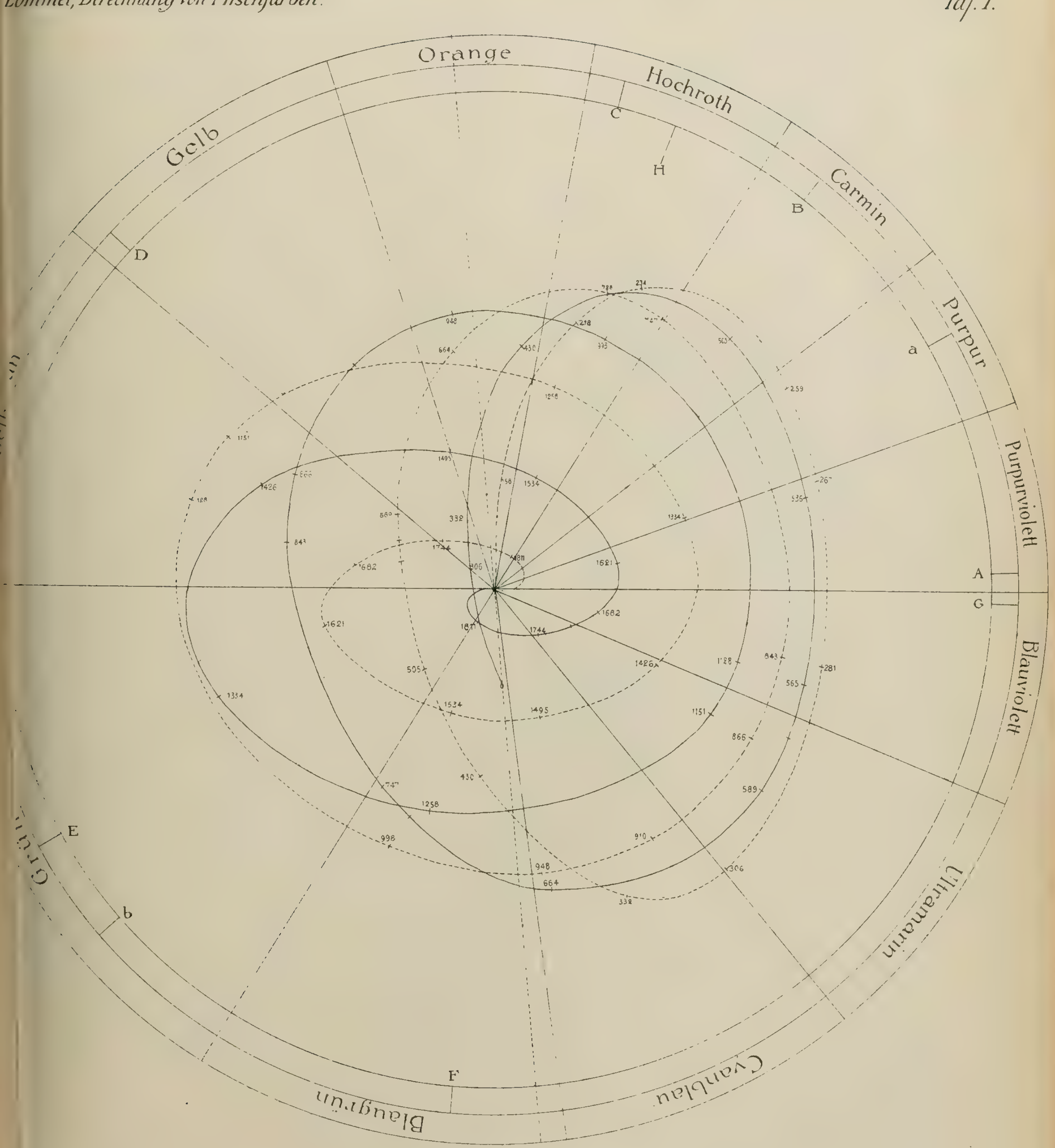
2) Lommel, Grunert's Archiv, Bd. 36, 1861. Pogg. Ann. Bd. 131. 1867.

## Die Farben dünner Blättchen.

**Anfang schwarz.** **Anfang weiss.**

| $d$ | Farbe beobachtet | Farbe berechnet | $\varphi$ | $\lambda$ | $r$ | $M$ | $M'$ | $r'$ | $\lambda'$ | Farbe berechnet | Farbe beobachtet |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | Schwarz | Grünlichblau | $2\pi-84^0\ 55'$ | 480 | 17,4 | 0 | 100 | 0 | 634 | Orange | Weiss |
| 40 | Eisengrau | Grünlichblau | $2\pi-85\ 16$ | 480 | 17,1 | 5,2 | 94,8 | 0,9 | 635 | Orange | Weiss |
| 97 | Lavendelgrau | Grünlichblau | $2\pi-87\ 11$ | 481 | 15,7 | 28,0 | 72,0 | 6,1 | 637 | Orange | Gelblichweiss |
| 158 | Blaugrau | Grünlichblau | $\pi+87\ 50$ | 484 | 12,6 | 61,0 | 39,0 | 19,7 | 643 | Orange | Bräunlichweiss |
| 218 | Hellgrau | Blaugrün | $\pi+73\ 52$ | 494 | 7,9 | 86,6 | 13,4 | 50,6 | 659 | Orangeroth | Gelbbraun |
| 234 | Grünlichweiss | Blaugrün | $\pi+64\ 59$ | 500 | 6,3 | 90,5 | 9,5 | 60,6 | 671 | Roth | Braun |
| 259 | Fast rein weiss | Grün | $\pi+35\ 34$ | 522 | 4,3 | 93,7 | 6,3 | 63,8 | 710 | Carmin | Dunkelroth |
| 267 | Gelblichweiss | Grün-Gelbgrün | $\pi+19\ 18$ | 535 | 3,9 | 94,0 | 6,0 | 61,3 | 734 | Purpur | Carminroth |
| $\delta$ 275 | Strohgelb, blass | Gelbgrün | $\pi$ | 551 | 4,0 | 93,8 | 6,2 | 60,1 | 765 | Purpurviolett | Braunr., fast schw. |
| 281 | Strohgelb | Grüngelb | $\pi-12\ 51$ | 562 | 4,2 | 93,5 | 6,5 | 60,6 | 437 | Blauviolett | Dunkelviolett |
| 306 | Hellgelb | Gelb | $\pi-49\ 36$ | 597 | 7,3 | 89,8 | 10,2 | 64,8 | 458 | Ultramarin | Indigo |
| 332 | Glänzendgelb | Gelb | $\pi-65\ 56$ | 613 | 12,5 | 82,8 | 17,2 | 60,2 | 468 | Cyanblau | Blau |
| 430 | Orangegelb | Orange | 85 5 | 646 | 44,1 | 43,1 | 56,9 | 33,4 | 486 | Grünblau | Grünlichblau |
| 505 | Röthlichorange | Carmin | 48 9 | 693 | 62,5 | 23,1 | 76,9 | 18,7 | 512 | Grün-Blaugrün | Bläulichgrün |
| 536 | Warmes Roth | Purpur | 17 9 | 737 | 58,6 | 21,5 | 78,5 | 16,1 | 536 | Grün | Blassgrün |
| 2 $\delta$ 551 | Dunkleres Roth | Purpurviolett | 0 | 765 | 57,8 | 22,1 | 77,9 | 16,3 | 551 | Gelbgrün | Gelblichgrün |
| 565 | Purpur | Blauviolett | $2\pi-16\ 6$ | 439 | 58,2 | 23,4 | 76,6 | 17,8 | 565 | Gelbgrün | Hellgrün |
| 575 | Violett | Blauviolett | $2\pi\ 26\ 4$ | 444 | 59,0 | 24,7 | 75,3 | 19,4 | 574 | Gelbgrün | Grünlichgelb |
| 589 | Indigo | Ultramarin | $2\pi-38\ 3$ | 451 | 60,1 | 27,1 | 72,9 | 22,3 | 585 | Gelbgrün-Gelb | Lebhaft gelb |
| 664 | Himmelblau | Cyanblau | $2\pi-79\ 9$ | 476 | 54,9 | 44,5 | 55,5 | 44,0 | 628 | Orange | Orange |
| 728 | Grünlichblau | Blaugrün | $\pi+70\ 10$ | 496 | 43,1 | 56,9 | 43,1 | 56,8 | 664 | Hochroth | Bräunlichorange |
| 747 | Grün | Grün | $\pi+58\ 57$ | 504 | 40,0 | 58,9 | 41,1 | 57,4 | 678 | Hochroth-Carm. | Hellcarminroth |
| 3 $\delta$ 826 | Hellgrün | Gelbgrün | $\pi$ | 551 | 37,0 | 59,2 | 40,8 | 53,5 | 765 | Purpurviolett | Purpur |
| 843 | Gelblichgrün | Gelbgrün | $\pi-12\ 59$ | 562 | 38,8 | 57,9 | 42,1 | 53,4 | 437 | Blauv.-Purpurv. | Violettpurpur |
| 866 | Grünlichgelb | Gelbgrün | $\pi-29\ 14$ | 577 | 42,0 | 56,0 | 44,0 | 53,4 | 446 | Ultram.-Blauv. | Violett |
| 910 | Reines Gelb | Gelb | $\pi-57\ 4$ | 604 | 48,0 | 52,3 | 47,4 | 52,7 | 462 | Cyanbl.-Ultram. | Indigo |
| 948 | Orange | Orange | $\pi-80\ 12$ | 629 | 50,4 | 50,3 | 49,7 | 51,1 | 477 | Cyanblau | Dunkelblau |
| 998 | Lebh. röthlichor. | Hochroth | 67 11 | 668 | 49,5 | 50,3 | 49,7 | 50,0 | 499 | Blaugr.-Cyanbl. | Grünlichblau |
| 4 $\delta$ 1101 | Dunkel violettr. | Purpurviolett | 0 | 765 | 46,7 | 55,2 | 44,8 | 57,6 | 551 | Gelbgrün | Grün |
| 1128 | Hell bläulichv. | Blauviolett | $2\pi-15\ 24$ | 438 | 45,6 | 55,9 | 44,1 | 57,8 | 564 | Gelbgrün | Gelblichgrün |
| 1151 | Indigo | Ultramarin | $2\pi-28\ 38$ | 446 | 44,2 | 55,8 | 44,2 | 55,9 | 576 | Gelbgrün-Gelb | Unreines Gelb |
| 1258 | Grünlichblau | Blaugrün | $\pi+74\ 9$ | 494 | 41,4 | 47,9 | 52,1 | 38,0 | 659 | Hochroth | Fleischfarbe |
| 1334 | Meergrün | Grün | $\pi+21\ 14$ | 533 | 54,0 | 40,7 | 59,3 | 37,0 | 731 | Purpur | Roth |
| 5 $\delta$ 1376 | Glänzendes Grün | Gelbgrün | $\pi$ | 551 | 56,4 | 39,2 | 60,8 | 36,3 | 765 | Purpurviolett | Violett |
| 1426 | Grünlichgelb | Gelbgrün | $\pi-23\ 37$ | 572 | 46,7 | 40,8 | 59,2 | 32,2 | 443 | Ultramarin | Graublau |
| 1495 | Fleischfarbe | Orange | $\pi-71\ 21$ | 619 | 26,2 | 47,7 | 52,3 | 23,9 | 471 | Cyanbl.-Blaugr. | Meergrün |
| 1534 | Carminroth | Hochroth | 70 14 | 664 | 21,7 | 52,3 | 47,7 | 23,7 | 496 | Blaugrün | Schön Grün |
| 1621 | Matt Purpur | Purpurviolett | 12 33 | 744 | 22,6 | 58,1 | 41,9 | 31,4 | 540 | Grün | Matt Meergrün |
| 6 $\delta$ 1652 | Violettgrau | Purpurviolett | 0 | 765 | 21,4 | 58,0 | 42,0 | 29,6 | 551 | Gelbgrün | Gelblichgrün |
| 1682 | Blaugrau | Blauviolett | $2\pi-11\ 52$ | 437 | 18,9 | 56,9 | 43,1 | 25,0 | 561 | Gelbgrün | Grünlichgelb |
| 1711 | Hell Grünlichbl. | Ultramarin | $2\pi-24\ 44$ | 443 | 15,6 | 55,2 | 44,8 | 19,2 | 573 | Gelbgrün-Gelb | Gelbgrau |
| 1744 | Bläulichgrün | Ultram.-Cyanbl. | $2\pi-44\ 40$ | 455 | 11,4 | 52,9 | 47,1 | 12,8 | 592 | Gelb | Malvenroth |
| 1811 | Schön Hellgrün | Blaugr.-Grün | $\pi+65\ 12$ | 500 | 7,0 | 49,0 | 51,0 | 6,7 | 670 | Hochroth | Carminroth |
| 7 $\delta$ 1927 | Hell Graugrün | Gelbgrün | $\pi$ | 551 | 3,0 | 48,9 | 51,1 | 2,8 | 765 | Purpurviolett | Grauroth |




Orange
Hochroth
Gelb
Carmin
Purpur
Purpurviolett
Blauviolett
Ultramarin
Cyanblau
Blaugrün
Grün
A
B
C
D
E
F
G
H
a
b



Lommel, Berechnung von Mischfarben.

Taf. II.



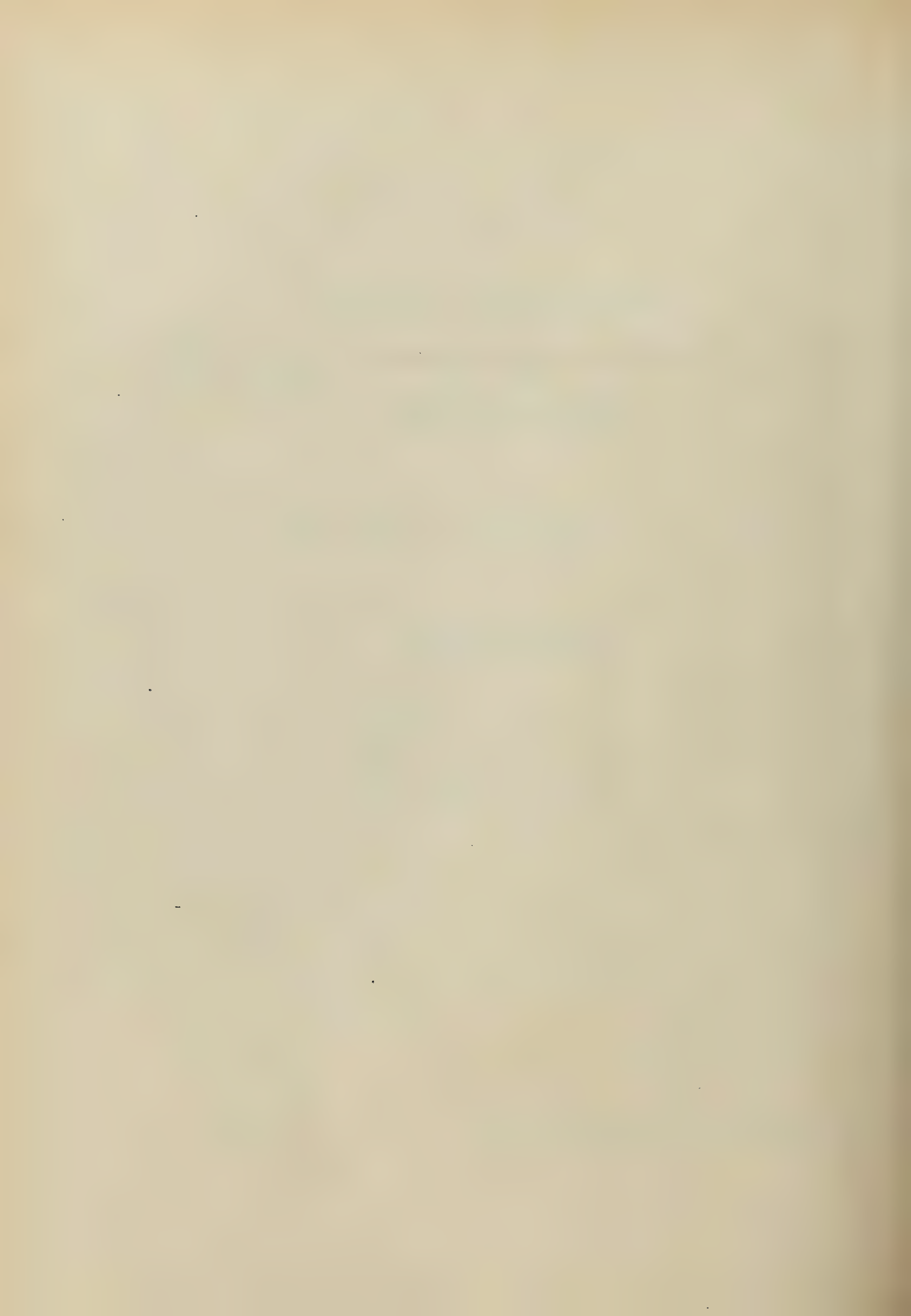
# Die von optischen Systemen grösserer Oeffnung und grösseren Gesichtsfeldes erzeugten Bilder.

Auf grund der Seidelschen Formeln untersucht

von

**S. Finsterwalder.**

(Mit 3 Tafeln.)



Solange man sich bei der Untersuchung der Wirkungsweise centrierter dioptrischer Systeme und der von ihnen erzeugten Bilder räumlicher Objekte auf die nächste Umgebung der Axe solcher Systeme beschränkt, kann man bekanntlich jedes noch so komplicierte System dieser Art durch eine einzige Linse von endlicher Dicke ersetzt denken, welche innerhalb der angegebenen Beschränkung von jedem Gegenstand ein Bild in gleicher Grösse und Lage erzeugt, wie jenes System. Dass dieser Ersatz nur in der Theorie, nicht aber in der optischen Praxis seine Bedeutung hat, liegt einesteils darin, dass er nur unter Voraussetzung einfarbigen Lichtes gilt, andernteils, dass er sich nicht auf die in der Regel vorhandenen Abweichungen der ursprünglich von einem Punkte angegangenen und dann gebrochenen Strahlen von einem gemeinsamen Vereinigungspunkt ausdehnen lässt. Die ganze optische Leistung eines Systems: Achromasie, Schärfe und Richtigkeit der Bilder liegt also ausserhalb des Geltungsbereiches jenes Ersatzes. Um dieselbe von vorneherein beurteilen zu können, muss man entweder, wie es von seiten der ausübenden Optiker zumeist geschieht, eine genaue numerische Rechnung für den Gang einer grösseren Zahl von Strahlen durch das System anstellen und aus dem Resultate derselben auf die vorhandenen Abweichungen zu schliessen versuchen, oder man muss die Theorie derart zu erweitern streben, dass sie ein ausreichendes Gesammtbild der eintretenden Abweichungen liefert. Im ersteren Falle sind langwierige Zifferrechnungen unvermeidlich. Dieselben bestehen allerdings nur in der oft wiederholten Anwendung weniger, leicht verständlicher Formeln, welche zuerst Herr Professor L. v. Seidel auf eine für die rechnerische Praxis bequeme Form gebracht hat [1]). Im letzteren Falle dagegen scheint zunächst die zu erwartende Compliciertheit der Formeln ein ernstes Hindernis nicht nur

1) Sitzber. d. II. Cl. d. k. Ak. d. Wiss. vom 10. Nov. 1866.

für die Ableitung, sondern auch für die schliessliche Anwendung zu bieten. Indessen hat sich herausgestellt, dass für die in der Praxis vorkommenden optischen Systeme gewisse Vereinfachungen eintreten können, welche uns gestatten, die Abweichungen der gebrochenen Strahlen zwar nicht absolut genau, aber doch mit genügender Annäherung allgemein zu berechnen und in geschlossenen Formeln auszudrücken. Die von Gauss zum Abschluss gebrachte Theorie der centrierten optischen Systeme, auf welche sich der erwähnte theoretische Ersatz derselben durch einfache Linsen stützt, geht von der Voraussetzung aus, dass alle Strahlen mit der Axe kleine Winkel einschliessen, deren dritte und höhere Potenzen vernachlässigbar sind. Insofern sie nur Strahlen berücksichtigt, welche die Linsenflächen in nächster Nähe der Axe treffen, ist sie nur für Systeme von kleiner Oeffnung und sofern sie blos für Objektpunkte in der Nähe der Axe gilt, auch nur für Systeme mit kleinem Gesichtsfeld anwendbar. Zuerst entstand das Bedürfnis nach Berücksichtigung der Abweichungen, die mit Vergrösserung der Oeffnung eintreten; ihm genügte die von Euler, Schleiermacher, Grunert, Bessel, Gauss, Seidel u. A. entwickelte Theorie der sphärischen Aberration oder der sogenannten Abweichung wegen der Kugelgestalt. Später, unter dem Einflusse der Photographie entwickelte sich die Notwendigkeit neben der ausgedehnteren Oeffnung auch ein grösseres Gesichtsfeld in Betracht zu ziehen und die Abbildung von Objekten zu untersuchen, die sich in einiger Entfernung von der Axe des optischen Systems befinden. Mit der ungleich schwierigeren Frage nach dem Einfluss der Entfernung des Objektes von der Axe auf die Güte des nun nicht mehr in der Mitte des Gesichtsfeldes liegenden Bildes hatte sich zuerst wohl Petzval[1]) beschäftigt, ohne sie indessen einer genügenden Beantwortung zuführen zu können. Erst Herrn Professor L. v. Seidel[2]) ist es gelungen, auf ebenso allgemeine, wie relativ einfache Weise die Abhängigkeit des in einem Linsensysteme beliebig oft gebrochenen Strahles vom einfallenden derart darzustellen, dass der Einfluss der Oeffnung und des Gesichtsfeldes auf die Güte der Bilder zum Ausdruck kommt. Dabei hat v. Seidel die durch Gauss einge-

1) Bericht über dioptrische Untersuchungen. Sitzber. d. k. k. Ak. d. Wiss. Wien 1857; eine frühere Schrift unter gleichem Titel war 1843 in Pest selbstständig erschienen.

2) Astronomische Nachrichten Nr. 1027 ff.

führte Reihenentwickelung auf Glieder dritter Ordnung ausgedehnt, nachdem er gezeigt hatte, dass Glieder vierter Ordnung nicht auftreten und demnach die Schlussformeln bis auf Glieder von der fünften Ordnung genau sind. Später sind ähnliche Untersuchungen wie die Seidel'schen aber merkwürdigerweise ohne Kenntnis derselben unternommen worden, so 1870 von Dr. Zinken[1]) gen. Sommer in Braunschweig, die an Allgemeinheit, Eleganz und Anwendbarkeit weit hinter den Seidel'schen zurückblieben, und erst ganz neuerdings (1890) hat Herr Dr. M. Thiesen[2]) in Charlottenburg genau dieselbe Aufgabe behandelt, die v. Seidel vor 35 Jahren allgemein gelöst hatte. Er ist denn auch auf ganz verschiedenem Wege zu wesentlich denselben Resultaten wie Seidel gelangt, wenngleich seine Formeln noch nicht in gleichem Masse zur rechnerischen Anwendung vorbereitet sind wie die Seidel'schen.

Herr Professor v. Seidel begnügte sich nicht mit der Aufstellung der erwähnten Formeln, welche zur Untersuchung eines Linsensystems mässigen Gesichtsfeldes und mässiger Oeffnung ausreichen, sondern er bestimmte auch die Brennfläche, welche die von einem leuchtenden Punkte ausserhalb der Axe ausgegangenen Strahlen nach ihrer Brechung umhüllen. Dieselbe findet sich in den gelehrten Anzeigen der K. b. Akademie der Wissenschaften vom Jahre 1857 beschrieben; ihre Gleichung ist — allerdings ohne Beziehung der Coefficienten auf die Constanten des Linsensystems — in einem Briefe Seidels an Kummer, der in den Sitzungsberichten der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1867 abgedruckt ist, angeführt; über die Ableitung derselben ist bisher nichts publiciert worden.

Eine weitere Aufgabe wird der analytischen Dioptrik bei Betrachtung der Wirkungsweise neuerer photographischer Objektive, welche bei sehr ausgedehntem Gesichtsfeld relativ geringe Oeffnung besitzen, gestellt, nämlich die strenge Berücksichtigung der Winkel, von welchen ersteres abhängig ist, wogegen man sich in Hinsicht der Oeffnung auf den bei der Gauss'schen Theorie erreichten Genauigkeitsgrad beschränken kann. Die Lösung dieser Aufgabe führt auf die Theorie der sogenannten astig-

---

1) Untersuchungen über die Dioptrik der Linsensysteme. Braunschweig 1870.
2) Beiträge zur Dioptrik. Sitzungsberichte der K. Ak. d. W. zu Berlin 1890.

matischen Strahlenbündel, jener Gebilde nämlich, welche als Elemente eines beliebigen, in einem itropen Medium optisch darstellbaren Strahlensystemes aufgefasst werden können. Ein solches astigmatisches Strahlenbündel besteht bekanntlich aus der Gesammtheit der Strahlen, welche zwei unter sich und zur Axe des Bündels senkrechte und diese schneidende unendlich kurze Brennlinien treffen. Solcher Art sind auch die unter beliebig grossem Winkel aus einem Linsensysteme austretenden unendlich dünnen Strahlenbündel und es handelt sich darum, die Elemente derselben (z. B. die Abstände der Brennlinien von einem bestimmten Punkte der Axe des Bündels) durch die entsprechenden Elemente der zugehörigen Bündel der einfallenden Strahlen auszudrücken. Dies hat u. A. Herr Professor Lippich[1]) in Prag 1877 ausgeführt. Um das Verhältnis der Seidel'schen Theorie zur Theorie der astigmatischen Strahlenbündel richtig zu beurteilen, ist zu bedenken, dass erstere die letztere bei grossen Gesichtsfeldwinkeln natürlich nicht ersetzen kann; dafür leistet sie aber bei mässigen Gesichtsfeldwinkeln insofern weit mehr wie die andere, als sie nicht blos eine unendlich kleine Oeffnung berücksichtigt; sie gibt vielmehr die Elemente beliebig vieler über die Oeffnung verteilter astigmatischer Strahlenbündel, aus denen sich schliesslich die Brennfläche zusammensetzt.

So erscheint die Seidel'sche Theorie auch gegenüber der von den astigmatischen Strahlenbündeln noch hervorragend geeignet zur Untersuchung der Bilder der meisten und wichtigsten optischen Instrumente. In der folgenden Untersuchung soll nun auf Grund der Seidel'schen Formeln, welche von ihrem Urheber bereits zur Klärung einer Reihe wichtiger Fragen der Dioptrik verwendet worden sind, eine möglichst umfassende Darstellung der Abhängigkeit reeller Bilder von dem Gesichtsfelde, der Abblendung und der Lage der Schirmebene, auf welcher man das Bild auffängt, in Angriff genommen werden. Hiebei erweisen sich einige Transformationen der Seidel'schen Formeln und namentlich die Ableitung der Gleichung der Brennfläche mit voller Bedeutung der Coefficenten als notwendig.

Ein besonderer Wert wurde auf die exakte graphische Dar-

1) Denkschriften der K. K. Akad. d. W. in Wien 1877.

stellung typischer Fälle gelegt, deren Reproduktion in mehreren Tafeln am Schlusse der Abhandlung beigegeben ist. Bei der Durchführung der dabei nötigen Rechnungen hat sich auch das letzte Bedenken gegen die Anwendbarkeit der Seidel'schen Theorie, das in der möglicherweise unerträglichen Rechenarbeit begründet war, endgiltig gehoben. Im Vergleiche zu dem bei der gebräuchlichen Berechnung einzelner Strahlen nötigen Rechenaufwand bedeutet die Benützung der Seidel'schen Formeln eine ganz wesentliche Ersparnis, die um so wirksamer wird, je complicierter das System und je zahlreicher die zu berechnenden Strahlen sind. Da die Seidel'schen Formeln die Abweichung der Strahlen als Funktion der Gauss'schen Näherungswerte ergeben, so genügt die genaue, etwa 7-stellige Durchrechnung eines oder zweier Strahlen, die in der Nähe der Axe einfallen und mit dieser in einer Ebene liegen, während alle Correktionen nur auf etwa 2—3 Stellen bekannt zu sein brauchen. Zur genauen Durchrechnung der Strahlen und zur Ableitung der Coefficienten in den Seidel'schen Formeln daraus empfiehlt sich die Benützung einer Rechenmaschine; für die Ausführung der Correktionsrechnungen selbst genügt der Rechenschieber.

Die folgenden Untersuchungen sind in 7 Paragraphen nachstehend angeführten Inhaltes gegliedert:

1) Zusammenstellung der Seidel'schen Formeln aus den Astronomischen Nachrichten Nr. 1027 u. ff. und Erläuterung der dabei angewandten Bezeichnungsweise.

2) Untersuchung des Systems der gebrochenen Strahlen und seiner Brennfläche im allgemeinen Falle unter Annahme des leuchtenden Punktes ausserhalb der Axe. Die Abbildung der Brennfläche in eine Ebene durch Einführung elliptischer Parameter. Die Lage derselben gegen die optische Axe des Systems.

3) Specielle Fälle der Brennfläche namentlich bei gehobenem Kugelgestaltsfehler in der Axe und bei Erfüllung der Fraunhoferbedingung.

4) Untersuchung der Abbildung der Ebene der Blende in die Ebene des auffangenden Schirmes, welche durch die von einem leuchtenden Punkt der Axe ausgegangenen und im Linsensystem gebrochenen Strahlen vermittelt wird. Fünffache Ueberdeckung der Schirmebene mit Schnittpunkten von gebrochenen Strahlen.

5) Helligkeitsverteilung in den Lichtflecken, welche im allgemeinen an stelle scharfer Bilder leuchtender Punkte auftreten.

6) Begrenzung der Lichtflecke bei wechselnder Grösse und Lage der Blende. Diskussion der Möglichkeit, die Verschiebung der Blende zur Verbesserung der Bilder ohne Einbusse an Helligkeit zu benützen.

7) Geometrische Untersuchung über den Zusammenhang der Brennfläche der gebrochenen Strahlen mit der Centrafläche der Flächen 2. Grades. Erzeugung des Systems der gebrochenen Strahlen durch einen Mechanismus.

Alle Untersuchungen beziehen sich zunächst auf Strahlen einerlei Farbe; sie geben daher über die Achromasie eines optischen Systems keinen direkten Aufschluss. Einer Weiterführung derselben mit Berücksichtigung der Dispersion stehen keine wesentlichen Schwierigkeiten im Wege. Andrerseits ist kaum ein praktisches Resultat von der Erweiterung der gewöhnlichen Theorie der Achromasie auf Glieder höherer Ordnung zu erwarten.

## § 1.

### Die Seidel'schen Formeln.

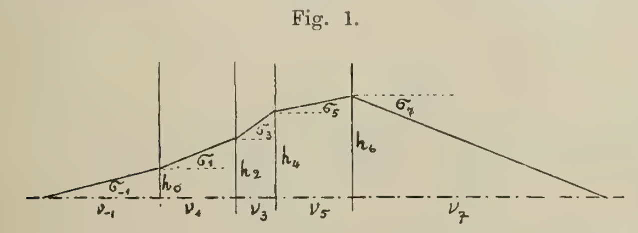
Im Folgenden werden principiell Indexbezeichnungen für die Bestimmungsstücke eines centrierten optischen Systems und der in einem solchen verlaufenden Strahlen eingeführt und zwar in der Art, dass alle auf brechende Flächen bezügliche Grössen, wie z. B. Krümmungsradien, Einfallshöhen mit geradem Index, wobei 0 der ersten brechenden Fläche entspricht, versehen werden. Alle auf die Medien sich beziehenden Grössen, wie z. B. Brechungsexponenten, Dicken, Neigungswinkel und Vereinigungsweiten der darin verlaufenden Strahlen, sollen ungerade Zahlen als Index tragen und zwar sei das der brechenden Fläche mit dem Index 0 vorausgehende Medium durch den Index —1, das nachfolgende durch +1 charakterisiert. Die Richtung des Fortschreitens sei durch die der einfallenden Strahlen gegeben; Radien oder Vereinigungsweiten, welche vom Scheitel der brechenden Fläche ab gerechnet in dieser Richtung liegen, gelten als positiv.

Ein dioptrisches System ist zunächst durch seine natürlichen Bestimmungsstücke: die Krümmungsradien $\varrho$ der Linsenflächen, die Dicken $d$ der Medien auf der Axe gemessen und die Brechungsquotienten $n$ derselben gegeben, welche laut obiger Bezeichnung in nachstehender Aufeinanderfolge geordnet sind:

$$n_{-1};\ \varrho_0;\ n_1,\ d_1;\ \varrho_2;\ n_3,\ d_3;\ \varrho_4;\ \cdots\ n_{2p-1},\ d_{2p-1};\ \varrho_{2p};\ n_{2p+1}$$

Statt dieser Bestimmungsstücke hat nun v. Seidel mit grossem Erfolge neue eingeführt und zwar solche, welche sich auf einen von ihm so genannten Normalstrahl beziehen, der von einem Punkte der optischen Axe ausgehend und stets unendlich kleine Winkel mit derselben bildend das System durchläuft. Diese neuen Bestimmungsstücke sind die Entfernungen $h_{2i}$ von der Axe, in welchen der Normalstrahl jeweils die brechenden Flächen trifft, und die Winkel $\sigma_{2i+1}$, welche derselbe in den einzelnen Medien mit der Axe bildet, beziehungsweise, da ja beiderlei Grössen unendlich klein sind, beliebige endliche Multipla derselben. Siehe beistehende Figur 1, in welcher der Verlauf eines Normalstrahles durch ein System mit 4 brechenden Flächen dargestellt ist.

Fig. 1.



Der Quotient $\frac{h_0}{\sigma_{-1}}$ stellt dann beispielsweise die Entfernung des Ausgangspunktes unseres Normalstrahles vom Scheitel der ersten brechenden Fläche dar. Statt der Brechungsquotienten $n_{2i+1}$ sollen deren reciproke Werte $\nu_{2i+1}$ eingeführt werden. Es stellt sich nun heraus, dass die Grössen $h$, $\sigma$, $\nu$ das dioptrische System ebenso gut bestimmen wie die ursprünglichen $\varrho$, $d$, $n$. Um von den $h$, $\sigma$, $\nu$ zu den $\varrho$, $d$, $n$ zu gelangen, dient folgendes Gleichungssystem:

$$\varrho_{2i} = \frac{N_{2i} h_{2i}}{\nu_{2i-1}\sigma_{2i+1} - \nu_{2i+1}\sigma_{2i-1}};$$

$$N_{2i} = \nu_{2i-1} - \nu_{2i+1}; \quad d_{2i+1} = \frac{h_{2i} - h_{2i+2}}{\sigma_{2i+1}}; \quad n_{2i+1} = \frac{1}{\nu_{2i+1}} \tag{1}$$

Will man umgekehrt von den $\varrho$, $d$, $n$ zu den $h$, $\sigma$, $\nu$ übergehen, so kann man folgenden von Seidel angegebenen Algorithmus benützen[1]): „Man bildet sich die Constanten $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\alpha_2$ .... nach den Gleichungen

$$\alpha_{2i} = -\frac{n_{2i-1} - n_{2i+1}}{\varrho_{2i}} = + n_{2i-1} n_{2i+1} \frac{N_{2i}}{\varrho_{2i}}$$

$$\alpha_{2i+1} = -\frac{d_{2i+1}}{n_{2i+1}}$$

wählt hierauf $h_0$ und $\sigma_{-1}$ so, dass $\frac{h_0}{\sigma_{-1}}$ gleich dem Abstand des Ausgangspunktes des Normalstrahles vom Scheitel der ersten brechenden Fläche ist; man macht $\varkappa_{-1} = n_{-1}\sigma_{-1}$,

1) Astr. N. 1027, S. 294.

$\varkappa_0 = h_0$ und berechnet mit diesen Anfangswerten alle späteren $\varkappa$ nach der Gleichung $\varkappa_{m+1} = \alpha_m \varkappa_m + \varkappa_{m-1}$; alsdann hat man allgemein:

$$h_{2i} = \varkappa_{2i}; \quad \sigma_{2i+1} = \frac{\varkappa_{2i+1}}{n_{2i+1}} \ . \ \text{“}$$

Um nun die Lage eines Strahles vor der Brechung zu bestimmen, wählt v. Seidel die zwei Pare von Coordinaten $\eta_{-1}\ \zeta_{-1}$, $\eta'_{-1}\ \zeta'_{-1}$ der Punkte, in welchen der Strahl zwei bestimmte, zur Axe des Systemes senkrechte Ebenen $A_{-1}$, $B_{-1}$ trifft; in ähnlicher Weise soll der gebrochene Strahl auf zwei Ebenen $A_1$, $B_1$ im zweiten Medium und so fort $A_{2i+1}$, $B_{2i+1}$ im $2i+1$ ten Medium bezogen werden. Die Ebenen $A_1$, $B_1$ ... $A_{2i+1}$, $B_{2i+1}$ sollen jedoch in bestimmter Weise von den Ausgangsebenen $A_{-1}$, $B_{-1}$ abhängig sein; sie sollen sich nämlich dort befinden, wo nach den Gauss'schen Näherungsformeln die reellen oder virtuellen Bilder der Ebenen $A_{-1}$ und $B_{-1}$ in den betreffenden Medien entstehen.

Denkt man sich durch den Schnitt der Ebene $A_{-1}$ mit der Axe einen Normalstrahl mit den Bestimmungsstücken $h$, $\sigma$ gelegt, so ist, wie schon erwähnt, $\frac{h_0}{\sigma_{-1}}$ der Abstand der Ebene $A_{-1}$ vom Scheitel der ersten brechenden Fläche, $\frac{h_0}{\sigma_1}$ der Abstand der Ebene $A_1$ vom gleichen Scheitel, $\frac{h_2}{\sigma_1}$ der Abstand der Ebene $A_1$ vom Scheitel der zweiten brechenden Fläche u. s. f. Führt man noch einen zweiten Normalstrahl ein, der durch den Schnitt der Ebene $B_{-1}$ mit der Axe geht und dessen Bestimmungsstücke durch $h'\ \sigma'$ bezeichnet werden, so lassen sich die Abstände der Ebenen $B$ in ganz ähnlicher Weise ausdrücken. Die Entfernung der Ebenen $A_{2i+1}$ und $B_{2i+1}$ ist dann

$$\frac{h_{2i}}{\sigma_{2i+1}} - \frac{h'_{2i}}{\sigma'_{2i+2}} = \frac{h_{2i+2}}{\sigma_{2i+1}} - \frac{h'_{2i+2}}{\sigma'_{2i+1}} .$$

Dabei sind natürlich die $h$, $\sigma$ und $h'\ \sigma'$ nicht von einander unabhängig, da sie ja beide aus den ursprünglichen $\varrho$, $d$ entsprungen sind. Hieraus ergibt sich die Gleichheit folgender Ausdrücke:

$$\frac{h_0 \sigma'_{-1} - h'_0 \sigma_{-1}}{\nu_{-1}} = \frac{h_0 \sigma'_1 - h'_0 \sigma_1}{\nu_1} = \frac{h_2 \sigma'_1 - h'_2 \sigma_1}{\nu_1} = \frac{h_2 \sigma'_3 - h'_2 \sigma_3}{\nu_3} = \ldots = T \qquad 2)$$

Mittels Einführung des Wertes $T$ und mit der weiteren abkürzenden Bezeichnung:

$$\frac{h'_0}{h_0} = \chi; \quad \nu_{2i-1} + \nu_{2i+1} = 2\mu_{2i}$$

$$\overset{i}{\Sigma} = \sum_{p=1}^{p=i} \frac{\nu_{2p-1}\, d_{2p-1}}{h_{2p-2}\, h_{2p}}$$

kann man die Abhängigkeit der $h'$ und $\sigma'$ von den $h$ und $\sigma$ in folgenden Formeln ausdrücken:

$$\sigma'_{2i-1} - \sigma'_{2i+1} = (\sigma_{2i-1} - \sigma_{2i+1})(\chi - T\overset{i}{\Sigma}) + \frac{T N_{2i}}{h_{2i}}$$

$$\nu_{2i-1}\sigma'_{2i-1} - \nu'_{2i+1}\sigma'_{2i+1} = (\nu_{2i-1}\sigma_{2i-1} - \nu_{2i+1}\sigma_{2i+1})(\chi - T\overset{i}{\Sigma}) + \frac{2 T N_{2i}\mu_{2i}}{h_{2i}} \qquad 3)$$

$$\nu_{2i-1}\sigma'_{2i+1} - \nu_{2i+1}\sigma'_{2i-1} = (\nu_{2i-1}\sigma_{2i+1} - \nu_{2i+1}\sigma_{2i-1})(\chi - T\overset{i}{\Sigma})$$

$$h'_{2i} = h_{2i}(\chi - \mathrm{T}\overset{i}{\Sigma})$$

(Für $i - 0$ fallen die Summen $\Sigma$ zur Rechten ganz weg.)[1])

Wählt man die Coordinaten, deren man sich in den verschiedenen Ebenen $A_{2i+1}$ $B_{2i+1}$ zur Fixierung der Punkte bedient, in welchen sie von den Strahlen getroffen werden, entweder als rechtwinklige $\eta_{2i+1}\,\zeta_{2i+1}$, $\eta'_{2i+1}\,\zeta'_{2i+1}$, die unter sich parallel sind und von dem Schnittpunkt der Ebenen mit der optischen Axe aus jeweils ihren Ausgang nehmen, oder Polarcoordinaten $r_{2i+1}\,v_{2i+1}$, $r'_{2i+1}\,v'_{2i+1}$, deren Pole in der optischen Axe liegen und deren Winkel von parallelen Geraden aus zählen, so drückt sich die Forderung, dass nach den dioptrischen Näherungsformeln die verschiedenen Ebenen $A_{2i}$ unter sich und die Ebenen $B_{2i}$ unter sich durch beliebige, das dioptrische System durchlaufende Strahlen ähnlich auf einander abgebildet werden, einfach durch Proportionalität der linearen Coordinaten aus. Es mögen die Buchstaben $\eta\ \zeta$, $\eta'\ \zeta'$, $r\ v$, $r'\ v'$ die aus den dioptrischen Näherungsformeln folgenden Werte für die Coordinaten der Treffpunkte eines Strahles in den Ebenen $A$, $B$ bezeichnen; ihre Proportionalität lässt sich dann nach einem bekannten Zusammenhang zwischen Bildgrösse und Convergenz der Strahlen in folgenden Formeln darstellen:

$$\left.\begin{array}{ll}
\frac{\sigma_{-1}}{\nu_{-1}}\eta_{-1} = \frac{\sigma_1}{\nu_1}\eta_1 = \frac{\sigma_3}{\nu_3}\eta_3 = \ldots\ H; & \frac{\sigma'_{-1}}{\nu_{-1}}\eta'_{-1} = \frac{\sigma'_1}{\nu_1}\eta'_1 = \frac{\sigma'_3}{\nu_3}\eta'_3 = \ldots\ H' \\
\frac{\sigma_{-1}}{\nu_{-1}}\zeta_{-1} = \frac{\sigma_1}{\nu_1}\zeta_1 = \frac{\sigma_3}{\nu_3}\zeta_3 = \ldots\ Z; & \frac{\sigma'_{-1}}{\nu_{-1}}\zeta'_{-1} = \frac{\sigma'_1}{\nu_1}\zeta'_1 = \frac{\sigma'_3}{\nu_3}\zeta'_3 = \ldots\ Z' \\
\frac{\sigma_{-1}}{\nu_{-1}}r_{-1} = \frac{\sigma_1}{\nu_1}r_1 = \frac{\sigma_3}{\nu_3}r_3 = \ldots\ R; & \frac{\sigma'_{-1}}{\nu_{-1}}r'_{-1} = \frac{\sigma'_1}{\nu_1}r_1 = \frac{\sigma'_3}{\nu_3}r_3 = \ldots\ R'
\end{array}\right\} \quad 4a)$$

Die Grösse $H$, $Z$, $R$, $H'$, $Z'$, $R'$ könnte man als reducierte Coordinaten der Durchschnittspunkte zwischen dem Strahl und den Ebenen bezeichnen, indem man sich nämlich die Coordinaten $\eta\ \zeta\ r$, $\eta'\ \zeta'\ r'$ in den verschiedenen Ebenen mit passend gewählten Massstäben gemessen denkt, wodurch überall dieselben Masszahlen für die

1) Astr. N. 1028, S. 315.

Coordinaten der einem bestimmten Strahl zugehörigen Durchschnittspunkte einerseits für die Ebenen $A$, andererseits für die Ebenen $B$ gefunden werden. Die Abweichungen nun, welche die Coordinaten der wahren Durchstossungspunkte von den genäherten zeigen, mögen durch $\Delta\eta_{2i+1}$, $\Delta\zeta_{2i+1}$, $\Delta r_{2i+1}$, $\Delta v_{2i+1}$, $\Delta\eta'_{2i+1}$, $\Delta\zeta'_{2i+1}$, $\Delta r'_{2i+1}$, $\Delta v'_{2i+1}$ ausgedrückt werden; mit den reducierten Massstäben gemessen (soweit sie linear sind) durch $\Delta H_{2i+1}$, $\Delta Z_{2i+1}$, $\Delta R_{2i+1}$, $\Delta H'_{2i+1}$, $\Delta Z'_{2i+1}$, $\Delta R'_{2i+1}$. Es ist dann z. B.

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\nu_{2i+1}}{\sigma_{2i+1}}(H+\Delta H_{2i+1}) &= \eta_{2i+1}+\Delta\eta_{2i+1}\\
\frac{\nu_{2i+1}}{\sigma'_{2i+1}}(H'+\Delta H'_{2i+1}) &= \eta'_{2i+1}+\Delta\eta'_{2i+1}\\
\frac{\nu_{2i+1}}{\sigma_{2i+1}}(R+\Delta R_{2i+1}) &= r_{2i+1}+\Delta r_{2i+1} \quad \text{u. s. f.}
\end{aligned}\right\} \qquad 4b)$$

Wenn man nun an die Berechnung dieser Abweichungen $\Delta H_{2i+1}\ldots$, die im Vergleich zu den Näherungswerten der Bestimmungsstücke $H$, $Z$, $H'$ $Z'$ eines Strahles als Correktionsglieder zu gelten haben, schreitet, so zeigt sich der grosse Vorteil, der in der geschickten Wahl der vier Bestimmungsstücke liegt, darin, dass der Ausdruck des Correktionsgliedes eines jeden von ihnen, welches sich auf die erste Brechung bezieht, nicht von den vier Correktionsgliedern der vorhergegangenen Brechung, sondern nur von einem derselben abhängt und von den übrigen Bestimmungsstücken nur die Näherungswerte enthält.

Es mögen der Einfachheit halber alle auf den Strahl und das Medium vor der $2i^{\text{ten}}$ Brechung bezüglichen Grössen, die eigentlich durch den Index $2i-1$ gekennzeichnet sein sollen, durch ein unter den betreffenden Buchstaben gesetztes Minuszeichen markiert werden, und in gleicher Weise die nach der $2i^{\text{ten}}$ Berechnung veränderten Grössen durch ein untergesetztes Pluszeichen an stelle des Index $2i+1$. Dann sind die reducierten Polarcoordinaten der Durchschnittspunkte des Strahles in den

$$\begin{array}{rll}
\text{Ebenen:} & \underset{-}{A} & \underset{-}{B}\\
\text{vor der Brechung:} & R+\Delta \underset{-}{R},\ v+\Delta \underset{-}{v}; & R'+\Delta \underset{-}{R'},\ v'+\Delta \underset{-}{v'}\\
\text{und in den Ebenen:} & \underset{+}{A} & \underset{+}{B}\\
\text{nach der Brechung:} & R+\Delta \underset{+}{R},\ v+\Delta \underset{+}{v}; & R+\Delta \underset{+}{R'},\ v+\Delta \underset{+}{v'}
\end{array}$$

Den Unterschied: $\Delta \underset{+}{R}-\Delta \underset{-}{R}$ resp. $\Delta \underset{+}{v}-\Delta \underset{-}{v}$ der zu den konstant bleibenden reducierten Coordinaten $R$, $v$, vor und nach der Brechung hinzuzufügenden Correktionsglieder hat nun v. Seidel durch folgende Formeln ausgedrückt, welche bis auf Glieder 5. Ordnung der als unendlich klein von der ersten Ordnung vorausgesetzten Coordinaten $R$, $R'$ genau sind:

$$2T^3(\Delta \underset{+}{R} - \Delta \underset{-}{R}) = R'^3 \cos(v'-v)\, h \left(\frac{\underset{-}{\sigma}-\underset{+}{\sigma}}{N}\right)^2 (\underset{--}{\nu\,\sigma} - \underset{++}{\nu\,\sigma}) \quad \ldots\ \text{I}$$

$$-R'^2 R\,(1+2\cos^2(v'-v))\, h \frac{(\underset{-}{\sigma}-\underset{+}{\sigma})(\underset{-}{\sigma'}-\underset{+}{\sigma'})}{NN} (\underset{--}{\nu\,\sigma} - \underset{++}{\nu\,\sigma}) \quad \ldots\ \text{II}$$

$$+R' R^2 \cos(v'-v) \left| 2h \left(\frac{\underset{-}{\sigma'}-\underset{+}{\sigma'}}{N}\right)^2 (\underset{--}{\nu\,\sigma} - \underset{++}{\nu\,\sigma}) \right. \quad \ldots\ \text{IIIa}$$

$$\left| + h \frac{(\underset{-}{\sigma}-\underset{+}{\sigma})(\underset{-}{\sigma'}-\underset{+}{\sigma'})}{NN} (\underset{--}{\nu\,\sigma'} - \underset{++}{\nu\,\sigma'}) + \frac{T}{N}(\underset{-}{\sigma}-\underset{+}{\sigma})(\underset{-+}{\nu\,\sigma'} - \underset{+-}{\nu\,\sigma'}) \right. \quad \ldots\ \text{IIIb}$$

$$-R^3 \left( h \left(\frac{\underset{-}{\sigma'}-\underset{+}{\sigma'}}{N}\right)^2 (\underset{--}{\nu\,\sigma'} - \underset{++}{\nu\,\sigma'}) + \frac{T}{N}(\underset{-}{\sigma'}-\underset{+}{\sigma'})(\underset{-+}{\nu\,\sigma'} - \underset{+-}{\nu\,\sigma'}) \right) \quad \ldots\ \text{IV}$$

$$2T^3 R(\Delta \underset{+}{v} - \Delta \underset{-}{v}) = R' \sin(v'-v) \times \text{alles Folgende:}$$

$$R'^2 h \left(\frac{\underset{-}{\sigma}-\underset{+}{\sigma}}{N}\right)^2 (\underset{--}{\nu\,\sigma} - \underset{++}{\nu\,\sigma}) \quad \ldots\ \text{V}$$

$$-2R'R\cos(v'-v)\, h \frac{(\underset{-}{\sigma}-\underset{+}{\sigma})(\underset{-}{\sigma'}-\underset{+}{\sigma'})}{NN} (\underset{--}{\nu\,\sigma} - \underset{++}{\nu\,\sigma}) \quad \ldots\ \text{VI}$$

$$+R^2 \left( h \frac{(\underset{-}{\sigma}-\underset{+}{\sigma})(\underset{-}{\sigma'}-\underset{+}{\sigma'})}{NN} (\underset{--}{\nu\,\sigma'} - \underset{++}{\nu\,\sigma'}) + \frac{T}{N}(\underset{-}{\sigma}-\underset{+}{\sigma})(\underset{-+}{\nu\,\sigma'} - \underset{+-}{\nu\,\sigma'}) \right) \quad \ldots\ \text{VII}$$

Die entsprechenden Formeln für $\Delta \underset{+}{R'} - \Delta \underset{-}{R'}$ und $\Delta \underset{+}{v'} - \Delta \underset{-}{v'}$ werden aus obigen abgeleitet, indem man folgende Grössen vertauscht:

$R$ und $\Delta R$ mit $R'$ und $\Delta R'$
$v$ und $\Delta v$ mit $v'$ und $\Delta v'$
$h$ mit $h'$
$\underset{+}{\sigma}$ und $\underset{-}{\sigma}$ mit $\underset{+}{\sigma'}$ und $\underset{-}{\sigma'}$
$T$ mit $-T$.

Nehmen wir nun an, das dioptrische System habe $k+1$ brechende Flächen 0, 2, ... $2k$, so können wir die obigen Formeln $2k+1$ mal unter einander schreiben und jedesmal an Stelle der Plus- und Minuszeichen unter den Buchstaben die Indices $2i+1$, $2i-1$ der der jeweiligen $2i^{\text{ten}}$ Brechung nachfolgenden, beziehungsweise vorangegangenen Medien setzen, ferner die nichtmarkierten Buchstaben $h$, $N$ ($T$, $R$, $R'$, $v$, $v'$ bleiben durch alle Brechungen konstant) mit dem jeweiligen Index der brechenden Fläche versehen. Werden ferner die Objektpunkte in der ersten Ebene

$A_{-1}$ liegend vorausgesetzt, so können wir die $\underset{-1}{\varDelta R}$ und $\underset{-1}{\varDelta v}$ gleich 0 nehmen. Addieren wir dann die rechten und linken Seiten der $k+1$ unter einander stehenden Gleichungen, so bleibt rechts blos $2\,T^3 \varDelta R_{2k+1}$ und $2\,T^3 R \varDelta v_{2k+1}$ übrig, d. h. die reducierten Abweichungen der Coordinaten des Durchschnittspunktes in der letzten Ebene von den Näherungscoordinaten. Die wirklichen Längen-Abweichungen ergeben sich aus den reducierten durch Multiplication mit $\frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}}$. Auf der linken Seite finden wir nach der Addition die gemeinsamen, aus den reducierten Näherungscoordinaten gebildeten Faktoren der Einzelformeln wieder; es treten nur an Stelle der von Brechung zu Brechung variablen Teile Summen von $2k+1$ Gliedern, deren allgemeine Glieder aus den oben mit I bis VII bezeichneten Ausdrücken leicht zu bilden sind, indem man $\underset{\rightarrow}{\nu}$, $\underset{+}{\nu}$, $\underset{-}{\sigma}$, $\underset{+}{\sigma}$, $\underset{-}{\sigma'}$, $\underset{+}{\sigma'}$, $h$, $N$ durch $\nu_{2i-1}$, $\nu_{2i+1}$, $\sigma_{2i-1}$, $\sigma_{2i+1}$, $\sigma'_{2i-1}$, $\sigma'_{2i+1}$, $h_{2i}$, $N_{2i}$ ersetzt.

Obwohl die so erhaltenen Schlussformeln bereits zur Berechnung der Wirkungsweise eines gegebenen dioptrischen Systemes sehr geeignet sind, so macht sich doch bei Beantwortung der Frage nach der Construktion eines Systems von vorgegebener Wirkung der Umstand störend geltend, dass die ursprünglichen Bestimmungsstücke des zu suchenden Systems — die $\varrho$ und $d$ — sowohl in den $h$ und $\sigma$ wie auch in den $h'$ und $\sigma'$ enthalten sind. Mittels der schon angeführten Zusammenhänge (3) zwischen $h$, $\sigma$ und $h'$ $\sigma'$ lassen sich indessen die letzteren eliminieren und es erscheint dann thatsächlich die Wirkung des dioptrischen Systemes durch eine einzige Serie von Bestimmungsstücken ausgedrückt. Auf diese Weise erhielt v. Seidel folgendes System von Formeln, welches wir zum Ausgangspunkt unserer weiteren Betrachtungen machen werden:

$$\varDelta R_{2k+1} = AR'^3 \cos(v'-v) - BR'^2 R(1+2\cos^2(v'-v)) + CR'R^2\cos(v'-v) - DR^3$$

$$R\varDelta v_{2k+1} = R'\sin(v'-v)\left\{AR'^2 - 2BRR'\cos(v'-v) + ER^2\right\}$$

$$A = \frac{S(1)}{2T^3},\quad B = \frac{\chi S(1) + TS(2)}{2T^3},\quad C = \frac{3\chi^2 S(1) + 6\chi TS(2) + T^2(2S(3)+S(4))}{2T^3}$$

$$D = \frac{\chi^3 S(1) + 3\chi^2 TS(2) + \chi T^2(2\,S(3)+S(4)) + T^3 S(5)}{2\,T^3}$$

$$E = \frac{\chi^2 S(1) + 2\chi TS(2) + T^2 S(4)}{2T^3}.$$

$$S(1) = \sum_{i=o}^{i=k} h_{2i}\left(\frac{\sigma_{2i-1} - \sigma_{2i+1}}{N_{2i}}\right)^2 (\nu_{2i-1}\sigma_{2i-1} - \nu_{2i+1}\sigma_{2i+1}) = \sum_{=o}^{i=k}(1)$$

$$S(2) = \sum_{i=o}^{i=k}(1)\,U_{2i} = \sum_{i=o}^{i=k}(2) \qquad 5)$$

$$S(3) = \sum_{i=o}^{i=k} (2)\, U_{2i} = \sum_{i=o}^{i=k} (3)$$

$$S(4) = \sum_{i=o}^{i=k} \left( (3) - \frac{N_{2i}}{\varrho_{2i}} \right) = \sum_{i=o}^{i=k} (4)$$

$$S(5) = \sum_{i=o}^{i=k} (4)\, U_{2i}$$

$$U_{2i} = \frac{N_{2i}}{h_{2i}(\sigma_{2i-1} - \sigma_{2i+1})} - \sum_{p=1}^{p=i} \frac{\nu_{2p-1}\, d_{2p-1}}{h_{2p-2}\, h_{2p}}$$

$$\varrho_{2i} = \frac{N_{2i} h_{2i}}{\nu_{2i-1}\, \sigma_{2i+1} - \nu_{2i+1}\, \sigma_{2i-1}}; \quad d_{2p-1} = \frac{h_{2p-2} - h_{2p}}{\sigma_{2p-1}}$$

$$N_{2i} = \nu_{2i-1} - \nu_{2i+1}$$

Die Ebene $A_{-1}$ des ersten Mediums wurde als mit dem Objekt zusammenfallend vorausgesetzt. Die Ebene $B_{-1}$ desselben Mediums kann man sich an jene Stelle versetzt denken, wo sich die für die Abgrenzung der eintretenden Strahlen entscheidende Blende eventuell die Fassung der ersten Linse befindet. Ist jene Blende in einem anderen Medium, so nehme man die Ebene $B_{-1}$ dort an, wo das (genäherte) Bild der wirklichen Blende in dem ersten Medium sich befindet. Dann ist einesteils die Grösse $R$ abhängig von der Entfernung eines Objektpunktes von der optischen Axe, mit anderen Worten von dem zur Verwendung kommenden Gesichtsfeld, andernteils die Grösse $R'$ von der Stelle, wo der einfallende Strahl die Diaphragmenebene trifft und, wenn man die äussersten Strahlen, die das Diaphragma noch durchlässt, berücksichtigt, von dem Betrage der wirksamen Oeffnung des dioptrischen Systemes. Die Seidel'schen Formeln sind also vollkommen geeignet, ein beliebig gegebenes centriertes optisches System auf seine Wirkung bei verschiedener Beanspruchung desselben in bezug auf Grösse des Gesichtsfeldes und der Oeffnung zu studieren.

## § 2.

## Die Brennfläche des Systems der gebrochenen Strahlen.

Für die Weiterverwertung der Seidel'schen Formeln namentlich zur Untersuchung der Brennfläche der von einem Punkte ursprünglich ausgegangenen und dann in dem dioptrischen System gebrochenen Strahlen empfiehlt es sich, an stelle der Polarcoordinaten $R$, $v$, $R'$ $v'$ wieder rechtwinklige Coordinaten einzuführen, wie sie bereits bei Ableitung der Formeln benutzt wurden. Setzt man also:

$$\begin{aligned} H &= R\cos v\,; \quad Z = R\sin v \\ H' &= R'\cos v'\,; \quad Z' = R'\sin v' \end{aligned} \qquad \text{ferner:} \qquad \begin{aligned} \varDelta H &= \varDelta R\cos v - R\varDelta v\sin v \\ \varDelta Z &= \varDelta R\sin v + R\varDelta v\cos v \text{[1]}, \end{aligned} \tag{6}$$

so gehen die Formeln in folgende[2]) über:

$$\begin{aligned} \varDelta H &= H'(AR'^2 + ER^2 - 2B(HH' + ZZ')) - H(BR'^2 + DR^2 - (C-E)(HH' + ZZ')) \\ \varDelta Z &= Z'(AR'^2 + ER^2 - 2B(HH' + ZZ')) - Z(BR'^2 + DR^2 - (C-E)(HH' + ZZ')) \end{aligned} \tag{7}$$

Für die Grösse $\frac{C-E}{2}$ soll weiterhin $G$ gesetzt werden; es ist dann

$$G = \frac{C-E}{2} = \frac{\chi^2 S(1) + 2\chi TS(2) + T^2 S(3)}{2T^3}$$

Wir nehmen nun an, es befinde sich in der Ebene $A_{-1}$ ein leuchtender Punkt in der Entfernung $\eta_{-1}$ von der optischen Axe. Das rechtswinklige Coordinatensystem lässt sich dann immer so verdrehen, dass die $\zeta_{-1}$-Coordinate 0 ist; es wird dann auch $Z = 0$ und die Formeln vereinfachen sich folgendermassen:

$$\begin{aligned} \varDelta H &= H'(AR'^2 + EH^2 - 2BHH') - H(BR'^2 + DH^2 - 2GHH') \\ \varDelta Z &= Z'(AR'^2 + EH^2 - 2BHH') \end{aligned} \tag{8}$$

Nun soll eine Parallelverschiebung des Coordinatensystems in der Richtung der $H'$-Axe um den Betrag $H'_0 = \frac{BH}{A}$ eintreten; es wird dabei:

$$\begin{aligned} H' &= H'_* + H'_0 \\ \varDelta H &= H'_*\left(AR'^2_* + \left(\frac{AE-B^2}{A} + 2\,\frac{AG-B^2}{A}\right)H^2\right) \\ &\quad + \frac{2B(AG-B^2) + A(BE-AD)}{A^2}\,H^3 \end{aligned} \tag{9}$$

---

1) Von hier ab wird bei den Correktionen $\varDelta R$ und $\varDelta v$ der Index $2k+1$ fortgelassen, da diese Unterscheidung unnötig wird.

2) Dieselben erweisen sich identisch mit den von Herrn A. Thiesen neuerdings direkt abgeleiteten (s. Beiträge zur Dioptrik, Berl. Sitzb. 1890):

$$\begin{aligned} x_3 - x_1\gamma &= x_2(\mathfrak{G}\varrho_1^2 + \mathfrak{E}\varrho_2^2 - 2\mathfrak{J}(x_1x_2 + y_1y_2)) - x_1(\mathfrak{H}\varrho_1^2 + \mathfrak{J}\varrho_2^2 - 2\mathfrak{F}(x_1x_2 + y_1y_2)) \\ y_3 - y_1\gamma &= y_2(\mathfrak{G}\varrho_1^2 + \mathfrak{E}\varrho_2^2 - 2\mathfrak{J}(x_1x_2 + y_1y_2)) - y_1(\mathfrak{H}\varrho_1^2 + \mathfrak{J}\varrho_2^2 - 2\mathfrak{F}(x_1x_2 + y_1y_2)) \end{aligned}$$

$\gamma$ bedeutet die Vergrösserung, bei welcher das System benützt wird; daher ist:

$$x_3 - x_1\gamma = \varDelta H\cdot\frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}}; \quad \text{wenn wir } x_3 = (H + \varDelta H)\frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}},\; x_2 = H'\frac{\nu_{-1}}{\sigma'_{-1}} \text{ und } x_1 = H\frac{\nu_{-1}}{\sigma_{-1}}$$

$$\text{setzen, ferner: } \mathfrak{E} = A\left(\frac{\sigma'_{-1}}{\nu_{-1}}\right)^3\frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}}; \quad \mathfrak{J} = B\,\frac{\sigma_{-1}}{\nu_{-1}}\left(\frac{\sigma'_{-1}}{\nu'_{-1}}\right)^2\frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}};$$

$$\mathfrak{G} = E\left(\frac{\sigma_{-1}}{\nu_{-1}}\right)^2\frac{\sigma'_{-1}}{\nu_{-1}}\,\frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}}; \quad \mathfrak{H} = D\left(\frac{\sigma_{-1}}{\nu_{-1}}\right)^3\frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}}; \quad \mathfrak{F} = \frac{(C-E)}{2}\left(\frac{\sigma_{-1}}{\nu_{-1}}\right)^2\frac{\sigma'_{-1}}{\nu_{-1}}\,\frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}}.$$

$$\varDelta Z = Z' \left( A R'^{2}_{*} + \frac{A E - B^2}{A} H^2 \right), \quad \text{wobei } R'^{2}_{*} = H'^{2}_{*} + Z'^2 \tag{9}$$

So lange wir nur Strahlen betrachten, die von dem angenommenen leuchtenden Punkt in der Ebene $A_{-1}$ herkommen, ist $H$ konstant; es empfiehlt sich daher, auch in $\varDelta H$ den blos von $H$ abhängigen Teil abzutrennen und zu schreiben:

$$\varDelta H = \varDelta H_{*} + \varDelta H_0$$

$$\text{wobei: } \varDelta H_0 = \frac{2 B (A G - B^2) + A (B E - A D)}{A^2} H^3$$

$$= \frac{-2 S(2) [S(1) S(3) - S(2)^2] + S(1) [S(2) S(4) - S(1) S(5)]}{S(1)^2} H^3 \tag{10}$$

Es werde zur Vereinfachung

$$\frac{A E - B^2}{A} = \frac{S(1) S(4) - S(2)^2}{2 T S(1)} = L$$

$$\frac{A G - B^2}{A} = \frac{S(1) S(3) - S(2)^2}{2 T S(1)} = M \tag{11}$$

gesetzt, dann reducieren sich die Formeln 9 auf folgende Ausdrücke:

$$\varDelta H_{*} = H'_{*} (A R'^{2}_{*} + (L + 2 M) H^2)$$

$$\varDelta Z = Z' (A R'^{2}_{*} + L H^2) \tag{12}$$

Die Correktionsglieder $\varDelta H_{*}$ und $\varDelta Z$ sind nunmehr ganz symmetrisch aus den neuen Coordinaten in der Diaphragmenebene $B_{-1}$ aufgebaut. Jedes derselben ist als Produkt zweier Faktoren dargestellt, von denen der eine die Glieder gerader, der andere die ungerader Potenz der neuen Coordinaten enthält. Ersterer bleibt bei blosser Veränderung der Vorzeichen der Coordinaten konstant, letzterer behält seine Grösse mit geändertem Vorzeichen bei. Daher entspricht einer symmetrischen Anordnung der Schnittpunkte der einfallenden Strahlen in der Diaphragmenebene $B_{-1}$ auch eine symmetrische Anordnung der Schnittpunkte der gebrochenen Strahlen in der Bildebene $A_{2k+1}$.

Auf Grund dieser symmetrischen Gestalt der Formeln 12 ist es leicht, zur Gleichung der Brennfläche der gebrochenen Strahlen zu gelangen. Diese Brennfläche muss offenbar in allernächster Nähe der näherungsweisen Bildebene $A_{2k+1}$ zu liegen kommen und ihre Dimensionen in der Richtung der optischen Axe sind von der zweiten Ordnung der Grössen $H$, $Z$, $H'$, $Z'$ zu veranschlagen, da die Abweichungen der Schnittpunkte der gebrochenen Strahlen in der Ebene $A_{2k+1}$ der dritten Ordnung, die Neigungen der Strahlen gegen einander aber der ersten Ordnung angehören.

Denken wir uns einen aus dem dioptrischen System austretenden Strahl durch seine Schnittpunkte $P$, $Q$ mit den Ebenen $A_{2k+1}$ $B_{2k+1}$ bestimmt.

Die Entfernung der beiden Ebenen ist gleich:

$$\frac{h_{2k}}{\sigma_{2k+1}} - \frac{h'_{2k}}{\sigma'_{2k+1}} = K = \frac{h_{2k}\,\sigma'_{2k+1} - h'_{2k}\,\sigma'_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}\,\sigma'_{2k+1}} = \frac{T\,\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}\,\sigma'_{2k+1}} \qquad 13)$$

Die Coordinaten des Durchschnittspunktes $P$ mit der Ebene $A_{2k+1}$ sind in reduciertem Masse: $H + \varDelta H_0 + \varDelta H_*$, $Z + \varDelta Z$, die des Schnittpunktes $Q$ mit der Ebene $B_{2k+1}$: $H' + \varDelta H' = H'_* + H'_0 + \varDelta H'$, $Z' + \varDelta Z'$. Irgend ein benachbarter Strahl $P'Q'$ wird von dem ursprünglichen geschnitten, sobald $PP'$ parallel zu $QQ'$ ist, denn dann liegen beide in einer Ebene.

Die Bedingung hiefür wird in folgender Formel ausgedrückt:

$$\frac{d(H + \varDelta H_0 + \varDelta H_*)}{d(Z + \varDelta Z)} = \frac{d(H'_0 + H'_* + \varDelta H')}{d(Z' + \varDelta Z')}$$

Sie vereinfacht sich, wenn man bedenkt, dass $H$, $\varDelta H_0$, $Z$ und $H'_0$ blos von den Coordinaten des leuchtenden Punktes abhängen und demnach hier als konstant zu betrachten sind. Ferner kann man die Grösse 3. Ordnung $\varDelta H'$, $\varDelta Z'$ gegenüber den Grössen erster Ordnung $H'_*$ und $Z'$ vernachlässigen. Wir setzen damit nur an stelle des Strahlensystems das durch die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte $P$ und $Q$ bestimmt ist, ein solches, welches die Punkte $P$ mit den Näherungswerten von $Q$ verknüpft. Dessen Brennfläche kann aber von der des erstbetrachteten Strahlensystems nur um Grössen verschieden sein, die ohnedies ausser Berücksichtigung bleiben, nämlich um solche 4. Ordnung in Richtung der optischen Axe und solche von der 5. Ordnung senkrecht dazu. Somit erhalten wir die Gleichung:

$$\frac{d(\varDelta H_*)}{d(\varDelta Z)} = \frac{dH'_*}{dZ'} = \frac{\frac{\partial(\varDelta H_*)}{\partial H'_*}\,dH'_* + \frac{\partial(\varDelta H_*)}{\partial Z'}\,dZ'}{\frac{\partial(\varDelta Z)}{\partial H'_*}\,dH'_* + \frac{\partial(\varDelta H)}{\partial Z'}\,dZ'} \qquad 14)$$

Dieselbe geht durch Ausmultiplikation in folgende Differentialgleichung zwischen $H'_*$ und $Z'_*$ über:

$$(dH'_*)^2\,\frac{\partial(\varDelta Z)}{\partial H'_*} + dH'_*\,dZ'\left(\frac{\partial(\varDelta Z)}{\partial Z'} - \frac{\partial(\varDelta H_*)}{\partial H'}\right) - (dZ')^2\,\frac{\partial(\varDelta H_*)}{\partial Z'} = 0 \qquad 15)$$

Sie bestimmt die Fortschreitungsrichtungen in der Ebene $B_{2k+1}$, für welche benachbarte Strahlen sich schneiden. Dieselben Fortschreitungsrichtungen lassen sich auch mittels der ersten Näherung auf die Diaphragmenebene übertragen.

Wir setzen nun die aus den Formeln 12 folgenden Werte der Differentialquotienten von $\varDelta H_*$ und $\varDelta Z$ nach $H'_*$ und $Z$ ein. Dieselben sind:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\varDelta H_*)}{\partial H'_*} &= 3\,A\,H'^2_* + A\,Z'^2 + (L + 2\,M)\,H^2 \\ \frac{\partial(\varDelta H_*)}{\partial Z'} &= 2\,A\,Z'\,H'_* \end{aligned} \qquad 16)$$

$$\frac{\partial(\Delta Z)}{\partial H'_*} = 2 A Z' H'_*$$
$$\frac{\partial(\Delta Z)}{\partial Z'} = A H'^2_* + 3 A Z'^2 + L H^2 \qquad 16)$$

Die Differentialgleichung 15 geht dadurch in nachstehende Form über:

$$(d H'_*)^2 + \frac{d H'_*}{H'_*} \cdot \frac{d Z'}{Z'} \left( Z'^2 - H'^2_* - \frac{M H^2}{A} \right) - (d Z')^2 = 0 \qquad 17)$$

Das Produkt der Wurzeln dieser in $\frac{d H'_*}{d Z'}$ quadratischen Gleichung ist gleich —1; d. h. die durch sie in jedem Punkte der Ebene definierten Fortschreitungsrichtungen stehen senkrecht zu einander. Dieser Umstand stimmt mit der von vorneherein feststehenden Eigenschaft des Systems der gebrochenen Strahlen als Normalensystem überein. Bei einem solchen müssen nämlich die durch einen Strahl und die beiden benachbarten ihn schneidenden Strahlen gelegten Ebenen die sog. Brennebenen senkrecht zu einander stehen. Da alle Strahlen des Systems nur wenig von der senkrechten Richtung zur Ebene $B_{2k+1}$ abweichen, so wird auch das durch jeden derselben gehende rechtwinkelige Brennebenenpar von der Ebene $B_{2k+1}$ nach zwei bis auf Winkelgrössen von der ersten Ordnung rechtwinkligen Geraden geschnitten.

Wird die Differentialgleichung integriert, so geben die Integralcurven eine Zusammenfassung der gebrochenen Strahlen nach Developpablen. Das allgemeine Integral der Differentialgleichung ist durch folgende Schar confokaler Kegelschnitte gegeben, wobei $\lambda$ die Integentionskonstante bedeutet:

$$\frac{H'^2_*}{\lambda} + \frac{Z'^2}{\frac{M H^2}{A} + \lambda} = 1 \qquad 18)$$

Denken wir uns diese in den reducierten Coordinaten geschriebene Gleichung in den Massstab der Diaphragmenebene übertragen, so definiert sie dort eine bestimmte Schar confokaler Kegelschnitte. Legen wir durch den leuchtenden Punkt als Spitze und die Kegelschnitte der Diaphragmenebene Strahlenkegel, so haben dieselben die Eigenschaft, dass ihre Erzeugenden nach der Brechung im dioptrischen System Developpable bilden.

Es kann daher der Satz ausgesprochen werden:

> Ordnet man die von einem Punkt ausserhalb der Axe eines dioptrischen Systems aus einfallenden Strahlen so nach Kegeln an, dass die Erzeugenden derselben nach ihrem Durchgang durch das dioptrische System Developpable bilden, dann werden diese Kegel von einer zur optischen Axe senkrechten Transversalebene nach einer Schar confokaler Kegelschnitte geschnitten.

Die reellen Brennpunkte dieser Kegelschnitte sind auf der $Z'$- oder $H'_*$-Axe, je nachdem die Grösse $\frac{MH^2}{A}$ — positiv oder negativ ist.

Es liegt sehr nahe, in die weiteren Formeln elliptische Coordinaten einzuführen. Wir schreiben zu dem Ende die Gleichung 18 nochmals mit dem Parameter $\mu$ an und drücken dann $H'^2_*$ und $Z^2_*$ durch die beiden Parameter $\lambda$ und $\mu$ aus.

$$H'^2_* = -\frac{\lambda\mu \cdot A}{MH^2}; \quad Z'^2 = \frac{(MH^2 + A\lambda)(MH^2 + A\mu)}{AMH^2} \tag{19}$$

Diese Parameter sollen nun auch in die Ausdrücke für die Correkturen eingeführt werden. Das ergibt, nachdem man die Gleichungen zum Quadrat erhoben und berücksichtigt hat, dass:

$$R'^2_* = \frac{MH^2 + A(\lambda + \mu)}{A} \text{ ist, folgendes:} \tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned}(\Delta H_*)^2 &= \frac{-A\lambda\mu\,[(3M + L)H^2 + A(\lambda + \mu)]^2}{MH^2} \\ (\Delta Z)^2 &= \frac{(MH^2 + A\lambda)(MH^2 + A\mu)[(M + L)H^2 + A(\mu + \lambda)]^2}{AMH^2}\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Man kann jetzt wieder von den reducierten Coordinaten $Z'$ und $H'_*$ und den ebenfalls in reduciertem Masse ausgedrückten Correkturen $\Delta Z$ und $\Delta H_*$ zu den wirklichen auf die Ebenen $B_{2k+1}$ und $A_{2k+1}$ bezüglichen Werten $\eta'_{2k+1}$ $\zeta'_{2k+1}$ $\Delta\eta_{*2k+1}$ $\Delta\zeta_{2k+1}$ übergehen, indem man die Beziehungen 4a und 4b benützt:

$$\Delta H_* = \frac{\sigma_{2k+1}}{\nu_{2k+1}} \Delta\eta_{*2k+1} \qquad \Delta Z = \frac{\sigma_{2k+1}}{\nu_{2k+1}} \Delta\zeta_{2k+1}$$

$$H'_* = \frac{\sigma'_{2k+1}}{\nu_{2k+1}} \cdot \eta'_{*2k+1} \qquad Z' = \frac{\sigma'_{2k+1}}{\nu_{2k+1}} \zeta'_{2k+1}$$

Dann ergibt sich:

$$\eta'^2_{*2k+1} = -\frac{\lambda\mu A}{MH^2}\left(\frac{\nu_{2k+1}}{\sigma'_{2k+1}}\right)^2, \quad \zeta'^2_{2k+1} = \frac{(MH^2 + A\lambda)(MH^2 + A\mu)}{AMH^2}\left(\frac{\nu_{2k+1}}{\sigma'_{2k+1}}\right)^2 \tag{22}$$

$$\left.\begin{aligned}(\Delta\eta_{*2k+1})^2 &= -\frac{\lambda\mu A((3M + L)H^2 + A(\lambda + \mu))^2}{MH^2}\left(\frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}}\right)^2 \\ (\Delta\zeta_{2k+1})^2 &= \frac{(MH^2 + A\lambda)(MH^2 + A\mu)((M + L)H^2 + A(\lambda + \mu))^2}{AMH^2}\left(\frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}}\right)^2\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Die Entfernung der beiden Ebenen $B_{2k+1}$ und $A_{2k+1}$ ist nach Früherem 13):

$$K = \frac{T\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}\sigma'_{2k+1}}$$

Die 4 Gleichungen 22 und 23 bestimmen das System der gebrochenen Strahlen. Der Anfangspunkt $O_0$ der Coordinaten in der Ebene $A_{2k}$ liegt um eine kleine Grösse 3. Ordnung: $\Delta\eta_{0\,2k+1} = \Delta H_0 \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}}$ über dem Näherungspunkte des Bildes des leuchtenden Punktes. Der Anfangspunkt $O'_0$ in der Ebene $B_{2k+1}$ befindet sich um die Grösse 1. Ordnung: $\eta'_{0\,2k+1} = H'_0 \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma'_{2k+1}}$ über dem Schnittpunkt mit der optischen Axe. Der Strahl $O'_0\, O_0$, welcher dem Wertepar $\lambda = 0$, $\mu = 0$ entspricht, wurde von Seidel gelegentlich als ausgezeichneter Strahl bezeichnet. Um ihn herum gruppiert sich das Strahlensystem symmetrisch. Die Strahlen, welche Punkte der Ebenen $A_{2k+1}$ $B_{2k+1}$ verbinden, für die ein Parameterwert konstant ist, bilden eine abwickelbare Fläche. Die Rückkehrkanten aller solchen abwickelbaren Flächen erfüllen die beiden Mäntel der Brennfläche.

Es soll nun die Rückkehrkante gefunden werden, welche einer Developpablen $\mu = \text{const}$ entspricht. Bezeichnet für einen Moment $dS$ die Entfernung zweier benachbarter Punkte der Curve $\mu = \text{const}$ in der Ebene $B_{2k+1}$ und $ds$ die Entfernung der entsprechenden Punkte in der Ebene $A_{2k+1}$, ferner $x$ die Entfernung des Schnittpunktes $F$ der durch die beiden Punktepare bestimmten Strahlen von der Ebene $A_{2k+1}$ in der Richtung des ausgezeichneten Strahles gemessen, dann findet folgende Proportion statt:

$$\frac{ds}{dS} = \frac{x}{K \sec\omega + x},$$

wobei $\omega$ den kleinen Winkel 1. Ordnung des ausgezeichneten Strahles mit der optischen Axe bedeutet. Da $x$ von der 2. Grössenordnung, $K$ aber eine endliche, d. h. mit den Krümmungsradien vergleichbare Grösse ist, so kann man bis auf Grössen 4. Ordnung genau auch schreiben:

$$\frac{ds}{dS} = \frac{x}{K}$$

Nun ist für $\mu = \text{const.}$ $\frac{ds}{dS} = \frac{d(\Delta\eta_{*\,2k+1})}{d\eta'_{*\,2k+1}} = \frac{d(\Delta\zeta_{2k+1})}{d\zeta'_{2k+1}}$, daher:

$$x = K\,\frac{d(\Delta\eta_{*\,2k+1})}{d\eta_{*\,2k+1}} = \frac{T\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}\,\sigma'_{2k+1}} \cdot \frac{d(\Delta H_*)}{dH'_*} \cdot \frac{\sigma'_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} = \frac{d\,\Delta H_*}{dH_*} \cdot \frac{T\nu_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}} \qquad 24)$$

und: $$\frac{d(\Delta H_*)}{dH'_*} = \frac{\partial(\Delta H_*)^2}{\partial\lambda} \cdot \frac{\partial\lambda}{\partial H'^2_*} \cdot \frac{H'_*}{\Delta H_*} = (3M + L)H^2 + A(3\lambda + \mu),$$

woraus folgt:

$$x = \frac{T\nu_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}}\left[(3M + L)H^2 + A(3\lambda + \mu)\right] \qquad 25)$$

Damit ist die in der Richtung des ausgezeichneten Strahles liegende Coordinate eines Punktes der Rückkehrkante durch $\lambda$ und $\mu$ ausgedrückt. Um ein Gleiches auch für die Coordinaten $y$ und $z$ in der Richtung der $\varDelta\eta_*$ und $\varDelta\zeta$-Axen thun zu können, denken wir uns durch jeden Punkt der Ebene $A_{2k+1}$ statt des durch ihn gehenden Strahles eine Parallele zu der Richtung, die der entsprechende Strahl der Gauss'schen Näherung hat, gezogen und auf ihr die Grösse $x$ abgetragen, wodurch man den Punkt $F'$ erhält. Diese Parallele wird, wenn es sich blos um Entfernungen 2. Ordnung von der Ebene $A_{2k+1}$ handelt, nur um Grössen 5. Ordnung von dem wahren Strahl abweichen, da ja die Winkel des wahren Strahles denen des genäherten bis auf Grössen 3. Ordnung gleich sind. Ebenso wird die Grösse $x$, welche als Entfernung unseres Punktes $F$ von $A_{2k+1}$ in der Richtung des ausgezeichneten Strahles gemessen gefunden wurde, nur um Grössen 4. Ordnung von der Entfernung jenes Punktes $F$ auf dem wahren Strahle gemessen unterschieden sein, da die Richtungen, in welchen die verglichenen Entfernungen 2. Ordnung gemessen wurden, beide bis auf Winkelgrössen 1. Ordnung senkrecht zur Ebene $A_{2k+1}$ standen. Somit wird der Punkt $F'$ bis auf Grössen 5. Ordnung in der Richtung der $z$ und $y$-Axen und bis auf eine Grösse 4. Ordnung in der Richtung des ausgezeichneten Strahles mit dem Punkte $F$ coincidieren. Der Punkt $F'$, den wir bei der beabsichtigten Genauigkeit mit $F$ verwechseln können, hat folgende Coordinaten:

$$\eta = \varDelta\eta_{*\,2k+1} - x\frac{\eta'_{*\,2k+1}}{K}\,; \quad z = \varDelta\zeta_{2k+1} - x\frac{\zeta'_{2k+1}}{K} \tag{26}$$

Nach Einführung der Parameter $\lambda$ und $\mu$ mittels der Gleichungen 22, 23 und 25 ergibt sich:

$$\begin{gathered} y^2 = \frac{-4\lambda^3\mu A^3}{MH^2}\,\frac{\nu^2_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}}\,; \quad z^2 = \frac{4(MH^2+A\lambda)^3(MH^2+A\mu)}{AMH^2}\,\frac{\nu^2_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}}\,; \\ x = \frac{T\nu_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}}\left[(3M+L)H^2 + A(3\lambda+\mu)\right] \end{gathered} \tag{27}$$

Diese 3 Gleichungen für die Coordinaten eines Punktes der Rückkehrkante der Developpablen stellen zugleich die Gleichungen des geometrischen Ortes derselben, also der Brennfläche, in Parameterform bezogen auf ein System geodätischer Linien $M = \text{const.}$ und dazu konjugierter Curven $\lambda = \text{const.}$ dar.

Eliminiert man noch den Parameter $\mu$ der geodätischen Linien mit Hilfe der letzten Gleichung, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} z^2 &= \frac{4(MH^2+A\lambda)^3}{AMH^2}\left(x\frac{\sigma^2_{2p+1}}{T\nu_{2p+1}} - (2M+L)H^2 - 3A\lambda\right)\frac{\nu^2_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}} \\ y^2 &= \frac{-4\lambda^3}{MH^2}\left(x\frac{\sigma^2_{2p+1}}{T\nu_{2p+1}} - (3M+L)H^2 - 3A\lambda\right)\frac{\nu^2_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Setzt man hierin $A\lambda = \frac{v - MH^2}{2}$, so ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} z^2 &= \frac{-1}{4AMH^2}(v + MH^2)^3 \left(3v - MH^2 - 2\left[x\frac{\sigma^2_{2k+1}}{T\nu_{2k+1}} - (M+L)H^2\right]\right)\frac{\nu^2_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}} \\ y^2 &= \frac{1}{4AMH^2}(v - MH^2)^3 \left((3v + MH^2 - 2\left[x\frac{\sigma^2_{2k+1}}{T\nu_{2k+1}} - (M+L)H^2\right]\right)\frac{\nu^2_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}} \end{aligned}\right\} \quad 29)$$

Die schon erwähnte Gleichung derselben Fläche, welche v. Seidel in dem Briefe an Kummer citiert, lautet:

$$\begin{aligned} -kz^2 &= (v + A)^3(3v - A - 2x) \\ ky^2 &= (v - A)^3(3v + A - 2x). \end{aligned} \quad 30)$$

Mit derselben wird die hier abgeleitete Gleichung identisch, wenn man die Grössen:

$$\frac{4AMH^2\sigma^2_{2k+1}}{\nu^2_{2k+1}}, \qquad MH^2 \qquad , \frac{x\sigma^2_{2k+1}}{T\nu_{2k+1}} - (M+L)H^2$$

mit folgenden: $k$ , $A$ , $x$ vertauscht.

Die Fläche steht in sehr naher Beziehung zur Centrafläche eines elliptischen Paraboloides. Wenn die Gleichung des letzteren folgendermassen geschrieben wird:

$$\frac{y^2}{a} + \frac{z^2}{b} - 2x - (a + b) = 0, \quad 31)$$

so ist die Gleichung der Centrafläche:

$$\begin{aligned} -b(a-b)Z^2 &= \left(v + \frac{a-b}{2}\right)^3\left(3v - \frac{a-b}{2} - 2X\right) \\ a(a-b)Y^2 &= \left(v - \frac{a-b}{2}\right)^3\left(3v + \frac{a-b}{2} - 2X\right). \end{aligned} \quad 32)$$

Sie geht in die Seidel'sche Gleichung der Brennfläche über, wenn:

$$X = x, \quad Y = y, \quad Z = \sqrt{\frac{a}{b}}\,z, \quad \text{ferner: } \frac{a-b}{2} = A \quad a(a-b) = k \text{ gesetzt wird:}$$

Die Gestalt der Brennfläche wurde von Herrn L. Schleiermacher[1]) diskutiert und durch ein Modell versinnlicht. Da in der Richtung der $x$-Axe alle Dimensionen von einer anderen Grössenordnung sind als in der Richtung der beiden anderen Axen, so sind die ersteren im Vergleich zu den letzteren stark verkürzt dargestellt.

Ohne die Diskussion, die keinerlei besondere Schwierigkeiten bietet, hier umständlich zu wiederholen, soll das Resultat derselben in einer Weise dargestellt werden,

---

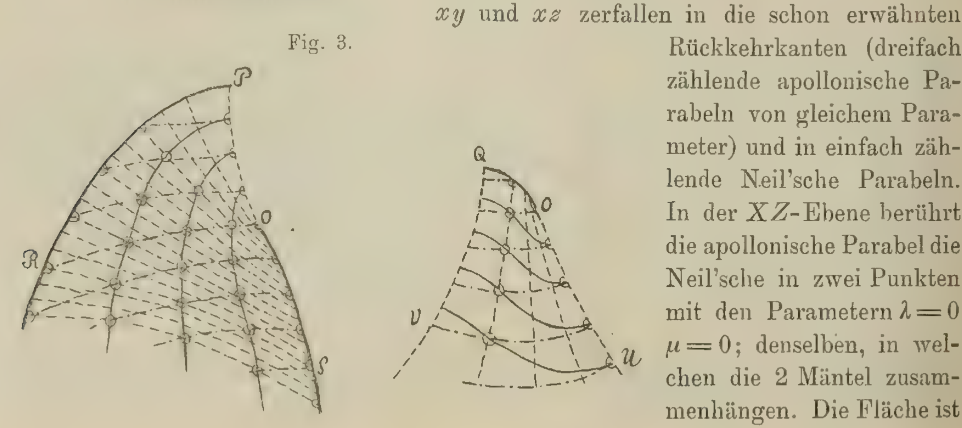
1) Mathematische Modelle, angefertigt im math. Institut des K. Polytechnikums zu München. Abteilung II. Unter Leitung von Prof. Dr. Brill. Eine photographische Reproduktion des Schleiermacher'schen Modelles siehe Tafel I.

an die sich die spätere Weiterverwendung der Brennfläche naturgemäss anknüpft. Wir bilden nämlich die Brennfläche in eine Ebene mit den rechtwinkligen Coordinaten $\lambda\,\mu$ ab, indem wir jedem durch ein Parameterpar bestimmten Punkt der Fläche denjenigen Punkt der $\lambda\,\mu$-Ebene zuordnen, dessen rechtwinklige Coordinaten eben diese Parameter sind. Die $y$-Coordinate der Fläche ist nur dann reell, wenn $\lambda$ und $\mu$ entgegengesetztes Zeichen haben, die $z$-Coordinate ebenso, wenn ein Gleiches mit den Ausdrücken $MH^2 + A\lambda$ und $MH^2 + A\mu$ der Fall ist. Es entsprechen daher reelle Punkte der Fläche nur jenen Punkten der $\lambda\mu$-Ebene, die in zwei in nebenstehender Figur 2 unschraffiert gelassenen Streifen liegen.

Fig. 2.

Jeder der Streifen entspricht einem Mantel der Brennfläche; jedem Punkt $\lambda\,\mu$ desselben gehören 4 symmetrisch in Bezug auf die $XY$- und $XZ$-Ebene gelegene Punkte eines solchen Mantels an. Der Streifen ist also gleichsam die Abbildung von einem Viertel des entsprechenden Mantels. Für $\lambda = 0$ und $\lambda = -\dfrac{MH^2}{A}$ hat die Brennfläche Parabeln als Rückkehrkanten in der $XY$- und $XZ$-Ebene, da für diese Parameterwerte $y^2$ resp. $z^2$ proportional mit $\lambda^3$ resp. $(MH^2 + A\lambda)^3$ und damit proportional mit der Veränderung von $X$ wird, welches ja linear von $\lambda$ abhängig ist. Für die Parameterwerte $\lambda = 0\;\mu = 0$ hängen die beiden Mäntel im Punkte $O$ zusammen. Ebenen Schnitten der Brennfläche parallel zur $XY$-Ebene entsprechen Gerade $3\,\lambda + \mu = \text{const.}$ Die Schnitte mit den beiden Coordinatenebenen $xy$ und $xz$ zerfallen in die schon erwähnten Rückkehrkanten (dreifach zählende apollonische Parabeln von gleichem Parameter) und in einfach zählende Neil'sche Parabeln. In der $XZ$-Ebene berührt die apollonische Parabel die Neil'sche in zwei Punkten mit den Parametern $\lambda = 0$ $\mu = 0$; denselben, in welchen die 2 Mäntel zusammenhängen. Die Fläche ist

Fig. 3.



neunter Ordnung. Die beiden Mäntel durchschneiden sich in einer Doppelkurve 12. Ordnung, die indessen mit der Eigenschaft der Fläche als Brennfläche nichts weiter zu thun hat. Den Geraden $\mu = \text{const}$ der Ebene entsprechen geodätische Linien der Fläche, den dazu senkrechte Geraden $\lambda = \text{const}$ dazu conjugierte Curven, welche daher einen ähnlichen Verlauf haben müssen, wie er in der Figur 3 angedeutet ist. Wenn man in dem Gleichungssystem der Fläche die Parameterwerte $\lambda$ und $\mu$ vertauscht, so wird dadurch die Fläche selbst natürlich nicht geändert; es ändert sich eben nur die Bedeutung der Parameter; $\lambda = \text{const}$ werden geodätische Linien, $\mu = \text{const}$ conjugierte Curven. Ein Parameterpar $\lambda\mu$ repräsentiert einen Strahl, oder genauer gesagt 4 symmetrisch gelegene Strahlen, von denen jeder in zwei Punkten, die auf verschiedenen Mänteln liegen, die Brennfläche berührt. Hiedurch werden auch die beiden Mäntel der Brennfläche punktweise aufeinander bezogen, beziehungsweise abgebildet und diese Abbildung überträgt sich ebenso auf die Streifen in der $\lambda\mu$-Ebene. Zwei Punkte dieser Ebene, für welche die $\lambda$ und $\mu$-Coordinaten dieselben Werte in vertauschter Anordnung haben, die also symmetrisch zur Geraden $\lambda = \mu$ liegen, entsprechen demnach solchen Punkten der Brennfläche, in denen ein und derselbe Strahl gleichzeitig berührt.

Unter den ebenen Schnitten der Brennfläche parallel zur $zy$ Ebene ist jener ausgezeichnet, welcher durch den Punkt $\lambda = 0$ $\mu = 0$ geht.

Für ihn ist $x = \frac{T\nu_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}}(3M + L)H^2$ und $3\lambda + \mu = 0$, oder $\mu = -3\lambda$.

Dies gibt für die $z$ und $y$-Coordinate:

$$y^2 = \frac{12A^3\lambda^4}{MH^2} \cdot \frac{\nu^2_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}}; \quad z^2 = \frac{4(MH^2 + A\lambda)^3(MH^2 - 3A\lambda)}{AMH^2} \cdot \frac{\nu^2_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}} \tag{33}$$

Aus der ersten Gleichung folgt: $\lambda^2 = \pm y \frac{H\sigma_{2k+1}}{2\sqrt{3}A\nu_{2k+1}} \sqrt{\frac{M}{A}}$.

Entwickelt man die linke Seite der zweiten Gleichung und ordnet man nach geraden und ungeraden Potenzen von $\lambda$, so folgt:

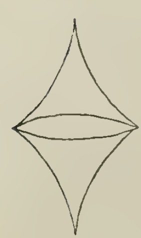
$$AMH^2z^2\frac{\sigma^2_{2k+1}}{\nu^2_{2k+1}} - 4M^4H^8 + 24M^2H^4A^2\lambda^2 + 12A^4\lambda^4 = 32MH^2A^3\lambda^3.$$

Nun quadriert man auf beiden Seiten und führt den Wert für $\lambda^2$ ein:

$$\left\{AMH^2z^2\frac{\sigma^2_{2k+1}}{\nu^2_{2k+1}} - 4M^4H^8 \pm \frac{12}{\sqrt{3}}M^2H^4Ay\frac{\sigma_{2k+1}}{\nu_{2k+1}}\sqrt{\frac{M}{A}} + AMH^2y^2\frac{\sigma^2_{2k+1}}{\nu^2_{2k+1}}\right\}^2$$
$$= \frac{128}{3\sqrt{3}}M^3H^7A^2y^3\sqrt{\frac{M}{A}}\,\frac{\sigma^3_{2k+1}}{\nu^3_{2k+1}}$$

$$\left\{z^2 + y^2 - \frac{4M^3H^6}{A} \cdot \frac{\nu^2_{2k-1}}{\sigma^2_{2k+1}} \pm 4\sqrt{3}MH^3y\frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}}\sqrt{\frac{M}{A}}\right\}^2$$
$$= \frac{128}{3\sqrt{3}}MH^3y^3\frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}}\sqrt{\frac{M}{A}}. \tag{34}$$

Fig. 4.



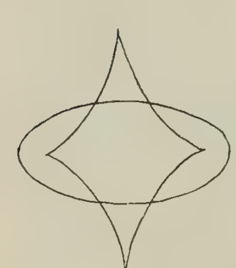
Diese Gleichung stellt zwei in Bezug auf die $z$-Axe symmetrisch liegende, dreispitzige Hypocycloiden dar; und zwar beträgt der Radius des äusseren Bahnkreises:

$$\frac{4}{\sqrt{3}} M H^3 \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} \sqrt{\frac{M}{A}};$$

der des inneren rollenden Kreises ist ein Drittel davon. (Fig. 4.)

Die weiteren Schnitte der Brennfläche parallel zur $yz$-Ebene bestehen, wie am einfachsten aus der Abbildung in der $\lambda\mu$-Ebene zu ersehen ist, für: $x > \frac{T\nu_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}} (3M + L) H^2$ aus einem ovalen und einem asteroidenartigen Zweige (Fig. 5); wenn:

Fig. 5.



$$x < \frac{T\nu_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}} (3M + L) H^2, \text{ aber } > T \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}} (2M + L) H^2$$

aus zwei ineinanderliegenden, spindelförmigen Zweigen (Fig. 6); wenn ferner $x < T \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}} (2M + L) H^2$ aber $> T \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}} L H^2$ aus einem solchen, endlich, wenn $x$ noch kleiner als letzterer Wert ist, wird die Schnittkurve ganz imaginär.

Fig. 6.



Aus der Form, welche v. Seidel der Gleichung der Brennfläche gegeben hat, ersieht man am einfachsten, dass alle durch dieselbe definierten Flächen, abgesehen von ihrer Lage zum dioptrischen System und von einzelnen Ausnahmefällen, die im nächsten Abschnitt erledigt werden, in affiner Beziehung zu einander stehen, wobei indessen das Verhältnis der $z$- und $y$-Coordinaten unverändert bleibt. Für ein und dasselbe dioptrische System und vorgegebene Objektebene sind die Grössen $A$, $M$, $T$, $h$, $\sigma$, $\nu$ constant; es ändert sich nur mit dem jeweils benützten Gesichtsfeld proportional die Grösse $H$. Die Längsdimensionen der Brennfläche hängen, wie aus der Gleichung 25 für die $x$-Coordinaten hervorgeht, in quadratischem Verhältnis von $H$ und damit vom Gesichtsfeld ab; die Querdimensionen dagegen, wie sich aus den Gleichungen für $z^2$ und $y^2$, oder noch einfacher aus dem Ausdruck für den Radius des Hypocycloidenkreises ergibt, von den dritten Potenzen der Grösse $H$. Je mehr man sich demnach von der Mitte des Gesichtsfeldes entfernt, um so grösser wird das an sich kleine Verhältnis der Querdimensionen zu den Längsdimensionen der Fläche.

Was nun die Lage der Brennfläche im Raum gegenüber der optischen Axe und der genäherten Bildebene bei verschiedener Lage des leuchtenden Punktes in der Objektebene betrifft, so ist es nützlich, zunächst die einzelnen $x$-Axen der Coordinatensysteme zu verfolgen, auf welche die Gleichung der Brennfläche bezogen erscheint.

Diese $x$-Axen sind die jeweils ausgezeichneten Strahlen $O'_0$ $O_0$ der zu den Brennflächen gehörigen Strahlensysteme. Dieselben liegen mit dem leuchtenden Punkt und der optischen Axe in einer Ebene. Alle in Betracht kommenden leuchtenden Punkte sollen in derselben Ebene durch die optische Axe angenommen werden, was in anbetracht der Symmetrie des Linsensystems in bezug auf die optische Axe offenbar zulässig ist. Von den Punkten $O'_0$ und $O_0$ liegt der erstere in einer Entfernung: $\eta'_{0\,2k+1} = H'_0 \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma'_{2k+1}} = \frac{B}{A} H \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma'_{2k+1}}$, der zweite dagegen in der Entfernung: $\eta_{2k+1} + \Delta \eta_{0\,2k+1} = (H + \Delta H_0) \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma'_{2k+1}}$ von der Axe. Wenn wir von dem Correktionsgliede $\Delta \eta_{0\,2k+1}$ absehen, sind beide Entfernungen proportional der Grösse $H$ und ihr Verhältnis beträgt: $\frac{B}{A} \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma'_{2k+1}}$.

Daher werden alle Verbindungslinien $O'_0$ $O$ in erster Näherung durch einen bestimmten Punkt $W$ der Axe gehen, dessen Abstand $\varepsilon$ von der Ebene $B_{2k+1}$ durch nachstehende Formel ausgedrückt wird:

$$\varepsilon = \eta'_{0\,2k+1} \cdot \frac{K}{\eta'_{0\,2k+1} - \eta_{2k+1}} = -\frac{B\,T\,\nu_{2k+1}}{A\sigma'_{2k+1}(B\sigma_{2k+1} - A\sigma'_{2k+1})}. \qquad 35)$$

Wir können daher folgenden Satz aussprechen: Die Symmetrieaxen (ausgezeichneten Strahlen) der Brennflächen, die zu den leuchtenden Punkten einer Objektebene gehören, convergieren nach einem Punkte $W$ der optischen Axe.

Nunmehr betrachten wir die Lage einzelner ausgezeichneter Punkte der Brennfläche auf dem jeweiligen ausgezeichneten Strahl. Als solche bieten sich drei dar: Die Scheitel $\alpha$ und $\beta$ der beiden Rückkehrparabeln und der Punkt $\gamma$, in welchem die zu Fig. 4 gehörige Schnittebene die Axe trifft. Für diese drei Punkte sind die $x$-Coordinaten, die bis auf hier zu vernachlässigende Grössen den Entfernungen von der genäherten Bildebene gleichgesetzt werden können, folgende:

$$\alpha \ldots\ldots x = T \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}} L H^2$$

$$\beta \ldots\ldots x = T \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}} (L + 2M) H^2$$

$$\gamma \ldots\ldots x = T \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}} (L + 3M) H^2$$

Sie sind alle dem Quadrate des Gesichtsfeldes proportional. Durch die Punkte $\alpha$ lässt sich demnach mit der hier angestrebten Genauigkeit eine Kugel legen, deren Radius $\varrho_\alpha$ sich folgendermassen ausdrückt:

$$\varrho_\alpha = \frac{\eta^2_{2k+1}}{2x}$$

Es ist nämlich $\eta_{2k+1}$ bis auf Grössen 3. Ordnung der Entfernung des Punktes $\alpha$ von der optischen Axe gleich und $x$ bis auf Grössen 4. Ordnung dem Abstande desselben Punktes von der Ebene $A_{2k+1}$. Die Formel stellt daher bis auf Grössen 2. Ordnung den betreffenden endlichen Kugelradius dar. Setzt man nach 4a:

$$\eta_{2k+1} = H \cdot \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}}$$

und den entsprechenden Wert für $x$, so erhält man:

$$\varrho_\alpha = \frac{\nu_{2k+1}}{2TL} = \frac{S(1)\,\nu_{2k+1}}{S(4)\,S(1) - S(2)^2} \qquad 36)$$

Analog für die Radien $\varrho_\beta, \varrho_\gamma$:

$$\varrho_\beta = \frac{S(1)\,\nu_{2k+1}}{S(1)\,(S(4) + 2\,S(3)) - 3\,S(2)^2} \qquad 37)$$

$$\varrho_\gamma = \frac{S(1)\,\nu_{2k+1}}{S(1)\,(S(4) + 3\,S(3)) - 4\,S(2)^2}. \qquad 38)$$

Nimmt man statt $\alpha$ oder $\beta$ einen zwischen, oder ausserhalb beiden liegenden Punkt $\delta$, dessen Abstandsverhältnis von $\alpha$ und $\beta$ wie $\varphi : 1$ ist, so werden alle entsprechend liegenden Punkte auf den verschiedenen ausgezeichneten Strahlen auf einer Kugel vom Radius $\varrho_\delta$ liegen, der sich, wie leicht zu sehen, aus den Radien $\varrho_\alpha$ und $\varrho_\beta$ folgendermassen berechnet:

$$\frac{1}{\varrho_\delta} = (1 + \varphi)\frac{1}{\varrho_\alpha} - \varphi\frac{1}{\varrho_\beta}. \qquad 39)$$

Alle diese Kugeln berühren die Ebene $A_{2k+1}$ in der optischen Axe; jede von ihnen schneidet aus den verschiedenen Brennflächen unter sich ähnliche Brennfiguren, aus, deren Dimensionen vom Centrum des Gesichtsfeldes gegen den Rand zu mit der dritten Potenz der Entfernung von der Axe wachsen. Man kann daher beispielsweise den Satz aussprechen:

Eine Kugel vom Radius $\varrho_\gamma$, welche die genäherte Bildebene $A_{2k+1}$ im Schnittpunkte mit der optischen Axe berührt, schneidet alle zu den leuchtenden Punkten der Objektebene $A_{-1}$ gehörigen Brennflächen nach einem Par dreispitziger Hypocyloiden, deren Dimensionen mit der dritten Potenz der Entfernung des leuchtenden Punktes von der optischen Axe wachsen.

## § 3.

## Specielle Fälle und Ausartungen der Brennfläche.

Für einen leuchtenden Punkt in der optischen Axe ist die Grösse $H$ gleich Null und damit vereinfachen sich die Formeln derartig, dass die Brennfläche zur Rotationsfläche wird. Es ist dies indessen nicht die einzige Möglichkeit, die Brennfläche zur Rotationsfläche zu machen; es gibt vielmehr dioptrische Systeme, welche für jeden beliebigen leuchtenden Punkt ausser der Axe — innerhalb unserer Näherung — eine Rotationsfläche als Brennfläche liefern. Um dieses zu erkennen, müssen wir auf die Formeln 12 zurückgreifen. Wenn wir hierin die Grösse $M=0$ setzen, was dem Verschwinden des Ausdruckes $S(1)\,S(3)-S(2)^2$ gleichbedeutend ist, so gehen dieselben in folgende Form über:

$$\Delta H_* = H'_*(AR'^2_* + LH^2)$$
$$\Delta Z = Z'(AR'^2_* + LH^2).$$

Durch Quadrieren und Addieren beiderseits erhält man:

$$(\Delta H_*)^2 + (\Delta Z)^2 = (\Delta R_*)^2 = R'^2_*(AR'^2_* + LH^2)^2, \text{ woraus:}$$
$$\Delta R_* = R'_*(AR'^2_* + LH^2). \tag{40}$$

Durch Division beiderseits:

$$\frac{\Delta H_*}{\Delta Z} = \frac{H'_*}{Z'}. \tag{41}$$

Daraus erkennt man, dass die Schnittpunkte der Strahlen in den beiden Ebenen $A_{2k+1}$ und $B_{2k+1}$ um die betreffenden Anfangspunkte der Coordinaten $O_0$ und $O'_0$ nach allen Richtungen symmetrisch liegen, wenn dies in einer Ebene der Fall ist. Entsprechende Punkte beider Ebenen miteinander verbunden geben demnach Strahlen, welche den ausgezeichneten Strahl alle schneiden und um ihn herum symmetrisch gelagert sind. Das confokale Kegelschnittsystem der Ebenen $B$ geht, wie aus den Formeln ersichtlich ist, in eine Schar concentrischer Kreise: $R'_* = \text{const.}$ und das Büschel ihrer Radien: $\frac{H'_*}{Z'} = \text{const.}$ über.

Für den Meridian der Brennfläche lassen sich dann die Formeln ableiten:

$$x = T\frac{\nu_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}}(3AR'^2_* + LH^2)$$

$$r = \sqrt{y^2+z^2} = -2AR'^3_*\frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}}, \text{ woraus:}$$

$$r^2 = \frac{4}{27}\frac{\nu^2_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}}\cdot\frac{1}{A}\left(x\frac{\sigma^2_{2k+1}}{T\nu_{2k+1}} - LH^2\right)^3. \tag{42}$$

Diese Gleichung stellt eine Neil'sche Parabel dar, deren Spitze von der Ebene $A_{2k+1}$ um die Grösse $x = \frac{L T \nu_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}} H^2$ absteht. Die Tangente in der Spitze ist die Rotationsaxe der Brennfläche. Alle Spitzen der Brennflächen, die den leuchtenden Punkten der Objektebene zugehören, liegen wieder auf einer Kugelfläche, deren Radius durch den Ausdruck:

$$\varrho_\alpha = \frac{\nu_{2k+1}}{2 T L} = \frac{S(1)\,\nu_{2k+1}}{S(4)\,S(1) - S(2)^2} \tag{43}$$

gegeben ist.

Da der Parameter der Neil'schen Parabel von der Grösse $H$ (dem Gesichtsfeld) unabhängig ist, so sind in diesem Falle alle Brennflächen kongruent. Daher der Satz: Wenn für ein gegebenes dioptrisches System und eine gegebene Objektebene der Ausdruck: $S(1)S(3) - S^2(2)$ verschwindet, so sind alle Brennflächen, die zu leuchtenden Punkten der Objektebene gehören, congruente Rotationsflächen, mit einer Neil'schen Parabel als Meridian, deren Spitzen auf einer Kugel vom Radius $\varrho_\alpha = \frac{S(1)\,\nu_{2k+1}}{S(4)S(1) - S^2(2)}$ liegen. Verschwindet auch $S(1)S(4) - S(2)^2$, ohne dass $S(1) = 0$ wird, was das Verschwinden von $S(2)$ und $S(4)$ nach sich zieht, so geht jene Kugel in die genäherte Bildebene über.

Wird in den Formeln 12 $H = 0$ gesetzt, also der leuchtende Punkt in der Axe angenommen, so werden dieselben auch von $M$ unabhängig und in diesem Falle ist daher die Brennfläche dieselbe, gleichviel ob $M = 0$ ist oder nicht. Die Formel 42 gilt daher stets für die Brennfläche des leuchtenden Punktes, der in der Axe liegt.

Es ist bisher immer die stillschweigende Voraussetzung gemacht worden, dass $S(1) = 2AT^3$ nicht verschwinde. Denn sonst wäre ja die Reduktion der Gleichungen 8 auf die symmetrische Form nicht ausführbar gewesen, da diese eine Coordinatenverschiebung um $H'_0 = \frac{B}{A} H$ notwendig machte. Nur in dem einen Falle, wo $H = 0$, das heisst der leuchtende Punkt in der Axe angenommen ist, fällt diese Verschiebung fort und für diesen Fall gelten also auch unsere Gleichungen, wenn $A = 0$ gesetzt wird. Dann wird aber der Parameter der Neil'schen Parabel, die den Meridian der Brennfläche bestimmt, unendlich gross, es existiert überhaupt keine Brennfläche mehr, alle von dem leuchtenden Punkt der Axe ausgehenden Strahlen schneiden sich nach der Brechung bis auf Abweichungen 5. Ordnung wieder in einem Punkt. Wenn demnach $S(1) = 0$ wird, so ist der Kugelgestaltsfehler des dioptrischen Systems in der Axe gehoben. Unter dieser Voraussetzung ist eine symmetrische Gestaltung der Formeln für einen leuchtenden Punkt ausserhalb der Axe, wie sich herausstellen wird, überhaupt ausgeschlossen. Wenn $A = 0$ ist, vereinfachen sich die Formeln 8 zunächst folgendermassen:

$$\varDelta H = H(-3BH'^2 + HH'(E+2G) - BZ'^2) - DH^3$$
$$\varDelta Z = Z'(EH^2 - 2BHH').$$

Die erste von beiden lässt sich durch Parallelverschiebung des Coordinatensystems in der Richtung der $H'$-Axe noch weiter reducieren:

$$H' = H'_0 + H'_*, \quad H'_0 = \frac{G}{2B} H = \frac{2\chi S(2) + TS(3)}{2S(2)} H \tag{44)}$$

$$\begin{aligned} \varDelta H &= HH'_*(H(E-G) - 2BH'_*) - BHR'^2_* - DH^3 \\ \varDelta Z &= HZ'(H(E-G) - 2BH'_*). \end{aligned} \tag{45)}$$

Es soll wieder der von der Oeffnung unabhängige Teil von $\varDelta H$ abgetrennt und mit $\varDelta H_0$ bezeichnet werden.

$$\varDelta H = \varDelta H_* + \varDelta H_0 \quad \varDelta H_0 = -DH^3 = -\frac{3\chi^2 S(2) + \chi T(2S(3) + S(4)) + T^2 S(5)}{2T^2} H^3$$

Die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \varDelta H_* &= HH'_*(H(E-G) - 2BH'_*) - BHR'^2_* \\ \varDelta Z &= HZ'(H(E-G) - 2BH'_*) \end{aligned} \tag{46)}$$

werden nun ganz analog den Gleichungen 12 weiter behandelt.

Um die Strahlen des austretenden Strahlensystems nach Developpablen zu ordnen, bilden wir die Differentialgleichung 15, wobei wir folgende Werte für die Differentialquotienten einzuführen haben:

$$\frac{\partial \varDelta H_*}{\partial Z'} = -2BHZ'$$

$$\frac{\partial \varDelta H_*}{\partial H'_*} = H^2(E-G) - 6BHH'_*$$

$$\frac{\partial \varDelta Z}{\partial Z'} = H^2(E-G) - 2BHH'_*$$

$$\frac{\partial \varDelta Z}{\partial H'_*} = -2BHZ'$$

So erhalten wir:

$$(dH'_*)^2 - 2\,dH'_*\,dZ'\,\frac{H'_*}{Z'} - (dZ')^2 = 0 \tag{47)}$$

Das allgemeine Integral wird: $Z'^2 = \lambda^2 + 2\lambda H'_*$ und stellt eine Schar confocaler Parabeln dar.

Geht man von den reducierten Coordinaten auf diejenigen der Diaphragmenebene über, und ordnet man die einfallenden Strahlen in Kegel, welche die confocalen Parabeln der Diaphragmenebene zu Leitlinien haben, so werden die Strahlen eines Kegels nach ihrer Brechung wieder Developpable bilden; daher der Satz: Werden in einem dioptrischen System, bei welchem für eine bestimmte Entfer-

nung der Objektebene der Kugelgestaltfehler in der Axe gehoben ist, die von einem Punkt ausserhalb der Axe ausgehenden Strahlen so nach Kegeln geordnet, dass die Erzeugenden eines Kegels nach ihrer Brechung Developpable bilden, so schneidet eine Ebene senkrecht zur optischen Axe die Kegel nach einem System confocaler Parabeln.

Wir führen nun wieder statt der Grössen $H'_*$, $Z'$ die Parameter der confocalen Parabelschar ein:

$$H'_* = -\frac{\mu+\lambda}{2}; \quad Z'^2 = -\mu\lambda \tag{48}$$

$$\begin{aligned} \varDelta H_* &= -\frac{\mu+\lambda}{2} H\,[H(E-G)+B(\lambda+\mu)] - BH\left(\frac{\lambda-\mu}{2}\right)^2 \\ \varDelta Z &= \sqrt{-\lambda\mu}\, H\,[H(E-G)+B(\lambda+\mu)]. \end{aligned} \tag{49}$$

Dann gehen wir von den reducierten Coordinaten auf jene der Ebenen $A_{2k+1}$ $B_{2k+1}$ über und erhalten:

$$\eta'_{*2k+1} = -\frac{\lambda+\mu}{2}\frac{\nu_{2k+1}}{\sigma'_{2k+1}}; \quad \zeta'^2 = -\mu\lambda\frac{\nu^2_{2k+1}}{\sigma'^2_{2k+1}} \tag{50}$$

$$\left.\begin{aligned} \varDelta\eta_{*2k+1} &= \left\{-\frac{\lambda+\mu}{2} H[H(E-G)+B(\lambda+\mu)] - BH\left(\frac{\lambda-\mu}{2}\right)^2\right\}\frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} \\ (\varDelta\zeta_{2k+1})^2 &= -\lambda\mu H^2[H(E-G)+B(\lambda+\mu)]^2\frac{\nu^2_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}}. \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Um zur Gleichung der Brennfläche zu gelangen, sei als Coordinatensystem jenes gewählt, welches von den Geraden $\varDelta\eta_{*2k+1}=0$ als $y$-Axe und $\varDelta\zeta_{2k+1}=$ als $z$-Axe und ausserdem von der Verbindungslinie des Ursprungs dieses Coordinatensystems der Ebene $A_{2k+1}$ mit dem Punkte $Z'=0$ $H'_*=0$ der Ebene $B_{2k+1}$ als $x$-Axe gebildet wird. Letztere Verbindungslinie tritt nunmehr an die Stelle des ausgezeichneten Strahles.

Unter dieser Voraussetzung lässt sich die Formel 24:

$$x = \frac{d(\varDelta H_*)}{d\varDelta H'_*}\cdot\frac{T\nu_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}} = \frac{\partial(\varDelta H_*)}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial H'_*}T\frac{\nu_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}} \tag{24}$$

direkt anwenden. Wenn man nun:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\varDelta H_*)}{\partial\lambda} &= -\frac{H^2(E-G)}{2} - BH(\lambda+\mu) - BH\frac{\lambda-\mu}{2} \\ \frac{\partial H'_*}{\partial\lambda} &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

setzt, so ergibt sich:

$$x = H[H(E-G)+B(3\lambda+\mu)]\,T\frac{\nu_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}}. \tag{52}$$

Ebenso gelten für die $y$ und $z$-Coordinaten die Gleichungen 26:

$$y = \varDelta \eta_{*2k+1} - x \frac{\eta'_{*2k+1}}{K}; \quad z = \varDelta \zeta_{2k+1} - x \frac{\zeta'_{2k+1}}{K}$$

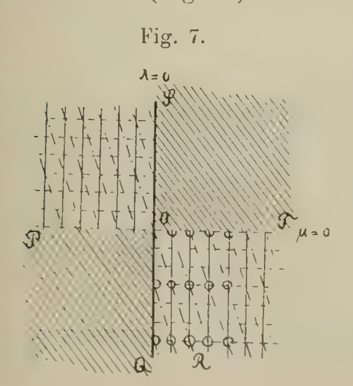
Hieraus folgt noch Einführung von $\lambda$ und $\mu$ aus 48 und 49:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} \frac{BH}{4} (3\lambda^2 + 6\lambda\mu - \mu^2) \\ z^2 &= - \frac{\nu^2_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}} 4 B^2 H^2 \lambda^3 \mu \\ x &= H[H(E-G) + B(3\lambda + \mu)] T \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}} \end{aligned}\right\} \qquad 53)$$

Wie man aus dieser Gleichung der Brennfläche ersieht, ist die letztere symmetrisch zur $xy$-Ebene. Führt man an stelle von $x$ einen um: $x_0 = H^2(E-G) T \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}}$ verschiedenen Wert $x_*$ ein, so dass: $x_* = BH \frac{T\nu_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}} (3\lambda + \mu)$, so zeigt sich, dass die Brennfläche auch symmetrisch zur Ebene $x = x_0$ ist. Aendert man nämlich gleichzeitig das Zeichen von $\lambda$ und $\mu$, so ändert sich weder Grösse noch Vorzeichen von $y$ und $z$, dagegen das Vorzeichen, wenn auch nicht die Grösse von $x_*$.

Nach Art der Ableitung geben die Curven $\mu = \text{const}$ geodätische Linien, die Curven $\lambda = \text{const}$ dazu conjugierte Linien der Fläche, die selbst aus 2 Mänteln besteht. Wir wollen dieselbe wieder in eine $\lambda\mu$-Ebene abbilden, so dass einem durch das Parameterpar $\lambda, \mu$ definierten Punkte der Fläche der Punkt mit den rechtwinkligen Coordinaten $\lambda, \mu$ der Ebene entspricht. Da $z$ nur für Parameterwerte von entgegengesetztem Vorzeichen reell wird, so entsprechen nur dem 2. und 4. Quadranten der $\lambda\mu$-Ebene reelle Punkte der Fläche. Jeder der Quadranten ist das Bild eines Mantels der Fläche. (Fig. 7.)

Fig. 7.




Die Schnitte mit Ebenen $x_* = \text{const}$ werden durch Gerade abgebildet, die in beistehender Figur 7 strichpunktiert sind; die geodätischen Linien sind durch punktierte, die conjugierten Curven durch ausgezogene Linien angedeutet. Die conjugierte Curve $\lambda = 0$ ist eine in der $xy$-Ebene verlaufende Parabel $OQ$ von der Gleichung:

$$y = -\frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} \frac{BH}{4} \mu^2; \quad x_* = \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}} TBH\mu,$$

oder:

$$y = -\frac{\sigma^3_{2k+1}}{4T^2 BH \nu_{2k+1}} x_*^2. \qquad 54)$$

Fig. 8.

Dieselbe ist Rückkehrkante der Fläche, da für $\lambda^3 = 0$ $z^2 = 0$ wird. Die geodätische Linie $\lambda = 0$ liegt ebenfalls in der $xy$-Ebene und zwar ist dieselbe ebenfalls eine Parabel $OT$, deren Oeffnung aber der vorgenannten entgegengesetzt ist.

$$y = \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} \frac{3}{4} BH\lambda^2 \qquad x_* = 3 \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}} TBH\lambda$$

$$y = \frac{\sigma^3_{2k+1}}{12\, T^2 BH \nu_{2k+1}} x_*^2 \tag{55}$$

Letztere ist, da für $\mu = 0$ $z^2 = 0$ wird, eine einfache Symmetrielinie des Mantels. Siehe Figur 8, welche eine Hälfte des Mantels darstellt. Auf Tafel I Figur 2 sind die beiden Mäntel in ihrem Zusammenhange abgebildet.

Wird $3\lambda^2 + 6\mu\lambda - \mu^2 = 0$ gesetzt, oder $\mu = (3 \pm 2\sqrt{3})\lambda$, so erhält man den Schnitt mit der $xz$-Ebene:

$$\left.\begin{aligned} z^2 &= -4 \frac{\nu^2_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}} B^2 H^2 (3 \pm 2\sqrt{3}) \lambda^4 \\ x_* &= HBT \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}} (6 \pm 2\sqrt{3}) \lambda \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Die erste der beiden Gleichungen zerfällt in zwei solche, welche aber nur reelle Coefficienten haben, wenn $\sqrt{3}$ mit negativem Zeichen genommen wird:

$$\left.\begin{aligned} z &= \pm 2 \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} BH\lambda^2 \sqrt{2\sqrt{3} - 3} \\ x_* &= \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}} BHT\lambda (6 - 2\sqrt{3}) \\ z &= \pm \frac{1}{2} \frac{\sigma^3_{2k+1} \sqrt{2\sqrt{3} - 3}}{\nu_{2k+1} BHT^2 (3 - \sqrt{3})^2} x_*^2 \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Der reelle Teil des Schnittes mit der $xz$-Ebene zerfällt demnach in zwei symmetrisch gelegene, im Anfangspunkte sich berührende Parabeln.

Was die Schnitte mit Ebenen parallel zur $yz$-Ebene anlangt, so ergibt sich der Schnitt mit der Ebene $x_* = 0$ als besonders einfach. Für ihn ist $\mu = -3\lambda$ also:

$$y = -6 \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} BH\lambda^2 \quad z^2 = 12 \frac{\nu^2_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}} B^2 H^2 \lambda^4$$

$$\text{oder} \quad z = \pm 2 \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} BH\lambda^2 \sqrt{3} \qquad y = \pm \sqrt{3}\, z \tag{58}$$

Er zerfällt demnach in ein Geradenpar. In demselben durchschneiden sich die beiden Mäntel. Jeder Schnitt parallel zu der Ebene $x = x_0$ besteht aus zwei Zweigen, von denen einer einer halben Hyperbel, der andere einer Neil'schen Parabel ähnlich sieht. Siehe nachstehende Figur 9.

Fig. 9.

Wie aus den Gleichungen 53 unschwer zu entnehmen ist, unterscheiden sich die möglichen speciellen Brennflächen, abgesehen von ihrer Lage im Raum und ihrer absoluten Grösse nur durch das Verhältnis der Querdimensionen zu den Längsdimensionen. Dieses Verhältnis ist, wie aus den Ausdrücken für die Parameter der Parabeln 54, 55, 57 ersichtlich wird, von der ersten Grössenordnung und proportional dem Gesichtsfeld.

Ueber die Lage der speciellen Brennfläche gegenüber dem optischen System gelten ganz ähnliche Bemerkungen wie im allgemeinen Falle. Hat der leuchtende Punkt verschiedene Distanz von der optischen Axe, so werden die $x$-Axen der Coordinatensysteme, auf welche die den verschiedenen Lagen desselben zugehörigen Brennflächen bezogen sind, in erster Näherung gegen einen Punkt der optischen Axe convergieren, dessen Entfernung $\varepsilon$ von der Ebene $B_{2k+1}$ ähnlich wie im allgemeinen Falle berechnet wird. Sie ergibt sich hiebei zu:

$$\varepsilon = \frac{G\,T\,\nu_{2k+1}}{2\,B\,\sigma'_{2k+1}\,(G\,\sigma_{2k+1} - 2\,B\,\sigma'_{2k+1})} \qquad 59)$$

Die Entfernung der zur $yz$-Ebene parallelen Symmetrieebene der Brennfläche: $x_0 = (E - G)\,T\,\frac{\nu_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}}\,H^2$ ist dem Quadrate der Entfernung des leuchtenden Punktes von der optischen Axe und damit auch dem der genäherten Entfernung des Bildpunktes von der Axe proportional, woraus wieder folgt, dass die Punkte der $x$-Axe, für welche $x = x_0$ ist, auf einer Kugelfläche liegen, welche die genäherte Bildebene im Schnitt mit der optischen Axe berührt und deren Radius sich zu:

$$\varrho = \frac{\nu_{2k+1}}{2\,T(E - G)} = \frac{\nu_{2k+1}}{S(3) - S(4)} \quad \text{berechnet.} \qquad 60)$$

Satz: Ist der Kugelgestaltsfehler eines dioptrischen Systems in der Axe gehoben, dann schneidet eine Kugel vom Radius $\varrho = \frac{\nu_{2k+1}}{S(3) - S(4)}$ aus den Brennflächen, die zu den verschiedenen leuchtenden Punkten einer Objektebene gehören, je zwei (unendlich kleine) Stücke von Geraden aus, die unter einem Winkel von 60° zusammenstossen. Je nachdem die Grösse $S(2)$ positiv oder negativ ist, kehrt sich der Scheitel des Winkels gegen den Rand oder gegen die Mitte des Gesichtsfeldes.

Wir kommen nun zu dem Falle, dass die Grösse $B = \frac{S(2)}{2T^2}$ neben $A$ oder $S(1)$ verschwindet.[1]) Hier lässt uns wieder die vorhin angewendete Coordinatentransformation $H' = H'_0 + H'_*$ im Stich, da $H'_0 = \frac{G}{2B} H$ unendlich gross würde. Die Formeln 8 lauten in diesem Falle:

$$\begin{aligned} \varDelta H &= H'(E + 2G) H^2 - D H^3 \\ \varDelta Z &= Z' E H^2 \end{aligned} \qquad 61)$$

Es bedarf hier keiner weiteren Verschiebung des Coordinatensystems $H'\,Z'$ mehr, dagegen wird man für $\varDelta H = \varDelta H_0 + \varDelta H_*$ schreiben, wobei wieder $\varDelta H_0 = -DH^3$ ist. So ergibt sich:

$$\begin{aligned} \varDelta H_* &= H'(E + 2G) H^2 \\ \varDelta Z &= Z' E H^2 \end{aligned} \qquad 62)$$

Die Abbildung der $H'\,Z'$-Ebene in die $\varDelta H_*\,\varDelta Z$-Ebene ist in diesem Falle einfach eine affine. Das Strahlensystem, welches die entsprechenden Punkte der Ebenen $A_{2k+1}$ und $B_{2k+1}$ verbindet, wird ein lineares; an stelle der Developpablen treten Ebenen, die sich in den Direkticen (Brennlinien) schneiden. Die Brennfläche selbst degeneriert in die beiden Direkticen und besteht aus 2 geraden Brennlinien. Die Curven der Ebene $H'\,Z'$, welche den Developpablen entsprechen, sind die Geraden $H' = \lambda$, $Z' = \mu$. Die entsprechenden Curven der Ebene $\varDelta H_*\,\varDelta Z$:

$$\varDelta H_* = \lambda (E + 2G) H^2, \quad \varDelta Z = \mu E H^2. \qquad 63)$$

Von den reducierten Coordinaten auf diejenigen der Ebenen $A_{2k+1}\ B_{2k+1}$ übergehend, erhält man:

$$\eta'_{2k+1} = \lambda \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma'_{2k+1}} H^2 \qquad \zeta'_{2k+1} = \mu \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma'_{2k+1}} H^2 \qquad 64)$$

$$\varDelta \eta_{*\,2k+1} = \lambda \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} (E + 2G) H^2 \qquad \varDelta \zeta_{2k+1} = \mu \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} E H^2 \qquad 65)$$

Führt man als $x$-Axe die Gerade, welche die Punkte mit den Parametern $\lambda = 0\ \mu = 0$ verbindet, ein, während die $y$ und $z$-Axe mit der $\varDelta\eta$ und $\varDelta\zeta$-Axe der Ebene $A_{2k+1}$ zusammenfallen, so erhält man für die $x$-Coordinaten der Brennlinien:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= (E + 2G) H^2 T \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}} \\ x_2 &= E H^2 T \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}} \end{aligned}\right\} \qquad 66)$$

1) Die Diskussion dieses Falles findet sich bereits in den astronomischen Nachrichten 1027 ff.

In ersterer schneiden sich die Strahlen, welche den Punkten der Geraden $\mu = \text{const}$, in letzterer die Strahlen, welche denen der Geraden $\lambda = \text{const}$ entsprechen; erstere ist daher parallel zur $z$-Axe, letztere zur $y$-Axe.

Diejenigen Punkte der $x$-Axe, in welchen sie von den Brennlinien geschnitten wird, haben wieder Entfernungen $x_1$, $x_2$ von der Ebene $A_{2k+1}$, die dem Quadrate des Gesichtsfeldes proportional sind. Sucht man diese Punkte für alle leuchtenden Punkte der Objektebene auf, so liegen dieselben auf zwei Kugelflächen, deren Radien $\varrho_1$ und $\varrho_2$ durch die Formeln:

$$\varrho_1 = \frac{\nu_{2k+1}}{S(4) + 2S(3)} \qquad \varrho_2 = \frac{\nu_{2k+1}}{S(4)} \tag{67}$$

bestimmt sind.

Herr Professor v. Seidel hat in den Astronomischen Nachrichten nachgewiesen, dass bei dem von Fraunhofer konstruierten Objektiv des Königsberger Heliometers die Bedingung $S(2) = 0$ nahezu erfüllt ist und knüpft daran den Vorschlag, die Bedingung, unter welcher die Brennflächen in Brennlinien degenerieren, Fraunhoferbedingung zu nennen. Innerhalb der Grenzen unserer Näherung fällt dieselbe mit der Abbe'schen Sinusbedingung zusammen, wie Seidel in einem Vortrag in der Sitzung der k. Akademie der Wissenschaften auseinandergesetzt hat.

Die beiden durch die Coordinaten $x_1$ und $x_2$ bestimmten Punkte fallen dann in einen einzigen zusammen, wenn die Grösse $G$ zu Null wird. Da $S(1)$ und $S(2)$ bereits gleich Null vorausgesetzt sind, so bedeutet das Verschwinden von $G$ dasselbe wie $S(3) = 0$. Tritt dieser Fall ein, so entspricht jedem leuchtenden Punkt der Objektebene ein bestimmter leuchtender Punkt, in dem sich die gebrochenen Strahlen schneiden. Alle diese Bildpunkte liegen auf einer Kugel vom Radius: $\varrho_2 = \frac{\nu_{2k+1}}{S(4)}$, welche die genäherte Bildebene $A_{2k+1}$ in der Axe berührt. Damit diese Kugel zur Ebene werde, muss auch noch $S(4)$ verschwinden. Dann bildet sich die Objektebene thatsächlich scharf auf die Bildebene ab. Aber noch nicht correkt. Zwar wird das Correktionsglied $\Delta Z = 0$, aber $\Delta H = -DH^3$ zeigt an, dass der wahre Bildpunkt von dem durch die Näherung bestimmten Ort um eine Grösse absteht, die der dritten Potenz des Gesichtsfeldes proportional ist. Erst, wenn auch $D$ verschwindet, was $S(5) = 0$ bedeutet, findet eine punktweise, vollkommen scharfe und korrekte Abbildung der Objektebene auf die Bildebene statt.

Das Verschwinden der 5 Summen $S(1)$, $S(2)$, $S(3)$, $S(4)$, $S(5)$ ist notwendige und hinreichende Bedingung für das Zustandekommen eines scharfen und correkten Bildes.

## § 4.

### Die Lichtflecke an stelle der scharfen Bilder leuchtender Punkte.

Abbildung der Blendenebene in die Schirmebene durch die von einem leuchtenden Punkt ausgegangenen Strahlen.

Nach den Untersuchungen der vorigen Paragraphen über die Brennfläche der gebrochenen Strahlen ist es unmittelbar klar, dass ein leuchtender Punkt durch ein dioptrisches System in der Regel nicht als scharfer Punkt abgebildet wird. Wenn wir die gebrochenen Strahlen mit einem Schirm auffangen, so wird — selbstverständlich vorausgesetzt, dass in erster Näherung ein reelles Bild zu stande kommt — bei keiner Stellung des Schirmes ein scharfes Bild erscheinen, sondern stets ein mehr oder minder ausgedehnter Lichtfleck. Nach Massgabe der Lage, Grösse und Helligkeitsverteilung dieses Lichtfleckes und der Veränderung desselben, einesteils bei verschiedener Abblendung des Linsensystems, andernteils bei verschiedener Entfernung des leuchtenden Punktes von der Axe und endlich bei Verschiebung des Schirmes ist die optische Leistung zu beurteilen. Dies ist von hervorragenden Autoritäten auf dem Gebiete der optischen Praxis betont und geübt worden.[1]) Streng genommen ist indessen diese Beurteilung nur dort gerechtfertigt, wo die Projektion auf einen Schirm wirklich Zweck des optischen Systems ist, also hauptsächlich bei photographischen Objektiven. Dass die Sachlage bei optischen Systemen, die zur Ocularbeobachtung dienen und welche demnach für sich betrachtet ein virtuelles Bild des Gegenstandes liefern, nicht unwesentlich anders ist, geht schon daraus hervor, dass beispielsweise bei sonst scharfer Abbildung die Krümmung des Bildfeldes in ersterem Falle sehr störend wirkt, während sie im letzteren Falle sogar zur Verbesserung des Bildes beitragen kann, falls ihr Radius der deutlichen Sehweite nahe kommt. Eine strenge mathematische Behandlung des zweiten Falles hängt von der Erledigung gewisser Fragen physiologischer Natur ab, bezüglich der Auffassung der Unschärfe eines astigmatischen Strahlenbündels mit sehr geringer Distanz der Brennpunkte durch das Auge. Er soll hier ausser Acht bleiben.

Ehe zur Untersuchung der Lichtflecke selbst übergegangen wird, soll die Ordnung des Systems der gebrochenen Strahlen abgeleitet werden, da ihre Kenntnis für das Folgende von Wichtigkeit ist. Wir suchen zu dem Zweck die Anzahl der Strahlen auf, welche durch einen Punkt der Ebene $A_{2k+1}$ gehen. Wir gehen dabei von den Gleichungen 12 in reducierten Coordinaten aus:

$$\varDelta H_* = H'_* (A R'^2_* + (L + 2M) H^2) \qquad 12a)$$

$$\varDelta Z = Z' (A R'^2_* + L H^2) \qquad 12b)$$

1) Dr. A. Steinheil, Ueber den Einfluss der Objektivkonstruktion etc. Sitz.-Ber. der math.-phys. Classe der k. b. Akademie der W. 1889 Bd. XIX.

A. Steinheil und E. Voit, Handbuch der angewandten Optik 1. Bd.

Aus der ersten Gleichung folgt:

$$Z'^2 = \frac{\varDelta H_* - A H'^3_* - (L+M) H^2 H'_*}{A H'_*}.$$

Setzt man diesen Wert in die zum Quadrat erhobene zweite Gleichung, so ergibt sich:

$$(\varDelta Z)^2 = \frac{\varDelta H_* - A H'^3_* - (L+2M) H^2 H'_*}{A H'^3_*} (\varDelta H_* - 2 M H H'_*)^2. \qquad 68)$$

Das ist eine Gleichung 5. Grades für $H'_*$; zu jeder Wurzel derselben finden sich aus der Gleichung 12a) 2 gleiche und entgegengesetzte Werte für $Z$, von denen aber nur der eine der Gleichung 12b) genügen kann. Es gibt also zu einem bestimmten Wertepare $\varDelta H_*$, $\varDelta Z$ 12 Wertepare $H'_*$, $Z'$, welche den Gleichungen genügen. Berücksichtigen wir den Umstand, dass $\varDelta H_*$ und $\varDelta Z$ einen Punkt der Ebene $A_{2k+1}$, ebenso $H'_*$ und $Z'$ einen solchen der Ebene $B_{2k+1}$ festlegen und die durch die Formeln 12 zusammengebundenen Punkte auf Strahlen des Systems liegen, so folgt, dass durch einen Punkt der Ebene $A_{2k+1}$ 5 Strahlen des Systems der gebrochenen Strahlen gehen, die natürlich zum Teil imaginär sein können. Da die Ebene $A_{2k+1}$ in Bezug auf das Strahlensystem keine ausgezeichnete Rolle spielt, so folgt, dass das System der gebrochenen Strahlen 5. Ordnung ist. Für $M=0$ reduciert sich die Ordnung auf die dritte, wie aus der Gleichung unmittelbar zu ersehen ist; wir haben es dann mit dem schon betrachteten Fall zu thun, in dem die Brennfläche Rotationsfläche wird. In dem Falle $A=0$ muss man von den Gleichungen 46 ausgehen und findet dann auf ganz analogem Wege, dass hier die Ordnung 4 ist. Die Klasse des Strahlensystems ist im allgemeinen Falle gleich 3. Denn, denken wir uns eine beliebige Ebene $\mathfrak{E}$, welche die Ebene $A_{2k+1}$ nach der Geraden $\mathfrak{G}$: $\alpha \varDelta H + \beta \varDelta Z + \gamma = 0$ und die dazu parallele Ebene $B_{2k+1}$ nach den Geraden $\mathfrak{G}'$: $\alpha H' + \beta Z' + \gamma_1 = 0$ schneidet, so werden den Punkten ersterer Geraden $\mathfrak{G}$ in $A_{2k+1}$ die Punkte einer Curve 3. Ordnung in $B_{2k+1}$ entsprechen, wie man durch Einsetzen der Ausdrücke von $\varDelta H$ und $\varDelta Z$ nach den Gleichungen 12 erkennt. Diese Curve 3. Ordnung wird von der Geraden $\mathfrak{G}'$ in drei Punkten geschnitten, welche mit den drei ihnen entsprechenden Punkten von $\mathfrak{G}$ verbunden die drei Strahlen des Systems liefern, die in der beliebigen Ebene $\mathfrak{E}$ liegen. Für $A=0$ erniedrigt sich die Klasse auf zwei. Das für $A=0$ und $B=0$ Ordnung und Klasse gleich eins werden, wurde schon erwähnt.

Nach diesen Vorbemerkungen gehen wir dazu über, den Schnitt des Systems der gebrochenen Strahlen mit einer Ebene auszudrücken, die in geringer Entfernung $x$ von der genäherten Bildebene $A_{2k+1}$ parallel zu dieser angenommen wird. Dazu dienen die Gleichungen 26:

$$y = \varDelta \eta_{*2k+1} - x \frac{\eta'_{*2k+1}}{K}; \quad z = \varDelta \zeta_{2k+1} - x \frac{\zeta'_{2k+1}}{K},$$

wobei wir nunmehr unter $x$, $y$, $z$ nicht mehr wie früher die Coordinaten eines Brennpunktes, sondern eines beliebigen Punktes des durch $\varDelta\eta_{*2k+1}$, $\varDelta\zeta_{2k+1}$ gehenden Strahles bezogen auf das gleiche Coordinatensystem verstehen.

Wir führen zunächst die reducierten Coordinaten $H'_*$, $Z'$, $R'_*$ ein und erhalten:

$$y = \varDelta H_* \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} - x\frac{H'_*}{T}\cdot\sigma_{2k+1}; \quad z = \varDelta Z \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} - x\frac{Z'}{T}\sigma_{2k+1}$$

$$y = H'_*\left[A R'^2_* + (L + 2M)H^2 - x\frac{\sigma^2_{2k+1}}{T\nu_{2k+1}}\right]\frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} \tag{69}$$

$$z = Z'\left[A R'^2_* + L H^2 - x\frac{\sigma^2_{2k+1}}{T\nu_{2k+1}}\right]\frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}}$$

Wir können aber auch an stelle derselben ihre Ausdrücke in den elliptischen Parametern $\lambda$ und $\mu$ setzen und beiderseits quadrieren:

$$y^2 = -\frac{\lambda\mu A\left[(3M + L)H^2 - x\frac{\sigma^2_{2k+1}}{T\nu_{2k+1}} + A(\lambda+\mu)\right]^2}{MH^2}\cdot\frac{\nu^2_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}} \tag{70}$$

$$z^2 = \frac{(MH^2 + A\lambda)(MH^2 + A\mu)\left[(M + L)H^2 - x\frac{\sigma^2_{2k+1}}{T\nu_{2k+1}} + A(\lambda+\mu)\right]^2}{AMH^2}\cdot\frac{\nu^2_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}}$$

Das erste Gleichungspar ist der analytische Ausdruck für jene Abbildung der Blendenebene $B_{-1}$ (worauf wir uns die reducierten Coordinaten $H'_*$ $Z'$ bezogen denken) auf die Schirmebene, die durch die Schnittpunkte des von einem bestimmten leuchtenden Punkt ausgegangenen Strahles vor und nach der Brechung in dem Systeme geometrisch definiert wird.

Das zweite Gleichungspar vermittelt eine Beziehung zwischen den Punkten der Schirmebene und den Parametern $\lambda\mu$ eines Strahles, welche wir als Abbildung der Schirmebene auf die $\lambda\mu$-Ebene, die wir schon bei der Diskussion der Brennfläche benützt haben, auffassen.

Endlich können wir die Gleichungen 19:

$$H'^2_* = \frac{-\lambda\mu A}{MH^2}; \quad Z'^2 = \frac{(MH^2 + A\lambda)(MH^2 + A\mu)}{AMH^2} \tag{19}$$

zur Definition einer Abbildung der Schirmebene auf die $\lambda\mu$-Ebene benützen.

Von den drei Abbildungen interessiert uns zunächst die erste, welche Blenden- und Schirmebene betrifft. Die beiden andern zusammen sollen eigentlich nur die erste ersetzen und die Einschiebung der $\lambda\mu$-Ebene hat nur den Zweck, die Auffindung ausgezeichneter Curven in der Blenden- und Schirmebene zu erleichtern.

Es sollen nun die für das Folgende wichtigen Eigenschaften der drei Abbildungen kurz betrachtet werden.

Bezüglich der dritten ist zu bemerken, dass einem Punkte $\lambda\,\mu$ vier symmetrisch gegen die Axen verteilte Punkte der Ebene $B_{-1}$ entsprechen. Damit dieselben reell seien, muss der Punkt $\lambda\,\mu$ in den schon früher bei der Diskussion der Brennfläche bemerkten zwei Streifen (s. Fig. 2) liegen, für welche sowohl $\lambda$ und $\mu$ entgegengesetztes, als $MH^2 + A\lambda$ und $MH^2 + A\mu$ gleiches Vorzeichen haben. Umgekehrt gehören zu einem Punkte der Ebene $B_{-1}$ zwei Punkte $\lambda\,\mu$. Sind nämlich $\alpha$ und $\beta$ die Wurzeln der quadratischen Gleichung: $\frac{H'^2_*}{\lambda} + \frac{Z'^2}{\frac{MH^2}{A} + \lambda} = 1$, dann genügen die Parameterpare $\lambda = \alpha\ \mu = \beta$, $\lambda = \beta\ \mu = \alpha$ den Abbildungsgleichungen 19. Die entsprechenden Punkte der $\lambda\,\mu$-Ebene liegen symmetrisch zur Geraden $\mu = \lambda$ auf die beiden Streifen verteilt. Man kann daher auch einen Streifen unterdrücken und sich dafür den andern doppelt mit Punkten $\lambda\mu$ überdeckt denken. Mechanisch würde dies so ausgeführt, dass wir die eine Hälfte der $\lambda\,\mu$-Ebene um die Linie $\lambda = \mu$ in die andere Hälfte umklappen, wodurch beide Streifen mit den entsprechenden Punkten zur Deckung kommen. Siehe Figur 2. Den Begrenzungen dieses Streifens, die durch $\lambda = 0$, $\mu$ positiv und $\mu = 0$, $\lambda$ negativ, aber absolut kleiner als $\frac{MH^2}{A}$, gebildet wird, entspricht die doppelt gezählte $Z'$-Axe; der Begrenzung $\lambda = -\frac{MH^2}{A}$, $\mu$ positiv die doppelte $H'_*$-Axe. Einer beliebigen Curve des Streifens, unter welchem Winkel sie auch dessen Begrenzungen treffen mag, entspricht eine symmetrisch zu beiden Axen liegende Curve der Blendenebene, welche die Axen im allgemeinen senkrecht durchschneidet. So z. B. geht die Gerade: $\lambda + \alpha\ \mu + \beta = 0$ in die bicirkulare Curve 4. Ordnung:

$$\alpha\left(Z'^2 + H'^2_* - \frac{MH^2}{A} + \beta\right)^2 + \beta(1-\alpha)\left(Z'^2 + H'^2_* - \frac{MH^2}{A} + \beta\right) - \\ - (1-\alpha)^2 \frac{MH^2}{A} H'^2_* = 0 \qquad 71)$$

über, welche für $\alpha = 1$ in einen doppelt gezählten Kreis, für $\beta = 0$ in zwei zur $Z'$-Axe symmetrisch gelegene Kreise zerfällt. In letzterem Falle findet eine Ausnahme von dem senkrechten Durchschnitt mit der $Z'$-Axe statt; hier geht aber auch die Gerade $\lambda + \alpha\ \mu + \beta = 0$ durch den Anfangspunkt, in welchem das Bild der $Z'$-Axe unter einem rechten Winkel gebogen erscheint. Jeder Curve, die durch den Anfangspunkt der $\lambda\,\mu$-Ebene einfach hindurchgeht, entspricht eine Curve mit Doppelpunkt auf der $Z'$-Axe. Berührt eine Curve der $\lambda\,\mu$-Ebene den Rand des Streifens von innen, so hat die entsprechende Curve der Blendenebene Doppelpunkte. So gehört zu der Hyperbel:

$$\left\{\frac{MH}{A} + \lambda + \mu + \alpha^2 - \gamma^2\right\}^2 + \frac{4\lambda\mu\alpha^2 A}{MH^2} = 0, \tag{72}$$

welche die $\lambda$ und $\mu$-Axe berührt, das Par von Kreisen:

$$Z'^2 + (H'_* \mp \alpha)^2 = \gamma^2, \tag{73}$$

welches auf der $Z'$-Axe Doppelpunkte hat.

Weit komplicierter ist die Abbildung der Schirmebene auf die $\lambda\mu$-Ebene. Einem Punkte $\lambda\mu$ entsprechen zwar auch 4 symmetrisch verteilte Punkte der Schirmebene; aber einem Punkte der letzteren entsprechen nicht weniger als 10 Punkte $\lambda\mu$. Nach dem früher Bemerkten gehören zu einem Punkt der Schirmebene 5 Punkte der Blendenebene und zu jedem derselben wieder 2 symmetrisch zur Geraden $\lambda = \mu$ gelegene Punkte der $\lambda\mu$-Ebene. Reellen Punkten der Schirmebene entsprechen wiederum blos Punkte innerhalb der bekannten Streifen der $\lambda\mu$-Ebene, von welchen wieder der eine unterdrückt und dafür der andere doppelt mit Punkten bedeckt werden soll. Innerhalb des einen Streifens gehören immer blos 5 allerdings doppelt zählende Punkte zu einem Punkte der Schirmebene. Die Ränder des Streifens entsprechen, wie bei der vorigen Abbildung die $z$ und $y$-Axe und zwar, wie sich später zeigen wird, in ganz analoger Weise; ausserdem bilden sich auch die Geraden der $\lambda\mu$-Ebene, die beim Nullsetzen der quadratischen Faktoren der Abbildungsformeln 70 auftreten, in die Axen der Schirmebene ab. Von besonderem Interesse sind endlich jene Punkte der Schirmebene, welchen zusammenfallende Punkte der $\lambda\mu$-Ebene und was hieraus folgt, auch zusammenfallende Punkte der Diaphragmenebene entsprechen. Dieselben bilden nämlich den Uebergang zwischen denjenigen Partien, welchen fünf, drei oder ein reeller Punkt der Diaphragmenebene entsprechen. Dieser Uebergang findet aber an dem Schnitte der Schirmebene mit der Brennfläche statt, da die letztere die Teile des Raumes gegeneinander abgrenzt, welche fünf, drei oder einen reellen Strahl durch einen gegebenen Punkt haben. In der $\lambda\mu$-Ebene ist die Grenze einfach durch die Geraden:

$$(3M + L)H^2 - x\frac{\sigma^2_{2k+1}}{T\nu_{2k+1}} + A(3\lambda + \mu) = 0 \tag{25}$$

und

$$(3M + L)H^2 - x\frac{\sigma^2_{2k+1}}{T\nu_{2k+1}} + A(\lambda + 3\mu) = 0 \quad \text{gegeben.}$$

In der That gehen die Gleichungen 70, wenn man mit Hilfe einer der obigen Gleichungen $x$ eliminiert in die Gleichungen 27 der Brennfläche, wobei nur einmal $\lambda$ und $\mu$ vertauscht sind, über. Diese beiden Geraden stellen demnach das Bild der Schnittkurve unserer Schirmebene mit der Brennfläche dar. Wir nennen diese Schnittkurve die Brennlinie der Schirmebene. Damit haben wir die bei der Abbildung ausgezeichneten Linien der $\lambda\mu$-Ebene erschöpft. Sie mögen zur Uebersicht noch einmal zusammengestellt werden:

a) $\lambda = 0$
b) $\mu = 0$
c) $(3M + L) H^2 - x \frac{\sigma^2_{2k+1}}{T \nu_{2k+1}} + A(\lambda + \mu) = 0$

Diese 3 Geraden entsprechen der $z$-Axe der Schirmebene.

d) $M H^2 + A\lambda = 0$
e) $M H^2 + A\mu = 0$
f) $(M + L) H^2 - x \frac{\sigma^2_{2k+1}}{T \nu_{2k+1}} + A(\lambda + \mu) = 0$

Diese 3 Geraden entsprechen der $y$-Axe der Schirmebene.

g) $(3M + L) H^2 - x \frac{\sigma^2_{2k+1}}{T \nu_{2k+1}} + A(3\lambda + \mu) = 0$
h) $(3M + L) H^2 - x \frac{\sigma^2_{2k+1}}{T \nu_{2k+1}} + A(\lambda + 3\mu) = 0$

Diese 2 Geraden entsprechen der Brennlinie der Schirmebene.[1])

Zeichnen wir auf der $\lambda\mu$-Ebene eine beliebige Curve, welche alle oder einige dieser 8 ausgezeichneten Geraden schneidet und in dem bekannten Streifen verläuft, so entspricht ihr in der Schirmebene eine ganz bestimmte Curve, welche jenen Schnittpunkten entsprechend eine Reihe von Besonderheiten aufweist. Dieselben lassen sich an der Hand der differentierten Abbildungsgleichungen 70 leicht verfolgen.

$$dy = \frac{-\nu_{2k+1}}{2\sigma_{2k+1} H \sqrt{M}} \Big[ d\lambda \frac{\sqrt{-\mu}}{\sqrt{\lambda}} \Big( A(3\lambda + \mu) + (3M + L) H^2 - x \frac{\sigma^2_{2k+1}}{T \nu_{2k+1}} \Big) + $$
$$+ d\mu \frac{\sqrt{-\lambda}}{\sqrt{\mu}} \Big( A(3\mu + \lambda) + (3M + L) H^2 - x \frac{\sigma^2_{2k+1}}{T \nu_{2k+1}} \Big) \Big] \qquad 74)$$
$$dz = \frac{\nu_{2k+1}}{2\sigma_{2k+1} H \sqrt{AM}} \Big[ d\lambda \frac{\sqrt{MH^2 + A\mu}}{\sqrt{MH^2 + A\lambda}} \Big( A(3\lambda + \mu) + (3M + L) H^2 - x \frac{\sigma^2_{2k+1}}{T \nu_{2k+1}} \Big)$$
$$+ d\mu \frac{\sqrt{MH^2 + A\lambda}}{\sqrt{MH^2 + A\mu}} \Big( A(\lambda + 3\mu) + (3M + L) H^2 - x \frac{\sigma^2_{2k+1}}{T \nu_{2k+1}} \Big) \Big]$$

Für $\lambda = 0$ oder $\mu = 0$ wird — ganz unabhängig von dem Verhältnis von $d\lambda : d\mu$ — $dy$ unendlich gross im Vergleich zu $dz$; nur wenn $d\lambda : d\mu = 0$ wird, ist für $\lambda = 0$ dieses Verhältnis unbestimmt. Einer solchen Fortschreitungsrichtung der $\lambda\mu$-Ebene entspricht dann keine bestimmte der Schirmebene, sondern im allgemeinen zwei getrennte (Doppelpunkt). Analoges gilt für d) und e); daher:

Ueberschreitet die Curve der $\lambda\mu$-Ebene eine der Geraden a), b), d), e) innerhalb des Streifens unter beliebigem endlichen Winkel, so durchsetzt die entsprechende Curve der Schirmebene eine der Axen unter rechtem

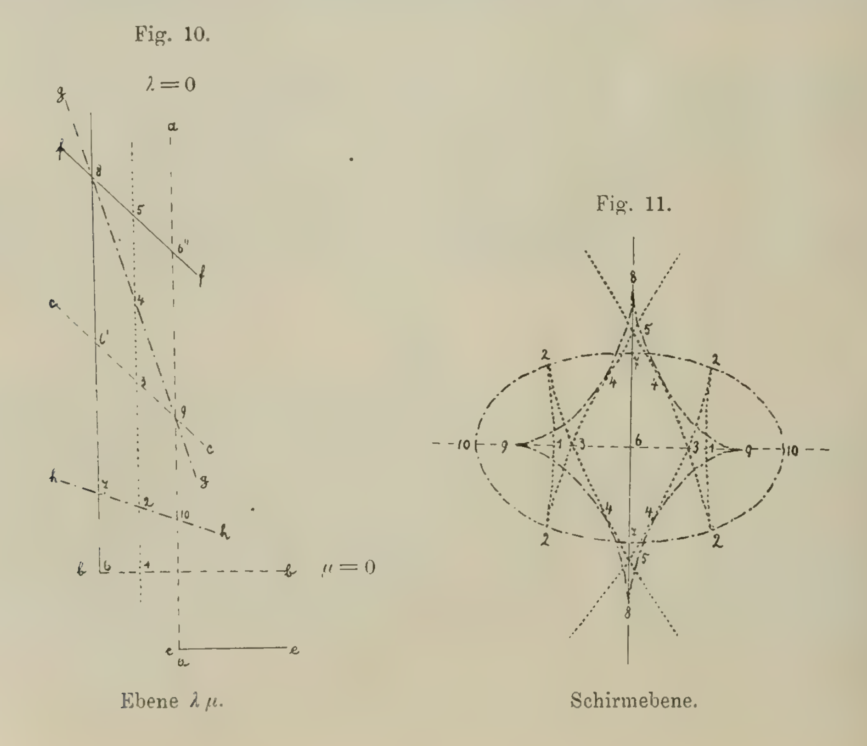
1) Auf Tafel III sind zwei verschiedene Fälle solcher Geraden octupel abgebildet.

Winkel; berührt erstere Curve eine der Geraden, so hat letztere auf einer der Axen einen Doppelpunkt.

Wenn c) oder f) erfüllt ist, so tritt bei beliebigem Verhältnis $d\lambda : d\mu$ keine Besonderheit des Verhaltens von $dy : dz$ ein; da aber den Geraden c) und f) Symmetrieaxen der Schirmebene entsprechen, so muss zu jedem eine solche Symmetrieaxe unter spitzem Winkel schneidenden Zweige noch ein zweiter symmetrisch gelagerter vorhanden sein, der mit ersterem einen Doppelpunkt bildet.

Schneidet die Curve der $\lambda\mu$-Ebene eine der Geraden c) und f), so hat die entsprechende Curve in der Schirmebene einen Doppelpunkt auf einer der Symmetrieaxen.

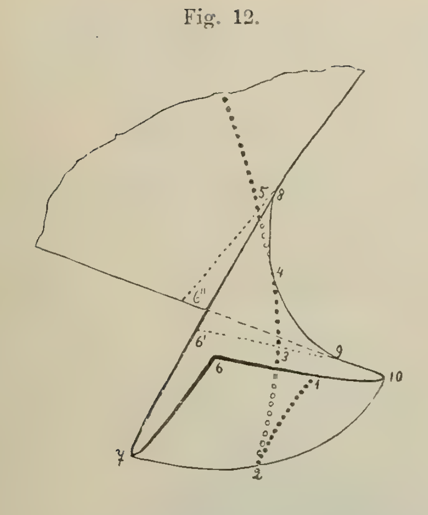
Wenn endlich g) oder h) erfüllt ist, wird der Wert von $dy : dz$ im allgemeinen ganz unabhängig von $d\lambda$ und $d\mu$ und zwar gleich dem Werte von $dy : dz$ in dem entsprechenden Punkte der Brennlinie auf der Schirmebene. Nur wenn g) erfüllt ist und gleichzeitig $d\lambda : d\mu = 0$, oder h) erfüllt und $d\mu : d\lambda = 0$ wird der Wert von $dy : dz$ ein anderer. Da an den Brennlinien, die den Geraden g) und h) entsprechen, der Uebergang von der fünffachen zur dreifachen bezw. von der dreifachen zur einfachen Ueberdeckung stattfindet, so muss das Bild einer Curve, welche g) oder h) passiert, an der entsprechenden Brennlinie notwendig in den ursprünglich innegehabten Bereich zurückkehren, da sich jenseits der Brennlinie keine reelle Fortsetzung findet.




Ebene $\lambda\mu$.

Schirmebene.

Fig. 12.




Diese Umkehr kann bei einer Berührung der Brennlinie eintreten oder auch bei Bildung einer Spitze, welche an der Brennlinie aufsitzt.

Wenn die Curve der $\lambda\mu$-Ebene eine der Geraden g) oder h) quert, so berührt die entsprechende Curve der Schirmebene die Brennlinie. Ausgenommen sind nur die Fälle, in welchen erstere Curve die Gerade g) in der Richtung $\mu = \text{const}$, oder die Gerade h) in der Richtung $\lambda = \text{const}$ durchsetzt; dann setzt sich nämlich die Curve der Schirmebene mit einer Spitze an die Brennlinie.

Zur Erläuterung sei in Fig. 11 für ein bestimmtes System der Geraden a) .... h) (siehe Fig. 10) die entsprechende Brennlinie der Schirmebene und der Verlauf der Curve, die der punktierten Geraden $\lambda = \text{const}$ entspricht, dargestellt. (Diese Curve ist der Schnitt einer Developpablen des Systems der gebrochenen Strahlen mit der Schirmebene).

Entsprechende Curven sind durch gleiche Punktierung, entsprechende Punkte durch eingeschriebene Zahlen kenntlich gemacht.

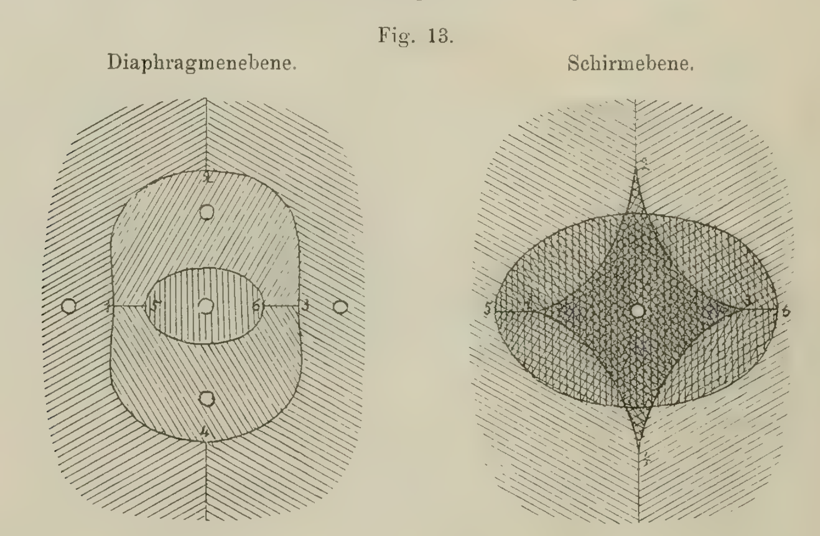
Wie man aus dem Verlaufe der Curven in der Nähe der Brennlinien im Vergleich zu den entsprechenden der $\lambda\mu$-Ebene ersieht, werden die auf verschiedenen Seiten des Bildes der Brennlinie in der $\lambda\mu$-Ebene gelegenen Punkte auf die eine Seite der Brennlinie abgebildet, so dass die Verteilung der Punkte in der Schirmebene nahe der Brennlinie ähnlich ist, wie sie durch Umklappen der einen Hälfte des Streifens in der $\lambda\mu$-Ebene um eine der Geraden g) oder h) erhalten wird. Durch solche Zusammenfaltungen und damit parallel gehende Verdehnungen des Streifens lässt sich ein ganz anschauliches Bild der verwickelten Verhältnisse der Abbildung gewinnen. Siehe Fig. 12. Sie stellt den deformierten und gefalteten Streifen vor und ist ein Viertel des Continuums, auf dem sich die Parameterwerte $\lambda\mu$ ohne Unterbrechung eindeutig durch Punkte darstellen lassen, die über den entsprechenden Punkten der Schirmebene liegen. Man sieht leicht, dass das gesammte Continuum den inneren von dem sternförmigen Teil der Brennlinie umschlossenen Teil fünffach, den von der elliptischen Figur begrenzten dreifach und den ausserhalb beiden liegenden einfach überdeckt.

Es unterliegt nun weiter keinen Schwierigkeiten, die Diaphragmen- und die Schirmebene direkt in Beziehung zu setzen. Den beiden Geraden g) und h) der $\lambda\mu$-Ebene entspricht eine bicirkulare Raumkurve 4. Ordnung, die wir aus Gleichung 71 erhalten, wenn wir $\alpha = \frac{1}{3}$ und $\beta = \left((3M + L)H^2 - x\frac{\sigma^2_{2k+1}}{T\nu_{2k+1}}\right) : 3A$ setzen.

$$\left(3\,A\,(Z'^2 + H'^2_*) + L\,H^2 - x\,\frac{\sigma^2_{2k+1}}{T\,\nu_{2k+1}}\right)^2 + 6\left((3\,M + L)\,H^2 - x\,\frac{\sigma^2_{2k+1}}{T\,\nu_{2k+1}}\right) \times$$
$$\times\left(3\,A\,(Z'^2 + H'^2_*) + L\,H^2 - x\,\frac{\sigma^2_{2k+1}}{T\,\nu_{2k+1}}\right) - 12\,A\,M\,H^2\,H'^2_* = 0 \qquad 75)$$

Diese Curve trennt dann in der Diaphragmenebene die Gebiete, welche zu den verschiedenen Teilen der Brennfigur beitragen, z. B. Fig. 13.

Fig. 13.




Hier sind entsprechende Teile des Diaphragmas und der Brennfigur in gleicher Richtung schraffiert und entsprechende Punkte mit gleichen Ziffern bezeichnet.

Wenn wir die Voraussetzung machen, dass der Kugelgestaltsfehler in der Axe des optischen Systems verschwinde, also $A$ gleich 0 sei, werden die Gleichungen, welche die Abbildung der Blendenebene in die Schirmebene definieren, ganz erheblich einfacher:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}}\left\{H'_*\left(H^2(E-G) - 2\,B\,H\,H'_* - x\,\frac{\sigma^2_{2k+1}}{T\,\nu_{2k+1}}\right) - B\,H\,R'^2_*\right\} \\ z &= \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}}\,Z'\left(H^2(E-G) - 2\,B\,H\,H'_* - x\,\frac{\sigma^2_{2k+1}}{T\,\nu_{2k+1}}\right) \end{aligned}\right\} \qquad 76)$$

Wir können uns bei der weiteren Betrachtung sogar den Umweg über die $\lambda\,\mu$-Ebene ersparen, sobald wir uns überzeugt haben, dass die Curven der Diaphragmaebene, welche in Brennlinien der Schirmebene übergehen, einfach Hyperbeln mit parallelen Asymptoten werden. Zu diesem Zwecke haben wir aus den drei Gleichungen 48 und 52:

$$H'_{*} = -\frac{\lambda+\mu}{2}, \quad Z'^2 = -\lambda\mu, \quad x = H[H(E-G) + B(3\lambda+\mu)]\, T\frac{\nu_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}}$$

die Parameter $\lambda$ und $\mu$ zu eliminieren.

$$2H'_{*} = -\lambda - \mu$$

$$\frac{x\sigma^2_{2k+1}}{BHT\nu_{2k+1}} - \frac{H(E-G)}{B} = 3\lambda + \mu$$

$$\frac{x\sigma^2_{2k+1}}{2BHT\nu_{2k+1}} - \frac{H(E-G)}{2B} + H'_{*} = \lambda$$

$$\frac{x\sigma^2_{2k+1}}{2BHT\nu_{2k+1}} - \frac{H(E-G)}{2B} + 3H'_{*} = -\mu$$

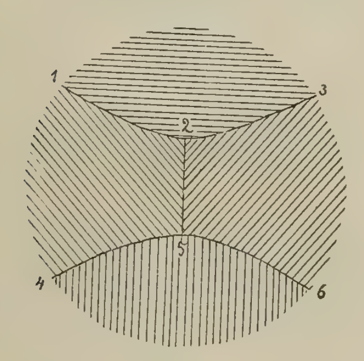
$$\left.\begin{aligned} Z'^2 - 3\left(H'_{*} + \frac{x\sigma^2_{2k+1}}{3BHT\nu_{2k+1}} - \frac{H(E-G)}{3B}\right)^2 \\ = \frac{1}{12}\left(\frac{x\sigma^2_{2k+1}}{BHT\nu_{2k+1}} - \frac{H(E-G)}{B}\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad 77)$$

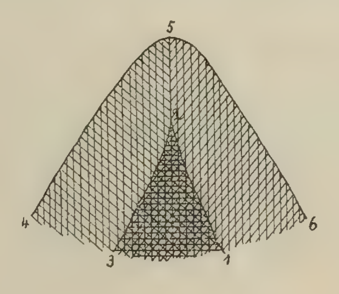
Der Neigungswinkel der Asymptoten beträgt 60°. Die reelle Axe liegt stets in der $H'_{*}$-Ebene. Den Charakter der Brennlinien in der Schirmebene haben wir bereits kennen gelernt. Fig. 9.

Fig. 14.

Diaphragmenebene.




Hiernach gestaltet sich die Verteilung der Gebiete in der Abbildung so, wie es in vorstehender Figur 14 durch Schraffierung und Bezifferung angedeutet ist. Da das Strahlensystem in diesem Falle 4. Ordnung ist, so kommen in der Schirmebene vierfach, zweifach und gar nicht überdeckte Stellen vor.

Besondere Beachtung verdient der Fall, bei dem die Schirmebene in der Symmetrieebene der Brennfläche $x = x_0 = \frac{T\nu_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}} H^2(E-G)$ angenommen wird.

Hiebei gehen die Brennlinien in ein Par unter einem Winkel von 60° geneigte Gerade über. Vergl. Fig. 9. Die Gleichungen 76 reducieren sich folgendermassen:

$$\left.\begin{aligned} y &= -\frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}}(3\,H'^{\,2}_{*} + Z'^{2})\,H \\ z &= -\frac{2\,\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}}\,Z'\,H'_{*}\,H \end{aligned}\right\} \qquad 78)$$

Die Hyperbel 77 degeneriert in ein Geradenpar: $Z'^{2} - 3\,H'^{\,2}_{*} = 0$, welches auch einen Winkel von 60° einschliesst, aber gegenüber den Brennlinien um 90° verdreht erscheint.

Die zwei konjugierten Hyperbeln der Blendenebene, welche durch die Gleichung:

$$Z'^{2} - 3\,H'^{\,2}_{*} = \pm\, a^{2} \qquad 79)$$

gegeben sind, werden bei der Abbildung in eine einzige Hyperbel verwandelt von der Gleichung:

$$y^{2} - 3\,z^{2} = \frac{a^{2}\,\nu^{2}_{2k+1}}{\sigma^{2}_{2k+1}}\,H^{2}. \qquad 80)$$

Gerade wie: $Z' = H'_{*} \cdot \text{const.}$ gehen wieder in Gerade: $y = z \cdot \text{const.}$ über; aber einer Geraden: $\frac{y}{z} = c$ entsprechen zwei Gerade: $\frac{H'_{*}}{Z} = c \pm \sqrt{c^{2} - 3}$.

Ausserhalb der Geraden: $\frac{y}{z} = c$, welche $c = \pm\sqrt{3}$ entsprechen, findet also keine reelle Abbildung mehr statt. Topologisch kann man sich die Abbildung der Blendenebene in die Schirmebene durch nachstehende Zusammenfaltung der ersteren versinnlichen. Fig. 15.

Fig. 15.



In den Fällen, wo das Strahlensystem 3. Ordnung wird, sind die Brennflächen stets Rotationsflächen, die hier in Betracht kommenden Schnitte daher Kreise. Ebenso ist die Curve der Diaphragmenebene, welche den Punkten der Brennlinie entspricht, ein Kreis. Das Innere der Brennlinie auf der Schirmebene wird von den Bildpunkten, der Blendenebene dreifach, das Aeussere einfach überdeckt.

## § 5.

## Die Helligkeitsverteilung des Lichtfleckes.

Es ist zu erwarten, dass der Lichtfleck in seinen verschiedenen Teilen sehr verschiedene Grade von Helligkeit besitzt, da nicht nur die verschiedenen Gebiete eines solchen, wie wir eben bei der Diskussion der Abbildung von Blenden- und Schirmebene bemerkt haben, Licht von fünf, drei oder einem Teil der durch das Diaphragma tretenden Strahlen bekommen, sondern auch die Strahlen verschieden stark gegen die Schirmebene zusammengedrängt sind. Um hierüber Aufschluss zu erhalten, stellen wir folgende Betrachtung an. Wir begrenzen in der Blendenebene $B_{-1}$ ein bestimmtes Flächenstück $F'_{-1}$. Durch den Rand desselben geht ein Kegel einfallender Strahlen. Die gebrochenen Strahlen schneiden die Ebene $B_{2k+1}$ nach einer Curve, die das Flächenstück $F'_{2k+1}$ begrenzt und ebenso bestimmen dieselben in der Schirmebene ein Flächenstück $F_{2k+1}$. Ersteres ist bis auf Grössen 3. Ordnung dem Flächenstück $F'_{-1}$ der Blendenebene ähnlich, letzteres hat Dimensionen, die überhaupt nur von der dritten Grössenordnung sind. Die einfallenden Strahlen denken wir uns von dem leuchtenden Punkt aus nach allen Richtungen gleich dicht geschart. Als Mass für die Menge der einfallenden Strahlen, die in dem von $F'_{-1}$ begrenzten Kegel enthalten sind, können wir demnach jenen Teil $F'_0$ einer Kugel vom Radius 1 um den leuchtenden Punkt als Centrum gelten lassen, welcher von dem Grenzkegel der einfallenden Strahlen umschlossen wird. Das Verhältnis nun der Fläche $F'_0$ zu der entsprechenden Fläche $F_{2k+1}$ soll als mittlere Helligkeit $i_m$ des Lichtfleckes innerhalb des Flächenstückes $F_{2k+1}$ bezeichnet werden; also:

$$i_m = \frac{F'_0}{F_{2k+1}} = \frac{F'_0}{F'_{-1}} \cdot \frac{F'_{-1}}{F'_{2k+1}} \cdot \frac{F'_{2k+1}}{F_{2k+1}} \qquad 81)$$

Der Bruch $\frac{F'_0}{F'_{-1}}$ ist bis auf Grössen 2. Ordnung dem Quadrate des Verhältnisses zwischen dem Kugelradius 1 und der Entfernung $K_{-1}$ des leuchtenden Punktes von der Blendenebene gleich, da die Strahlen, welche $F'_0$ in $F'_{-1}$ projicieren, alle Neigungen von der ersten Grössenordnung gegen die Axe haben und daher annähernd senkrecht auf der Blendenebene stehen.

Wir setzen also:

$$\frac{F'_0}{F'_{-1}} = \left(\frac{\sigma_{-1}\,\sigma'_{-1}}{T\,\nu_{-1}}\right)^2 \qquad 82)$$

Das Verhältnis $\frac{F'_{-1}}{F'_{2k+1}}$ weicht von dem Verhältnis der Figur in der Diaphragmenebene zu der durch die erste Näherung bestimmten Figur der Ebene $B_{2k+1}$ nur um Grössen 3. Ordnung ab. Letzteres Verhältnis ist aber gleich: $\left(\frac{\nu_{-1}}{\sigma'_{-1}} \cdot \frac{\sigma'_{2k+1}}{\nu_{2k+1}}\right)^2$.

Genähert kann man also die mittlere Helligkeit des Flächenstückes $F_{2k+1}$ der Schirmebene wie folgt schreiben:

$$i_m = \left(\frac{\sigma_{-1}}{T}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sigma'_{2k+1}}{\nu_{2k+1}}\right)^2 \cdot \frac{F'_{2k+1}}{F_{2k+1}} = \frac{\sigma^2_{-1}\,\sigma'^2_{2k+1}}{T^2\,\nu^2_{2k+1}} \cdot \frac{F'_{2k+1}}{F_{2k+1}} \tag{82}$$

Ob wir dabei unter $F'_{2k+1}$ den wahren Inhalt oder den aus der ersten Näherung folgenden verstehen, ist für die hier angestrebte Genauigkeit gleichgiltig; wir werden daher das letztere thun. Um aus dieser mittleren Helligkeit $i_m$ diejenige eines ganz bestimmten Punktes des Lichtfleckes abzuleiten, nehmen wir einen Grenzübergang vor, indem wir die Dimensionen der Figuren $F'_0$, $F'_{-1}$, $F'_{2k+1}$ und damit auch $F_{2k+1}$ mehr und mehr verkleinern, bis sie schliesslich unendlich klein, selbst im Vergleich zur 3. Grössenordnung, geworden sind. Dann kann man das Flächenstück $F'_{2k+1}$ als ein Rechteck mit den Seiten $d s_\lambda$, $d s_\mu$, die zu den Elementen der Curven $\lambda = \text{const.}$, $\mu = \text{const.}$ parallel sind, ebenso das Flächenstück $F_{2k+1}$ als ein solches mit den Seiten $d\varDelta s_\lambda$, $d\varDelta s_\mu$ auffassen und daher für die Helligkeit $i$ in dem durch die Parameterwerte $\lambda\,\mu$ gekennzeichneten Punkt der Schirmebene folgenden Ausdruck setzen:

$$i = \frac{\sigma_{-1}\,\sigma^2_{2k+1}}{T^2\,\nu^2_{2k+1}} : \left\{\left(\frac{d\varDelta s}{d s}\right)_{\lambda = \text{const}} \cdot \left(\frac{d\varDelta s}{d s}\right)_{\mu = \text{const}}\right\} \tag{83}$$

Für die Differentialquotienten lassen sich folgende Umschreibungen machen:

$$\left(\frac{d\varDelta s}{d s}\right)_{\lambda = \text{const}} = \frac{d\varDelta s}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{d s} = \frac{d y}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\eta'_{2k+1}} = \frac{d z}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\zeta'_{2k+1}}$$

$$\left(\frac{d\varDelta s}{d s}\right)_{\mu = \text{const}} = \frac{d\varDelta s}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d s} = \frac{d y}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d\eta'_{2k+1}} = \frac{d z}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d\zeta'_{2k+1}},$$

wobei folgende Gleichungen zur Ausführung der Differentiationen nötig sind:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{\frac{-\lambda\,\mu\,A}{M H^2}}\left\{(3M + L)H^2 - x\frac{\sigma^2_{2k+1}}{T\nu_{2k+1}} + A(\lambda + \mu)\right\}\frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} \\ &= \eta'_{2k+1}\left\{(3M + L)H^2 - x\frac{\sigma^2_{2k+1}}{T\nu_{2k+1}} + A(\lambda + \mu)\right\}. \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{\frac{(M H^2 + A\lambda)(M H^2 + A\mu)}{A M H^2}}\left\{(M + L)H^2 - x\,\frac{\sigma^2_{2k+1}}{T\nu_{2k+1}}\,A(\lambda + \mu)\right\}\frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} \\ &= \zeta'_{2k+1}\left\{(M + L)H^2 - x\frac{\sigma^2_{2k+1}}{T\nu_{2k+1}} + A(\mu + \lambda)\right\}. \end{aligned}$$

$$\eta'_{2k+1} = \sqrt{\frac{-\lambda\,\mu\,A}{M H^2}}\,\frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}}, \quad \zeta' = \sqrt{\frac{(M H^2 + A\lambda)(M H^2 + A\mu)}{A M H^2}}\,\frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}}$$

woraus nach leichter Rechnung folgt:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{d\Delta s}{ds}\right)_{\lambda=\text{const}} &= (3M+L)H^2 - x\frac{\sigma^2_{2k+1}}{T\nu_{2k-1}} + A(\lambda+3\mu)\\ \left(\frac{d\Delta s}{ds}\right)_{\mu=\text{const}} &= (3M+L)H^2 - x\frac{\sigma^2_{2k+1}}{T\nu_{2k+1}} + A(3\lambda+\mu)\end{aligned}\right\} \quad 84)$$

Schliesslich wird:

$$\begin{aligned} i = \frac{\sigma^2_{-1}\sigma^2_{2k+1}}{T^2\nu^2_{2k+1}} : \Bigg\{ &\left[(3M+L)H^2 - x\frac{\sigma^2_{2k+1}}{T\nu_{2k+1}} + A(\lambda+3\mu)\right] \times \\ \times &\left[(3M+L)H^2 - x\frac{\sigma^2_{2k+1}}{T\nu_{2k+1}} + A(3\lambda+\mu)\right]\Bigg\} \end{aligned} \quad 85)$$

Diese Formel gibt die Helligkeit eines Punktes der Schirmebene in der Entfernung $x$ von der genäherten Bildebene als Funktion der Parameter $\lambda$ und $\mu$.

Es wird daher das Nächstliegende sein, die Verteilung der Helligkeit zuerst in der $\lambda\mu$-Ebene zu studieren. Setzen wir $i = \text{const}$, so erhalten wir die Gleichung einer Curve gleicher Helligkeit $i$, einer Isophote. In der $\lambda\mu$-Ebene werden die Isophoten eine Hyperbelschar mit gemeinsamen Asymptoten, welche den gleich Null gesetzten Klammerfaktoren in dem Nenner des Ausdruckes für $i$ entsprechen. Für die Asymptoten ist also die Helligkeit unendlich gross. Die Asymptoten der Hyperbelschar sind aber, wie aus einem Vergleich mit Formel 25 ersichtlich ist, die Bilder der Brennlinien in der Schirmebene. Für eine beliebige Isophote ist der Betrag der Helligkeit proportional dem Quadrat der reellen Axe der entsprechenden Hyperbel.

Wir können daher folgenden Satz aussprechen:

Die Isophoten der Lichtflecke in der Schirmebene werden in die Ebene der Parameter $\lambda\mu$ als eine Schar von Hyperbeln mit gemeinsamen Asymptoten abgebildet. Die zugehörige Helligkeit ist den Quadraten der reellen Hyperbelaxen proportional. Den Asymptoten selbst entsprechen die Brennlinien der Schirmebene. Für sie wird daher die Helligkeit unendlich gross im Vergleich zu den übrigen Teilen des Lichtfleckes.

Wie aus der Diskussion der Abbildung von Schirm- und Diaphragmenebene erinnerlich ist, entsprechen einem Punkte der erstgenannten Ebene bis zu 5 Parameterpare $\lambda\mu$ oder 5 Punkte der Diaphragmenebene und daher auch 5 verschiedene Helligkeiten, die sich übereinander lagern. Die aus den Hyperbeln construierten Isophoten geben demnach immer nur die Helligkeit, die von einem einzelnen Strahle herrührt, die Gesammthelligkeit ist gleich der Summe der von den einzelnen Strahlen herrührenden Teilhelligkeiten.

Aus dem Verlauf der Hyperbelschar der $\lambda\mu$-Ebene geht hervor, dass die Helligkeit ausser in den Brennlinien kein Maximum haben kann, wohl aber Minima.

Solche treten auf, wenn eine Hyperbel eine der Geraden, welche den Streifen begrenzen, von Aussen berührt, oder wenn sie durch den Punkt $\lambda = -\frac{MH^2}{A}\mu = 0$ hindurchgeht, ohne in den Streifen einzutreten. Vergl. Tafel II.

Wenn der Kugelgestaltsfehler in der Axe gehoben ist, lässt sich die Helligkeit in einem Punkte der Schirmebene in ganz ähnlicher Weise nur noch einfacher berechnen. Man kann hier statt der Parameter $\lambda\,\mu$ gleich deren Ausdrücke in den reducierten Coordinaten der Diaphragmenebene einführen und gelangt dann zu folgendem Werte:

$$\left.\begin{aligned} i = \frac{\sigma^2_{-1}\,\sigma^2_{2k+1}}{4\,B^2 H^2 T^2 \nu^2_{2k+1}} : \Big\{ 3\left(H'_* + \frac{x\,\sigma^2_{2k+1}}{3\,B\,H\,T\,\nu_{2k+1}} - \frac{H(E-G)}{3\,B}\right)^2 - Z'^2 + \\ + \frac{1}{12}\left(\frac{x\,\sigma^2_{2k+1}}{B\,H\,T\,\nu_{2k+1}} - \frac{H(E-G)}{B}\right)^2 \Big\} \end{aligned}\right\} \quad 86)$$

Der Klammerausdruck im Nenner stellt gleich 0 gesetzt diejenige Hyperbel der Diaphragmenebene dar, welcher der Brennlinie in der Schirmebene entspricht (vergleiche Formel 77). In letzterer ist also auch in diesem Falle, wie vorauszusehen, die Brennlinie unendlich heller als alle übrigen Teile. Die Curven der Diaphragmenebene, welche den Isophoten der Schirmebene entsprechen, sind Hyperbeln mit gemeinsamen Asymptoten.

Ganz besonders einfach werden die Isophoten, wenn wir die Schirmebene so wählen, dass $x = x_0 = H^2(E-G)T\frac{\nu_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}}$ wird. Die Brennlinien in dieser Schirmebene zerfallen, wie wir früher sahen, in ein Geradenpar, das einen Winkel von 60° einschliesst. Die Formel für die Helligkeit reduciert sich hiedurch auf:

$$i = \frac{\sigma^2_{-1}\,\sigma^2_{2k+1}}{4\,B^2 H^2 T^2 \nu^2_{2k+1}} \cdot \frac{1}{3\,H'^2_* - Z'^2}\,. \quad 87)$$

Auch die Abbildungsformeln für die Schirmebene vereinfachen sich beträchtlich:

$$\left.\begin{aligned} y &= -\frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}}\,B\,(3\,H'^2_* + Z'^2)\,H \\ z &= -2\,\frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}}\,B\,H'_*\,Z'\,H. \end{aligned}\right\} \quad 78)$$

Ohne Schwierigkeiten lässt sich hier die Elimination der $H'_*$ und $Z'$ ausführen und man gelangt schliesslich zu der einfachen Gleichung der Asymptoten in der Schirmebene $x = x_0$ selbst:

$$y^2 - 3\,z^2 = \frac{\sigma^4_{-1}\,\sigma^2_{2k+1}}{16\,B^2 H^2 T^4 \nu^2_{2k+1}\,i^2} \quad 88)$$

Da in diesem Falle der Winkelraum zwischen den Brennlinien vierfach überdeckt wird und da ferner die vier übereinander liegenden Schichten, wie sich aus dem Vergleiche des über die Abbildung früher Gesagten mit der Formel für die Helligkeit ergibt, in jedem Punkte gleiche Helligkeit besitzen, so folgt, dass die Gesammthelligkeit gleich der vierfachen Einzelhelligkeit jedes Punktes ist.

Satz: Wenn bei einem dioptrischen System, dessen Kugelgestaltsfehler in der Axe gehoben ist, die Schirmebene die Brennfläche symmetrisch schneidet, so sind die Isophoten dortselbst eine Schar von Hyperbeln mit gemeinsamen Asymptoten, den Brennlinien. Die Helligkeit ist den reellen Axen der Hyperbeln umgekehrt proportional.

Es sei endlich der Fall in Betracht gezogen, dass bei einem Linsensystem nicht blos die Bedingung $S(1) = 0$, die den Kugelgestaltsfehler in der Axe vernichtet, erfüllt sei, sondern auch die Fraunhoferbedingung $S(2) = 0$. Für alle Punkte der Objektebene ist dann reiner Astigmatismus vorhanden und die Brennflächen sind in Linienelemente degeneriert. Auf der Schirmebene treten mit zwei Ausnahmen keine Brennlinien auf; die Abbildung der Diaphragmenebene in die Schirmebene ist eindeutig affin; gleichen Flächen der Diaphragmenebene entsprechen auch gleiche Flächen der Schirmebene und hieraus folgt, dass die letztere gleichförmig beleuchtet erscheint. Geht die Schirmebene gerade durch eine der beiden Brennlinien, so koncentriert sich alles Licht auf einem unendlich schmalen Streifen, der dann auch unendlich hell ist. Die Helligkeit in einer beliebigen Schirmebene lässt sich durch Zurückgehen auf die Formeln ermitteln:

$$i = \frac{\sigma^2_{-1}\,\sigma^2_{2k+1}}{T^2\,\nu^2_{2k+1}} : \left\{ \left( H^2 (E + 2G) - x \frac{\sigma^2_{2k+1}}{T\nu_{2k+1}} \right) \left( H^2 E - x \frac{\sigma^2_{2k+1}}{T\nu_{2k+1}} \right) \right\} \tag{89}$$

Dieselbe hat ein Minimum für $x \frac{\sigma^2_{2k+1}}{T\nu_{2k+1}} = H^2 (E + G)$

Dasselbe wird gleich: $i = -\frac{\sigma^2_{-1}\,\sigma^2_{2k+1}}{G^2\,T^2\,H^4\,\nu^2_{2k+1}}$ und liegt gerade in der Mitte zwischen den beiden Brennlinien.

## § 6.

## Begrenzung des Lichtfleckes durch Abblendung der einfallenden Strahlen.

Für die Gestalt des Lichtfleckes ist nicht die Verteilung der Helligkeit allein massgebend, sondern auch die Begrenzung desselben. Diese geschieht durch die Strahlen, welche den Rand der massgebenden Blende passiert hatten. Bei der mannigfachen Ueberdeckung mit Helligkeit, die ein Lichtfleck im allgemeinen aufweist, darf indessen nicht angenommen werden, dass ausserhalb der Curve, in welchen die Randstrahlen die Schirmebene schneiden, nun gar keine Helligkeit mehr vorkomme.

Es verlaufen vielmehr die durch die Randstrahlen in der Schirmebene gegebenen Curven in den einzelnen Blättern, mit denen man sich zur Herstellung der Eindeutigkeit die Schirmebene überdeckt denken muss und grenzen dort jeweils Hell und Dunkel gegen einander ab. Wo blos eine Ueberdeckung der Schirmebene stattfindet, bilden sie thatsächlich die Grenze des Lichtfleckes, in anderen Teilen kann die Helligkeit eines zweiten Blattes über die Grenze des ersten hinausreichen und dann bildet, wenn nicht ein Ast der Grenzkurve im zweiten Blatt, ein Stück der Brennlinie, die ja stets den Uebergang zweier Blätter vermittelt, die thatsächliche Grenze des Lichtfleckes. Im ersteren Falle ist die Grenze häufig unscharf, weil an ihr unter Umständen nur mehr eine geringe Helligkeit vorhanden ist, in letzterem Falle aber ist immer der Contrast der „unendlich hellen“ Brennlinie gegenüber der unbeleuchteten Schirmebene massgebend und die Grenze daher sehr scharf.

Die Abbildungsmethode gibt uns ein bequemes Mittel, die Grenzcurven des Lichtfleckes zu untersuchen. Wir setzen in der Folge stets eine kreisförmige, centrisch zur optischen Axe gelegene Blende voraus, die wir zunächst in der Ebene $B_{-1}$ gelegen annehmen. Ihre Gleichung ist dann:

$$\eta'^2_{-1} + \zeta'^2_{-1} = \gamma^2$$

Gehen wir auf die reducierten Coordinaten über, so haben wir:

$$H'^2 + Z'^2 = \gamma^2 \frac{\sigma'^2_{-1}}{\nu^2_{-1}} = \Gamma^2 \tag{90}$$

Führen wir die auf eine parallele Axe $H' = H'_0 = \frac{BH}{A}$ bezogenen Coordinaten $H'_* = H' - H'_0$ ein, wodurch wir die Anwendung der Abbildungsformeln 70 ermöglichen, so ergibt sich:

$$(H'_* + H'_0)^2 + Z'^2 = \Gamma^2 \tag{91}$$

Wir können auch hier wieder die Parameter $\lambda\,\mu$ einführen und erhalten folgende Gleichung für die Punkte, welche den Grenzen der Blende entsprechen:

$$\left\{\frac{MH^2}{A} + \lambda + \mu + H'^2_0 - \Gamma^2\right\}^2 + \frac{4\lambda\mu A H'^2_0}{MH^2} = 0 \tag{92}$$

Allerdings gehören den Parameterwerten $\lambda\,\mu$, die obige Gleichung erfüllen, auch die Punkte des zum Blendenkreis in Bezug auf die $Z'$-Axe symmetrisch gelegenen Kreises: $(H'_* - H'_0)^2 + Z'^2 = \Gamma^2$ an, was bei der Weiterverwendung der Formel zu berücksichtigen ist. Diese Formel stellt für verschiedene Werte des Radius $\Gamma$ ein System von Hyperbeln mit parallelen Asymptoten dar, welche die Geraden $\lambda = 0$ $\mu = 0$ berühren. Unter ihnen befindet sich ein Geradenpar, dessen Schnittpunkt in den Anfangspunkt fällt. Es entspricht dem Kreise mit dem Radius $\Gamma^2 = H'^2_0 + \frac{MH^2}{A}$. Siehe Tafel III. Fig. Ib und IIb.

Um die Grenzkurven der Lichtflecke wirklich zu verzeichnen, kann man entweder von den Formeln 69 und den Kreisen in der Blendebene oder von den Formeln 70 und den Hyperbeln in der $\lambda\,\mu$-Ebene ausgehen. Man hat im ersteren Falle zu einer genügenden Anzahl von Punkten des gewählten Kreises in der Blendenebene mittels der Formeln 69 die Punkte der Schirmebene zu berechnen, oder wohl auch zu konstruieren und die letzteren unter Berücksichtigung der zu erwartenden Singularitäten durch einen Curvenzug zu verbinden. Hat man die bicirkulare Curve 4. Ordnung (vergl. Formel 75) in der Blendenebene, welche der Brennlinie entspricht, verzeichnet, so ist die Einteilung der Blendenebene in Gebiete, die den verschieden von der Brennlinie abgegrenzten Blättern der Schirmebene entsprechen, leicht auszuführen und aus dem Verlaufe des Kreises zu der Curve 4. Ordnung lässt sich ersehen, welchem Blatte die jeweils betrachteten Partien der Grenzkurve angehören. Zur genauen Unterscheidung ist die Berechnung derjenigen Punkte der Grenzcurve, in welchen sie die Brennlinie trifft, notwendig; dieselbe setzt voraus, dass man die Schnittpunkte des Kreises mit der bicirkularen Curve 4. Ordnung der Blendenebene kennt.

Einfacher wird die Verzeichnung der Grenzcurve unter Benützung der $\lambda\,\mu$-Ebene und der Formeln 70. Zwar hat man hier an stelle des Blendenkreises die entsprechende Hyperbel zu konstruieren, aber die Brennlinie wird dafür einfach durch zwei Gerade repräsentiert. So oft die Hyperbel diese Geraden schneidet, berührt die Grenzcurve die Brennlinie. Eine Ausnahme tritt nur dann ein, wenn die Tangente an die Hyperbel im Schnittpunkte mit dieser Geraden parallel zu $\lambda$ oder $\mu$-Axe (je nachdem man es mit der einen oder anderen Geraden zu thun hat) verläuft; dann setzt nämlich die Grenzcurve in Spitzen auf die Brennlinie auf. So oft die Hyperbel eine der andern bei der Abbildung ausgezeichneten Geraden schneidet, treten für die Grenzcurve entweder Doppelpunkte oder senkrechte Schnitte mit den Symmetrieaxen der Schirmebene auf, was gelegentlich der Besprechung der Abbildung schon erwähnt wurde. Nicht vergessen darf endlich der Umstand werden, dass, wenn man alle zu den Punkten $\lambda\,\mu$ der Hyperbel gehörigen Punkte der Schirmebene aufsucht, die gewünschte Grenzcurve doppelt, nämlich auch noch einmal an der $z$-Axe gespiegelt erhalten wird. Lässt man die ungehörige Hälfte fort, so gehen die Doppelpunkte der $z$-Axe in einfache Punkte über; die Grenzcurve liegt dann unsymmetrisch zur $z$-Axe. Der Lichtfleck, welcher abgesehen von der Blende nach der $y$ und $z$-Axe symmetrisch wäre, verliert diese Eigenschaft bezüglich der $z$-Axe bei beliebiger Abblendung.

Die Unsymmetrie liegt darin begründet, dass der Mittelpunkt unserer Abbildung der Blendenebene in die Schirmebene nicht mit der optischen Axe zusammenfällt, sondern in ersterer um die Grösse $\eta'_{0-1} = \frac{B\,H\,\nu_{-1}}{A\,\sigma'_{-1}}$ verschoben ist. Der Betrag dieser Unsymmetrie hängt linear von der Grösse des Gesichtsfeldes ab und verringert sich gegen das Centrum desselben hin.

Nunmehr soll die Frage zur Erörterung gelangen, ob sich nicht durch Verschiebung der Blende die Beschaffenheit des Lichtfleckes beziehungsweise die Qualität des von einem leuchtenden Punkte entworfenen Bildes verbessern lässt. Dass eine solche Verbesserung allerdings auf Kosten der Helligkeit durch Verkleinerung des Blendenradius möglich ist, ist bekannt und soll später noch besprochen werden. Es lässt sich aber zeigen, dass durch eine Verschiebung der Blende auf der Axe eine erhebliche Verbesserung des Bildes bewirkt werden kann, die um so wertvoller ist, als sie nicht auf Kosten der Helligkeit geschieht. Man kann nämlich durch geeignete Wahl der Blende die Unsymmetrie der Grenzfigur gegenüber der einen Symmetrieaxe der Helligkeit zum Verschwinden bringen. Versetzt man nämlich die Blende aus der Ebene $B_{-1}$ um eine Strecke $m$ in der Richtung der Lichtbewegung und vergrössert sie derart, dass noch dieselbe Lichtmenge hindurchgeht, so werden die Strahlen des leuchtenden Punktes ebenso abgeblendet, wie wenn in der Ebene $B_{-1}$ eine zur optischen Axe excentrisch gelegene Blende vorhanden wäre, welche durch Projektion der wirklichen Blende auf die Ebene $B_{-1}$ vom leuchtenden Punkt aus entstanden gedacht werden kann. Bezeichnen wir mit $\eta_{-1}$ die Entfernung des leuchtenden Punktes von der optischen Axe und mit $K_{-1}$ den Abstand von Objekt und Blendenebene, dann wird die fingierte Blende in der Ebene $B_{-1}$ um einen Betrag gleich $\frac{m}{m+K_{-1}}\eta_{-1}$ excentrisch zur optischen Axe liegen. Wählen wir $m$ so, dass dieser Betrag gleich $\eta'_{0\,-1} = \frac{B}{A}\frac{\eta_{-1}\sigma_{-1}}{\sigma'_{-1}}$ gleich der Verschiebung $H'_0$ des Coordinatensystems (im Masstab der Ebene $B_{-1}$ ausgedrückt) wird, also: $m = K_{-1}\frac{B\sigma_{-1}}{A\sigma'_{-1} - B\sigma_{-1}}$, so fällt der Mittelpunkt der fingierten Blende mit dem Mittelpunkt der Abbildung in der Ebene $B_{-1}$ zusammen. Man hätte auch die Betrachtung so führen können, dass man alles auf die Ebene der wirklichen Blende bezieht und vom leuchtenden Punkt aus die Ebene $B_{-1}$ auf jene projiciert. Bei passender Wahl der letzteren wird dadurch der Mittelpunkt der Abbildung in die optische Axe versetzt.

Durch die neue Abblendung wird eine zur Helligkeitsverteilung symmetrische Begrenzung des Lichtfleckes erzielt. Dabei ist es wesentlich, dass die Grösse m, welche den Ort der neuen Abblendung bestimmt, unabhängig von $\eta_{-1}$, d. h. von der Lage des leuchtenden Punktes ist und dass also für alle leuchtenden Punkte der Objektebene die Lichtflecken der Schirmebene symmetrisch werden. Die Grenzcurven vereinfachen sich hiebei ganz bedeutend. Sie entstehen nun entweder aus den Kreisen: $H'^2_* + Z'^2 = \Gamma^2$ der Blendenebene, oder aus den Geraden der $\lambda\,\mu$-Ebene: $\lambda + \mu + \frac{MH^2}{A} = \Gamma^2$, in welche die Hyperbeln ausarten. Sehr einfach lässt sich nunmehr die Elimination ausführen, die direkt zur Gleichung der Grenzcurven in der Schirmebene führt.

Dieselbe ergibt:

$$\frac{y^2}{\left(A\Gamma^2+(L+2M)H^2-x\frac{\sigma^2_{2k+1}}{T\nu_{2k+1}}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(A\Gamma^2+LH^2-x\frac{\sigma^2_{2k+1}}{T\nu_{2k+1}}\right)^2}=\Gamma^2\frac{\nu^2_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}}$$

Wir erhalten für verschiedene Radien $\Gamma$ der Blendenöffnung ein System von Ellipsen, welches die Brennlinie einhüllt. Jede Ellipse berührt in 4 reellen und 4 imaginären Punkten.

Für $x\frac{\sigma^2_{2k+1}}{T\nu_{2k+1}}-LH^2=A\Gamma^2$ und $x\frac{\sigma^2_{2k+1}}{T\nu_{2k+1}}-(L+2M)H^2=A\Gamma^2$ reduciert sich die Ellipse auf eine Doppellinie, welche 2 Spitzen der Brennlinie mit einander verbindet. Obwohl demnach für diese Werte des Radius der Blendenöffnung die Grenzcurve keine Fläche mehr umschliesst, so hat der Lichtfleck dennoch Ausdehnung nach allen Seiten; es bildet eben die Brennlinie seine Grenze. Die Figuren auf Tafel III sind bestimmt, in einem konkreten Falle den Verlauf der Grenzcurven bei verschiedener Grösse der Blende darzustellen. (Vergl. die am Schlusse der Abhandlung beigegebene Erläuterung der Tafeln). Fig. 1 a b c zeigt einen Fall, in welchem die Grenzcurven unsymmetrisch zu der Brennlinie liegen. Der Strahl, der durch den Mittelpunkt der Blende geht, bildet sich nicht im Centrum des Lichtfleckes ab. Fig. 2 a b c zeigt dagegen den symmetrischen Fall, in welchem die Grenzcurven Ellipsen werden. Zwei von denselben sind sehr nahe in Doppellinien ausgeartet. Fig. 3 a b zeigt einen ebenfalls symmetrischen Fall, aber in einer anderen Schirmebene. In dieser ist die Brennlinie ein Hypocycloidenpar und bedeutend kleiner als bei der vorhergehenden Schirmebene. Wie man aus Fig. 2 a b c d e f auf Tafel II ersehen konnte, war auch der Raum innerhalb der Brennlinie bedeutend heller als bei der vorhergehenden Schirmebene. Dagegen ist die Ausbreitung der Randstrahlen hier eine bedeutend stärkere als vorher.

Es soll nun der Fall betrachtet werden, dass $S(1)=0$ ist.

Hiebei treten zu der Gleichung des Blendenrandes in der Ebene $B_{-1}$:

$$(H'_*+H'_0)^2+Z'^2=\Gamma^2 \tag{90}$$

$\left(\text{wobei aber } H'_0=\frac{G}{2B}H\right)$ an stelle der Formeln 70 die folgenden:

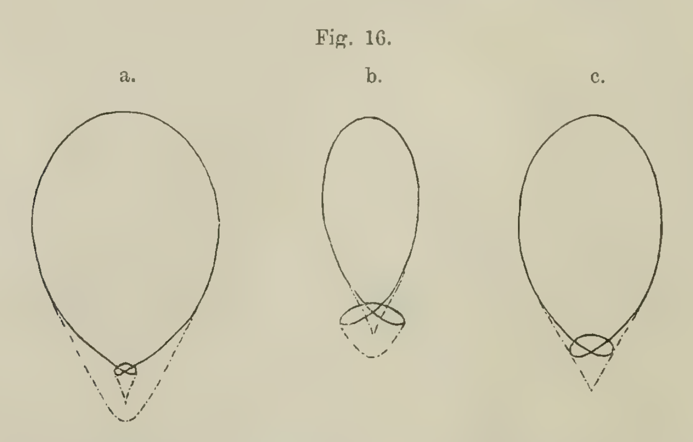
$$\begin{aligned}
y&=\frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}}\left\{H'_*\left(H^2(E-G)-2BHH'_*-x\frac{\sigma^2_{2k+1}}{\nu_{2k+1}}\right)-BHR'^2_*\right\}\\
z&=\frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}}Z'\left(H^2(E-G)-2BHH'_*-x\frac{\sigma^2_{2k+1}}{\nu_{2k+1}}\right)
\end{aligned} \tag{76}$$

Aus 90 und 76 wäre durch Elimination von $H'_*$ und $Z'$ die Gleichung der Grenzcurve des Lichtfleckes zu bestimmen. Die Brennlinie wird in der Blendenebene $B_{-1}$ durch die Hyperbel:

$$Z'^2 - 3\left(H'_* + \frac{x\,\sigma^2_{2k+1}}{3\,BHT\nu_{2k+1}} - \frac{H(E-G)}{3\,B}\right)^2$$
$$= \frac{1}{12}\left(\frac{x\,\sigma^2_{2k+1}}{BHT\nu_{2k+1}} - \frac{H(E-G)}{B}\right)^2 \qquad 93)$$

abgebildet. Ihre Schnittpunkte mit dem Blendenrande geben, wenn man sie in die Schirmebene abbildet, die Punkte, in denen die Grenzcurve die Brennlinie berührt, also von einem Blatte ins andere übertritt. Wenn alle 4 Schnittpunkte reell sind, ist die Figur, welche Brennlinie und Grenzlinie bilden, im allgemeinen von einem der

Fig. 16.




beiden in Fig. 16 a und b abgebildeten Typen, je nachdem die Schirmebene auf der einen oder andern Seite der Symmetrieebene der Brennfläche schneidet. Den Uebergang vermittelt der 3. Typus (Fig. 16 c), welcher in der Symmetrieebene auftritt. Bei diesem sind die beiden geraden Brennlinien Doppeltangenten der Grenzcurve.

In dieser Symmetrieebene lässt sich die Gestalt der Grenzcurve durch Verschiebung der Blende noch ganz erheblich vereinfachen. Versetzt man nämlich die Blende in eine Ebene, welche um die Strecke

$$n = K_{-1}\frac{G\sigma_{-1}}{2\,B\sigma'_{-1} - G\sigma_{-1}} \qquad 94)$$

in der Richtung des einfallenden Lichtes von $B_{-1}$ aus verschoben ist und projiciert man die Ebene $B_{-1}$ vom leuchtenden Punkt aus auf die neue Blendenebene, so fällt der Mittelpunkt der Hyperbel, die nunmehr in ein Geradenpar ausgeartet ist, auf die Axe und die neue Blende wird symmetrisch zu diesem Geradenpar liegen. Da weder die Abbildung noch die Helligkeitsverteilung in diesem Falle symmetrisch in Bezug auf die $Z$-Axe ist, so kann die symmetrische Lage der Blende zum Geradenpar keine symmetrische Begrenzung des Lichtfleckes zur Folge haben. Sie bewirkt aber, worauf ich durch eine Bemerkung des Herrn Professor v. Seidel aufmerksam gemacht worden

bin, dass die Grenzcurve des Lichtfleckes einfach ein allerdings excentrisch gelegener Kreis wird, der beide Brennlinien berührt. Dies lässt sich leicht beweisen:

Die Gleichung der fingierten Blende, welche durch Projektion der neuen Blende vom leuchtenden Punkt aus in die Ebene $B_{-1}$ entstanden gedacht werden kann, habe die Gleichung:

$$H'^2_* + Z'^2 = \Gamma^2.$$

Die Abbildungsformeln für die Symmetrieebene der Brennfläche als Schirmebene lauten:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} BH(3H'^2_* + Z'^2), \\ z &= -2\frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} BHH'_* Z' \end{aligned} \tag{95)}$$

Durch Elimination von $H'_*$ und $Z$ ergibt sich die Gleichung der Grenzcurve:

$$\frac{z^2\sigma^2_{2k+1}}{\nu^2_{2k+1}B^2H^2} = -\left(y\frac{\sigma_{2k+1}}{\nu_{2k+1}BH} + \Gamma^2\right)\left(y\frac{\sigma^2_{2k+1}}{\nu_{2k+1}BH} + 3\Gamma^2\right)$$

$$z^2 + \left(y + 2\frac{BH\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}}\Gamma^2\right)^2 = \frac{B^2H^2\nu^2_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}}\Gamma^4 \tag{96)}$$

Denkt man sich $\Gamma$ variabel, so stellt diese Gleichung eine Schar von Kreisen dar, welche zwei unter $60^0$ gegeneinander geneigte Grade, die Brennlinien berühren. Der Durchmesser eines solchen Grenzkreises ist dem Quadrate des Radius $\Gamma$ der Blende, also der Fläche derselben proportional. Bei konstanter Grösse der Blende ist der Durchmesser der Grenzcurve und damit des ganzen Lichtfleckes dem Gesichtsfelde (ausgedrückt durch die reducierte Entfernung $H$ des leuchtenden Punktes von der Axe) einfach proportional. Wir können daher folgenden Satz aussprechen:

In einem Linsensystem mit gehobenem Kugelgestaltsfehler bildet sich ein leuchtender Punkt ausser der Axe in einer geeignet gewählten Schirmebene und bei geeignet gewählter Stellung der Blende in einen Lichtfleck ab, der von einem Kreise und zwei unter $60^0$ gegeneinander geneigten Tangenten desselben begrenzt wird. Der einfallende Strahl, der durch den Mittelpunkt der Blende geht, trifft nach der Brechung den Schirm im Schnittpunkt der beiden Tangenten, woselbst der Lichtfleck am hellsten ist. Alle Strahlen, welche auf einem zur Blende koncentrischem Kreise einfallen, treffen nach der Brechung den Schirm wieder in einem Kreise, der dieselben Grenztangenten berührt. Vergleiche Tafel III Fig. 5 a und 5 b.

## § 7.

## Ueber den Zusammenhang der Brennfläche der gebrochenen Strahlen mit der Centrafläche der Flächen 2. Grades. Mechanische Erzeugung des Systems der gebrochenen Strahlen.

Die Gleichung eines dreiaxigen Ellipsoides werde in folgender Form angenommen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a+b)^2} + \frac{z^2}{(a+c)^2} = 1. \tag{97}$$

Für die Normale in einem Punkte $x' \, y' \, z'$ desselben gelten bekanntlich nachstehende Beziehungen zwischen den laufenden Coordinaten $x \, y \, z$ und denen des Fusspunktes $x' \, y' \, z'$:

$$x - x' : y - y' : z - z' = \frac{x'}{a^2} : \frac{y'}{(a+b)^2} : \frac{z'}{(a+c)^2} \tag{98}$$

Führt man die Entfernung $\varrho$ zwischen den Punkten $x \, y \, z$ und $x' \, y' \, z'$ ein, so kann man an stelle der Proportion 98 folgende drei Gleichungen setzen:

$$\begin{aligned} x - x' &= \varrho \frac{x'}{a^2 p} \\ y - y' &= \varrho \frac{y'}{(a+b)^2 p}; \quad p = \sqrt{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{(a+b)^4} + \frac{z'^2}{(a+c)^4}}. \\ z - z' &= \varrho \frac{z'}{(a+c)^2 p} \end{aligned} \tag{99}$$

Es sollen nun die Längen $\varrho_1 \, \varrho_2 \, \varrho_3$ der Normalen vom Fusspunkt bis zu den drei Durchschnittspunkten mit den Coordinatenebenen berechnet werden:

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= - a^2 p, \\ \varrho_2 &= - (a+b)^2 p, \\ \varrho_3 &= - (a+c)^2 p. \end{aligned}$$

Wir nehmen nun die Grössen $b$ und $c$ klein im Vergleich zu $a$ an und entwickeln nach Potenzen von $\frac{b}{a}$ und $\frac{c}{a}$:

$$p = \sqrt{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{(a+b)^4} + \frac{z'^2}{(a+c)^4}} = \sqrt{\frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{a^4} - 4 \frac{b y'^2 + c z'^2}{a^5}}$$

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{(a+b)^2} + \frac{z'^2}{(a+c)^2} = 1 = \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{a^2} - 2 \frac{b y'^2 + c z'^2}{a^3}$$

Aus der zweiten Gleichung setzen wir den Wert von $x'^2 + y'^2 + z'^2$ in die erste ein und erhalten damit:

$$p = \sqrt{\frac{1}{a^2} - 2\,\frac{b\,y'^2 + a\,z'^2}{a^5}} = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{b\,y'^2 + c\,z'^2}{a^3}\right). \qquad 100)$$

Hieraus ergibt sich für $\varrho_1$, $\varrho_2$, $\varrho_3$:

$$\varrho_1 = -a\left(1 - \frac{b\,y'^2 + c\,z'^2}{a^3}\right),$$

$$\varrho_2 = -\frac{(a+b)^2}{a}\left(1 - \frac{b\,y'^2 + c\,z'^2}{a^3}\right) = -a\left(1 + \frac{2b}{a}\right)\left(1 - \frac{b\,y'^2 + c\,z'^2}{a^3}\right)$$

$$= -a\left(1 + \frac{2b}{a} - \frac{b\,y'^2 + c\,z'^2}{a^3}\right),$$

$$\varrho_3 = -\frac{(a+c)^2}{a}\left(1 - \frac{b\,y'^2 + c\,z'^2}{a^3}\right) = -a\left(1 + \frac{2c}{a} - \frac{b\,y'^2 + c\,z'^2}{a^3}\right).$$

Bilden wir die Differenzen: $\varrho_2 - \varrho_1$, $\varrho_3 - \varrho_1$

$$\begin{aligned} \varrho_2 - \varrho_1 &= 2\,b \\ \varrho_3 - \varrho_1 &= 2\,c, \end{aligned} \qquad 101)$$

so finden wir, dass dieselben innerhalb der bei der Entwicklung innegehaltenen Genauigkeit constant sind.

Daher können wir folgenden Satz aussprechen: Die Normalen eines dreiaxigen Ellipsoides, dessen Axen sich nur um kleine Grössen von der ersten Ordnung unterscheiden, werden von den drei Hauptebenen in Punkten geschnitten, welche bis auf Grössen zweiter Ordnung gleiche Entfernung von einander haben.

Umgekehrt kann man behaupten: Bewegt sich eine Gerade so, dass drei auf ihr festliegende Punkte in drei zu einander rechtwinkligen Ebenen gleiten, so beschreibt sie ein Strahlensystem, das mit dem Normalensystem eines Ellipsoides von nahezu gleichen Axen identificiert werden kann.

Da die Entfernung der Punkte auf der Geraden nach 101 gleich den doppelten Unterschieden der Halbaxen des Ellipsoides sein muss, so werden, falls jene Entfernungen endlich angenommen sind, die Halbaxen des Ellipsoides unendlich gross, da sie gegenüber den Unterschied zweier von ihnen stark überwiegen müssen. Das hindert aber nicht, dass das Strahlensystem, das von der Geraden beschrieben wird und dessen Brennflächen nun endliche Dimensionen besitzen, alle allgemeinen Eigenschaften des Normalensystems eines Ellipsoides besitzt, und, wie wir sehen werden, noch manche specielle dazu. Obwohl durch die Art der Herleitung ausreichend bewiesen erscheint, dass bei der angegebenen Bewegung auch unter Voraussetzung endlicher Entfernung der Fixpunkte die Gerade wirklich ein Normalensystem, d. h. ein solches mit zu einander senkrechten Brennebenen beschreibt, soll, da dies einfach geschehen kann, eine direkte Herleitung dieser Eigenschaft aus kinematischen Principien nachfolgen:

Die Punkte, in welchen die Gerade $G$ die 3 Ebenen trifft, werden mit $A$, $B$, $C$ bezeichnet. In jedem derselben werde ein Lot zur zugehörigen Ebene errichtet, die dann ein System von 3 untereinander senkrechten Geraden bilden. Denke ich mir die Gerade $G$ um eine ausserhalb ihr liegende Axe unendlich wenig gedreht, so werden im Allgemeinen die mit $G$ verbundenen Fixpunkte aus ihren Ebenen herausrücken. Schneidet aber die Drehaxe die drei Lote, so wird jeder Fixpunkt in seiner Ebene fortrücken. Alle momentanen Drehaxen, welche die drei Lote schneiden, sind mit den Bedingungen für die bewegte Gerade $G$ verträglich und umgekehrt. Diese momentanen Drehaxen sind Erzeugende eines Hyperboloides, das durch die 3 Lote bestimmt wird und ausserdem die Gerade $G$ enthält. Das Hyperboloid ist ein orthogonales, da 3 Erzeugende, die 3 Lote nämlich, unter sich orthogonal sind. Es enthält unendlich viele Tripel orthogonaler Erzeugender und zu jeder Geraden auf dem Hyperboloid gehört eines; also auch zur Geraden $G$. Die zwei Geraden $G'$ und $G''$, welche mit $G$ ein orthogonales Tripel von Erzeugenden bilden, haben die Eigenschaft, dass, wenn man $G$ um eine derselben als Momentanaxe unendlich wenig dreht, die Nachbarlage von $G$ die Anfangslage schneidet, also $G$ bei der Bewegung aus einer Ebene, die senkrecht zur betreffenden Momentanaxe steht, nicht heraustritt. Diese Ebene ist also Brennebene des von der Geraden $G$ erzeugten Strahlensystems; es existiert noch eine zweite der andern zu $G$ senkrechten Momentanaxe entsprechende, welche senkrecht auf dieser steht. Da die beiden Momentanaxen einen rechten Winkel bilden, so ist ein Gleiches auch von den zu ihnen senkrechten Brennebenen der Fall. Das von der Geraden $G$ beschriebene Strahlensystem ist demnach ein Normalensystem.

Irgend ein Punkt der Geraden $G$ beschreibt bei der Bewegung bekanntlich ein Ellipsoid. Es seien die Entfernungen desselben von den Fixpunkten $\varrho$, $\varrho + 2\,b$, $\varrho + 2\,c$, die Winkel der Geraden mit den Axen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, dann sind die Coordinaten eines Punktes der beschriebenen Fläche:

$$x = \varrho \cos \alpha \qquad y = (\varrho + 2\,b) \cos \beta \qquad z = (\varrho + 2\,c) \cos \gamma \tag{102}$$

und ihre Gleichung wird:

$$\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{(\varrho + 2\,b)^2} + \frac{z^2}{(\varrho + 2\,c)^2} = 1. \tag{103}$$

Unter allen möglichen Flächen befindet sich, wie ausdrücklich hervorzuheben ist, das Ellipsoid 97, von welchem wir ausgegangen sind und zu dem die Geraden normal stehen, nicht, dasselbe wird also nicht von irgend einem festen Punkt der Geraden beschrieben.

Wie aus den Gleichungen 102 hervorgeht, beschreiben alle Punkte der Geraden $G$ räumlich affine Figuren; es sind daher die einzelnen Ellipsoide, welche von den Punkten von $G$ beschrieben werden, durch das Strahlensystem affin auf einander bezogen. Beschreibt ein Punkt einen ebenen Schnitt seines Ellipsoides, so thun dies alle. Je weiter die Punkte auf der Geraden gegen das Unendliche zu liegen, um so kreisähnlicher werden die von ihnen beschriebenen ebenen Schnitte, da die

Ellipsoide selbst immer kugelähnlicher werden. Die Regelfläche, welche von den Geraden gebildet wird, die ebene Schnitte der Ellipsoide aufeinander beziehen, wird daher von der unendlich fernen Ebene nach einem Kreise geschnitten, oder ihre Erzeugenden sind einem Kreiskegel parallel. Ordnet man die Einzellagen der Geraden $G$ nach Regelflächen, welche durch parallele ebene Schnitte eines Ellipsoides $E$ hindurchgehen, so werden diese Regelflächen wegen der affinen Beziehung der Ellipsoide auf einander von allen Ellipsoiden nach parallelen ebenen Curven geschnitten und speciell von den kugelähnlichen, weit vom Centrum abliegenden Ellipsoiden nach Curven, die sich von parallelen Kreisen mit gemeinsamer Axe senkrecht zu ihren Ebenen um so weniger unterscheiden, je ferner die sie beschreibenden Punkte auf der Geraden liegen. Alle diese Regelflächen werden daher Richtungskegel mit gemeinsamer Axe haben. Die erwähnte Zusammenordnung nach parallelen ebenen Schnitten des Ellipsoides $E$ ist auf doppelt unendliche Weise möglich; jeder entspricht ein System von Kreiskegeln mit gemeinsamer Axe und allen möglichen Oeffnungswinkeln als Richtungskegel der Regelflächen. Es werden daher bei allen möglichen solchen Zusammenordnungen alle möglichen Kreiskegel als Richtungskegel erschöpft und wir können umgekehrt den Satz aussprechen:

Sondert man von den Lagen der Geraden $G$ diejenigen aus, welche einem gegebenen Kreiskegel parallel sind, so bilden dieselben eine Regelfläche, welche auf unendlich verschiedene Arten durch Verbindung entsprechender Punkte zweier affiner Kegelschnitte erzeugt gedacht werden kann. Sie ist daher vierter Ordnung und ein ebener Schnitt derselben ist im allgemeinen eine rationale Curve vierter Ordnung mit 3 Doppelpunkten.

Aus der Gleichung: $\frac{x^2}{\varrho^2}+\frac{y^2}{(\varrho+2\,\mathrm{b})^2}+\frac{z^2}{(\varrho+2\,c)^2}=1$, die in $\varrho$ vom sechsten Grade ist, folgt unmittelbar, dass zu einem Punkte $x$, $y$, $z$ sechs Werte von $\varrho$, also sechs verschiedene Lagen der Geraden, oder auch 6 Ellipsoide, die von Punkten der Geraden beschrieben sind, gehören. Hat die Gleichung bei gehöriger Wahl des Punktes $x\,y\,z$ zwei gleiche Wurzeln $\varrho$, so fallen zwei von den sechs Geraden und ebenso zwei von den sechs Ellipsoiden zusammen. Das erste bedeutet, dass der Punkt $x$, $y$, $z$ auf der Brennfläche des Strahlensystems liegt, das zweite, dass er sich auf der Enveloppe der Ellipsoide befindet. Da beide Bedingungen zugleich erfüllt und durch die Diskriminante der Gleichung sechsten Grades ausgedrückt werden, so folgt der Satz:

Die von allen Punkten der bewegten Geraden erzeugten Ellipsoide umhüllen die Brennfläche des Strahlensystems der verschiedenen Lagen der Geraden.[1])

---

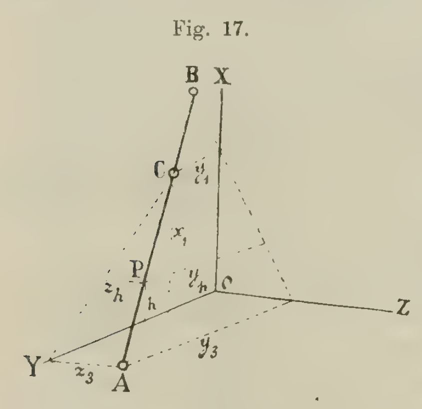
1) Ein analoger Satz gilt allgemein von den Flächen, welche Punkte einer Geraden bei beliebiger Bewegung beschreiben. Auch sie umhüllen die Brennfläche, die von den Einzellagen der Geraden gebildet wird.

Aus den Diskriminanteneigenschaften der Gleichung sechsten Grades in $\varrho$ lassen sich nun die Eigenschaften der Brennfläche, ihre Rückkehrkanten, ausgezeichneten ebenen Schnitte, Doppelcurve etc. genau ebenso herleiten, wie es Clebsch für die Centrafläche des Ellipsoides aus der entsprechenden etwas allgemeineren Gleichung sechsten Grades gethan hat.[1])

Von der gewöhnlichen Centrafläche unterscheidet sich unsere Brennfläche wesentlich darin, dass die drei Hauptebenen statt der Evoluten von Ellipsen Asteroiden enthalten. Sonst haben beide die Rückkehrkegelschnitte in den Hauptebenen, sowie die eigentümlichen, den Kreispunkten entsprechenden Knotenpunkte gemein, nur besteht bei der Brennfläche zwischen den Axen der Rückkehrkegelschnitte die Relation, dass immer zwei nicht demselben Kegelschnitt angehörige oder in derselben Richtung liegende gleich gross sind.

Es lässt sich nun unschwer nachweisen, dass zwischen der Seidel'schen Brennfläche und der Brennfläche der Geraden $G$ ein einfacher Zusammenhang besteht, in der Art, dass erstere ein specieller Fall der letzteren wird, wenn man eine der Grössen $b$ und $c$ unendlich klein im Vergleich zur andern nimmt und sich ausserdem auf Lagen der Geraden, welche von einer Axe des Coordinatensystems nur wenig abweichen, beschränkt. Der Beweis könnte an den Gleichungen der Flächen selbst geführt werden, ich ziehe es aber vor, nachzuweisen, dass durch das geeignet modificierte Strahlensystem der Geraden $G$ dieselbe Abbildung zweier unter sich parallelen Ebenen vermittelt wird, welche wir zwischen den Ebenen $B_{2k+1}$ und $A_{2k+1}$ durch das System der gebrochenen Strahlen gefunden haben.

Fig. 17.




$A\,B\,C$ seien die Schnittpunkte der Geraden $G$ mit den Ebenen $X=0$, $Y=0$, $Z=0$. $AB$ werde mit $c$, $AC$ mit $b=c-a$, $BC$ mit $a$ bezeichnet. Die Coordinaten von $A$ seien $y_3$ und $z_3$, die von $C$ $x_1$, $y_1$, endlich die von Punkt $P$, der auf der Geraden $G$ in einer Höhe $h$ über der $YZ$-Ebene gelegen ist: $x=h$ $y=y_h$ $z=z_h$.

Man findet dann:

$$z_h = z_3 - \frac{h z_3}{x_1} = z_3\left(1 - \frac{h}{x_1}\right); \quad y_3 = \frac{c}{a}\, y_1$$

$$y_h = y_3 - \frac{h(y_3 - y_1)}{x_1} = y_3\left(1 - \frac{h(c-a)}{c x_1}\right)$$

Die Neigungscosinus $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ der Geraden $G$ drücken sich folgendermassen durch die Coordinaten aus:

---

1) Vergl. Salmon-Fiedler. Analytische Geom. d. Raumes II. Teil S. 337 ff. und Crelle's Journal, 62. Bd. S. 64.

$$\alpha = \frac{x_1}{a-c}, \quad \beta = \frac{y_3}{c}, \quad \gamma = \frac{z_3}{c-a}.$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

$$\frac{x_2^1}{(a-c)^2} + \frac{y_3^2}{c^2} + \frac{z_3^2}{(c-a)^2} = 1,$$

$$x_1 = (c-a)\sqrt{1 - \frac{y_3^2}{c^2} - \frac{z_3^2}{(c-a)^2}}.$$

Es sollen nunmehr blos Strahlen in Betracht gezogen werden, welche in unmittelbarer Nähe der $X$-Axe liegen. Wir nehmen daher $y_3$ und $z_3$ klein im Vergleich zu $c$ an und entwickeln nach Potenzen von $\frac{y_3}{c}$ und $\frac{z_3}{c}$:

$$z_h = z_3\left(1 - \frac{h}{(c-a)\sqrt{1 - \frac{y_3^2}{c^2} - \frac{z_3^2}{(c-a)^2}}}\right),$$

$$= z_3\left[1 - \frac{h}{c-a}\left(1 + \frac{y_3^2}{2c^2} + \frac{z_3^2}{2(c-a)^2}\right)\right],$$

$$= \frac{z_3}{2c^2(c-a)^3}\left[2c^2(c-a)^3 - 2hc^2(c-a)^2 - y_3^2(c-a)^2 h - z_3^2 c^2 h\right],$$

$$= \frac{z_3}{2c^2(c-a)^3}\left[2c^2(c-a)^2(c-a-h) - (y_3^2(c-a)^2 + z_3^2 c^2)h\right].$$

$$y_h = y_3\left[1 - \frac{h}{c}\left(1 + \frac{y_3^2}{2c^2} + \frac{z_3^2}{2(c-a)^2}\right)\right],$$

$$= \frac{y_3}{2c^3(c-a)^2}\left[2c^2(c-a)^2(c-h) - (y_3^2(c-a)^2 + z_3^2 c^2)h\right].$$

Jetzt soll auch die Grösse $a$, ferner die Differenz $c-h$ sehr klein gegen $c$ sein und gegenüber $c$ vernachlässigt werden:

$$\left.\begin{aligned} 2c^2 z_h &= z_3\left(c(c-a-h) - \frac{h}{c}(y_3^2 + z_3^2)\right), \\ 2c^2 y_h &= y_3\left(c(c-h) - \frac{h}{c}(y_3^2 + z_3^2)\right). \end{aligned}\right\} \quad 104)$$

In den so erhaltenen Formeln müssen die Grössen $c-h$ und $a$ von der Ordnung der Quadrate der $y_3$ und $z_3$ angenommen werden, damit die rechte Seite homogen wird. Die $z_h$ und $y_h$ werden dann von der Ordnung der Cuben von $z_3$ und $y_3$.

Die eben entwickelten Formeln sind bis auf die Constanten identisch mit den Abbildungsformeln 12, aus welchen wir die Brennfläche des Systems der gebrochenen

Strahlen abgeleitet haben. Man kann daher jenes Strahlensystem genähert auf kinematischem Wege erzeugen, was in folgendem Satz ausgesprochen werden möge:

Sind auf einer Geraden drei Fixpunkte gegeben, von denen zwei sehr nahe im Vergleich zur Entfernung des dritten bei einander liegen, und bewegt sich die Gerade so, dass die drei Fixpunkte auf den drei Ebenen eines orthogonalen Coordinatensystems gleiten, so beschreibt sie dabei ein Strahlensystem, das in der Nähe einer der Coordinatenaxen mit der aus den Seidel'schen Formeln folgenden Näherung des Systems der in einem centrierten optischen Apparat gebrochenen Strahlen zusammenfällt.

Die Specialisierung, welche wir bei der kinematischen Erzeugung des neuen Strahlensystems im Vergleich zum alten eintreten liessen, kann am besten an den kugelähnlichen Ellipsoiden veranschaulicht werden, als deren Normalen wir die Strahlen des Systems betrachten können. Der halbe Winkel, welchen im allgemeineren Falle die Normalen in den Kreispunkten einschlossen, berechnete sich nach der Formel $\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{c}{b}$. Nachdem in der Specialisierung $c$ sehr klein gegen $b$ angenommen wurde, ist auch dieser Winkel unendlich klein und es rücken je zwei Kreispunkte des Ellipsoides sehr nahe zusammen, wodurch dasselbe mehr den Charakter einer Rotationsfläche mit bestimmter Axe bekommt, ohne seine allgemeine Kugelähnlichkeit einzubüssen. Dabei reduciert sich auch die Ordnung des Strahlensystems von der sechsten auf die fünfte; wie man an der Gleichung 103 sieht:

$$\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{(\varrho + 2b)^2} + \frac{z^2}{(\varrho + 2c)^2} = 1, \tag{103)}$$

$$\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{(\varrho + 2b)^2} + \frac{z^2}{\varrho^2}\left(1 - \frac{4c}{\varrho}\right) = 1,$$

$$\frac{x^2 + z^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{(\varrho + 2b)^2} - \frac{4cz^2}{\varrho^3} = 1. \tag{105)}$$

Letztere Gleichung ist nur mehr vom fünften Grad in $\varrho$.

Für das specialisierte Strahlensystem gilt ebenso wie vom allgemeinen der Satz, dass die Strahlen, welche den Erzeugenden eines Kreiskegels parallel sind, eine Regelfläche 4. Ordnung bilden. Diese Regelflächen haben nun eine ganz besondere Bedeutung bei der Anwendung auf das Linsensystem. Dieselben umgrenzen nämlich das austretende Strahlensystem, wenn das eintretende durch die Strahlen, welche am Rande einer kreisförmigen Blende auftrafen, begrenzt war. Die letzteren bilden nämlich in erster Annäherung einen Kreiskegel; einen solchen werden daher auch die austretenden Strahlen in erster Annäherung bilden. Nun haben wir früher das System der gebrochenen Strahlen in der Nähe der Brennfläche bis auf Grössen fünfter Ordnung dadurch bestimmt, dass wir durch die mit der Correktion dritter Ordnung versehenen Punkte der genäherten Bildebene $A_{2k+1}$ Parallele zu den genäherten Richtungen der

gebrochenen Strahlen zogen und diese Parallelen innerhalb Distanzen zweiter Ordnung von $A_{2k+1}$ ab gerechnet mit den wahren gebrochenen Strahlen verwechselten. Ohne uns also von der erstrebten Genauigkeit zu entfernen, können wir behaupten, dass in der Gegend der Brennfläche die Begrenzung der austretenden Strahlen stets eine Regelfläche mit geradem Richtungskegel ist. Die Schnitte einer solchen mit einer beliebigen Ebene, also auch mit der Schirmebene sind Curven vierter Ordnung mit 3 Doppelpunkten. Von dieser Art sind also unsere Grenzcurven.

Dabei ist noch gar nicht vorausgesetzt worden, dass die abgrenzende Blende centrisch auf der optischen Axe sitzt. Wenn letzteres der Fall ist, dann liegt die Axe des Richtungskegels in einer Ebene mit der optischen Axe, die gleichzeitig Symmetrieebene für die Brennfläche ist. Dann wird auch die Regelfläche vierter Ordnung symmetrisch und ebenso ihre Schnittcurven mit der Schirmebene. Von den 3 Doppelpunkten der Schnittcurve muss dann notwendig einer in die Symmetrieaxe fallen. Die Raumcurve dritter Ordnung, welche im Allgemeinen als Doppelcurve der Regelfläche vierter Ordnung auftritt, muss nun ebenfalls symmetrisch werden, was dadurch ermöglicht wird, dass sie in eine in der Symmetrieebene liegende Gerade und in einen sie schneidenden zu jener Ebene symmetrischen Kegelschnitt zerfällt. Wird die centrische Blende in der Axe noch so verschoben, dass sie die früher ermittelte günstigste Stellung einnimmt, dann fällt die Axe des Richtungskegels der Regelfläche mit dem Schnitte der beiden Symmetrieebenen der Brennfläche, nämlich mit dem ausgezeichneten Strahl zusammen. Die Regelfläche hat nun ebenfalls zwei Symmetrieebenen wie die Brennfläche; ihre Doppelcurve ist in zwei, zum ausgezeichneten Strahl senkrechte und eine im Unendlichen liegende Gerade zerfallen. Die Schirmebenen, die alle durch die letztgenannte Doppelgerade hindurchgehen, schneiden die Regelfläche ausserdem nach Ellipsen, die also in diesem Falle als Grenzcurven auftreten.

Satz: Unter Voraussetzung einer kreisförmigen Blende, deren Ebene senkrecht zur Axe des optischen Apparates steht, wird das aus dem Apparat austretende, ursprünglich von einem Punkt ausgegangene Strahlenbündel angenähert durch eine Regelfläche vierter Ordnung begrenzt. Die Grenzcurven der von ihm auf verschiedenen Schirmebenen erzeugten Lichtflecke sind rationale Curven vierter Ordnung mit 3 Doppelpunkten. Wird die Blende centrisch zur optischen Axe gesetzt, so gestaltet sich die Begrenzung des Strahlenbündels, wie des Lichtfleckes symmetrisch zu einer durch die optische Axe und den leuchtenden Punkt gehenden Ebene. Verschiebt man endlich die Blende an die ausgezeichnete Stelle der Axe, so wird das Strahlenbündel und der Lichtfleck nach zwei Ebenen symmetrisch begrenzt und die Grenzcurven des letzteren werden Ellipsen.[1])

---

1) Eine Reihe von Sätzen über die Regelflächen vierter Ordnung als Grenzflächen von Strahlenbündeln finden sich in allgemeinerer Form in der Abhandlung von Herrn O. Böcklen in Reutlingen: „Ueber die Krümmung der Flächen", Crelles Journal Bd. 96, namentlich im §

Geometrische Betrachtungen der Art, wie sie in diesem letzten Paragraphen angedeutet sind, haben mich zur Ausführung der vorangegangenen Entwickelungen veranlasst, sie haben ihren Gang begleitet und ihre Resultate kontroliert. Dieselben knüpften sich zumeist an die von Seidel seit Langem publicierte Form der Gleichung der Brennfläche. Sie stehen damit auf demselben Fundamente, das Seidel vor einem Menschenalter in der Dioptrik gelegt hat, das aber, so weit meine Kenntnis reicht, von allen neueren Autoren ignoriert wurde.

---

„Die Normalenregelflächen des Ellipsoides". S. 169. Trotz der vielen interessanten geometrischen Resultate, welche die erwähnte Abhandlung zu tage fördert, halte ich die Tendenz derselben, durch Einführung der Normalenbündel von Flächen zweiter Ordnung an stelle des Sturm'schen Conoids für die Erklärung der Accommodation des Auges weiteren Spielraum zu gewinnen vom mathematischen Standpunkt aus für verfehlt. Entweder begnügt man sich mit der Berücksichtigung der zweiten Potenzen des Verhältnisses der Pupillenöffnung zur Brennweite des Auges, dann ist das Sturm'sche Conoid die ausreichende Begrenzungsfläche des Strahlenbündels. Oder man nimmt noch die Glieder dritter Ordnung hinzu, dann muss man aber auch alle nehmen und darf nicht ohne triftigen Grund einzelne fortlassen. Letzteres geschieht aber bei der Art und Weise, wie Herr Böcklen die Normalenbündel der Fläche zweiter Ordnung einführt. Da eine allgemeine Wellenfläche keine vollständige Berührung dritter Ordnung mit einer Fläche zweiter Ordnung eingehen kann, so begnügt sich der Verfasser mit einer „teilweisen" Berührung dritter Ordnung, die sich z. B. auf die Normalschnitte durch die Tangenten an die Krümmungslinien nicht erstreckt, und daher streng genommen nur eine specielle Berührung zweiter Ordnung ist. Aus ihr werden dann die Constanten des Normalenbündels der Fläche zweiter Ordnung abgeleitet. Bemerkenswert ist hingegen, dass für mässiges Gesichtsfeld, wie es die Seidel'sche Theorie voraussetzt, thatsächlich die Wellenfläche der gebrochenen Strahlen in grösserer Entfernung von der Brennfläche eine vollständige Berührung dritter Ordnung mit einer kugelähnlichen Fläche zweiter Ordnung eingehen kann. Ob das auch für grosses Gesichtsfeld noch zutrifft, müsste erst untersucht werden.

## Erläuterung zu den Tafeln.

Die Figuren 1a, 1b und 1c der Tafel I stellen den allgemeinen Fall der Seidel'schen Brennfläche nach einem Gipsmodelle von L. Schleiermacher dar und zwar Fig. 1a die Combination beider Mäntel, Fig. 1b und 1c jeden der beiden Mäntel separat (v. S. 538 des Textes). Die Fläche ist näherungsweise die Brennfläche des Systems von Strahlen, das aus einem seitlich von der optischen Axe gelegenen Strahlenbündel durch Brechung in einem centrierten Linsensystem entstanden ist. In Wirklichkeit hat man sich jedoch die Querdimensionen der Fläche von einer geringeren Grössenordnung vorzustellen, als die in der Figur vertikal gedachte Längsdimension.

Fig. 2 Tafel I stellt die beiden ineinander gesteckten Mäntel der Brennfläche für den Fall vor, dass der sog. Kugelgestaltsfehler in der Axe des Linsensystems gehoben ist. Die beiden Mäntel schneiden sich hier in einem Geradenpar, zu dessen Ebene die Brennfläche symmetrisch liegt (v. § 3 S. 546).

Die übrigen in den 3 Tafeln zusammengestellten Figuren beziehen sich auf zwei bestimmte Linsensysteme und dazu gewählte leuchtende Punkte, nämlich:

A) eine Convexlinse aus Crownglas von folgenden Dimensionen:

$$\varrho_0 = 69{,}25 \text{ mm}, \ d_1 = 8{,}0 \text{ mm}, \ \varrho_2 = -216{,}195 \text{ mm}, \ n_1 = 1{,}52964 \text{ für gelbe Strahlen.}$$

Der leuchtende Punkt befindet sich in unendlicher Entfernung und die Richtung nach demselben schliesst mit der optischen Axe der Linse einen Winkel von $6^0$ ein.

B) das von Bessel beschriebene Fraunhofer'sche Heliometerobjektiv, resp. diejenige von A. Steinheil angegebene Modifikation desselben, bei welcher für die gelben Strahlen der Kugelgestaltsfehler in der Axe verschwindet. Dasselbe besteht aus einer Crown- und Flintglaslinse und hat folgende Dimensionen:

$$\varrho_0 = 838{,}164''', \ d_1 = 6{,}0''', \ \varrho_2 = 333{,}768''', \ d_3 = 0{,}0''', \ \varrho_4 = 340{,}326''', \ d_5 = 4{,}0''', \ \varrho_6 = 1168{,}926$$
$$\nu_{-1} = 1{,}0, \ \nu_1 = 0{,}653967, \ \nu_3 = 1{,}0, \ \nu_5 = 0{,}610083, \ \nu_7 = 1{,}0 \text{ für gelbe Strahlen.}$$

Aus ihnen berechnet sich nachstehendes System von Bestimmungsstücken $h$, $\sigma$ (v. S. 525):

$$\sigma_{-1} = 0{,}0, \ \sigma_1 = 0{,}041285, \ \sigma_3 = 0{,}221270, \ \sigma_5 = 0{,}020675, \ \sigma_7 = 0{,}088382$$
$$h_0 = 100{,}0, \ h_2 = 99{,}7523, \ h_4 = 99{,}7523, \ h_6 = 99{,}6696.$$

Aus diesen hinwiederum folgen die 5 Summen $S(1)$ bis $S(5)$, für welche jedesmal der Betrag der positiven und negativen Glieder für sich angegeben ist (v. S. 530):

$$S(1) = -5{,}50853 \ + 5{,}50874 \ = + 0{,}00021$$
$$S(2) = -0{,}111980 \ + 0{,}108383 \ = - 0{,}003597$$
$$S(3) = -0{,}0028800 \ + 0{,}0020082 \ = - 0{,}0008718$$
$$S(4) = -0{,}0046632 \ + 0{,}0031744 \ = - 0{,}0014888$$
$$S(5) = +0{,}00011783 + 0{,}00011635 = + 0{,}00000148.$$

Wie man sieht, ist $S(1)$ bis auf ca. 0,04 ⁰/₀₀ des Betrages der positiven Glieder gleich 0, also die Compensation der positiven und negativen Glieder nahezu vollständig. Eine Compensation bis auf einige ⁰/₀ tritt auch bei $S(2)$ und $S(5)$ ein. Erstere wurde nach v. Seidel's Vermutung von Fraunhofer angestrebt, letztere ist bei geringen Linsendicken immer in ähnlichem Grade vorhanden. Die Vereinigungsweite der Strahlen parallel zur Axe beträgt 1126,70''' von der letzten Fläche ab gerechnet. Das halbe Gesichtsfeld beträgt beim Heliometerobjektiv 48'.

Der leuchtende Punkt liegt in unendlicher Entfernung und die Richtung nach demselben bildet mit der optischen Axe einen Winkel von 48'.

Alle Figuren der Tafel II, sowie Fig. 3a und 3b der Tafel I, welche von Linsen erzeugte Lichtflecke darstellen, sind negativ zu denken, d. h. in Wirklichkeit sind die dunkel dargestellten Partien hell und umgekehrt.

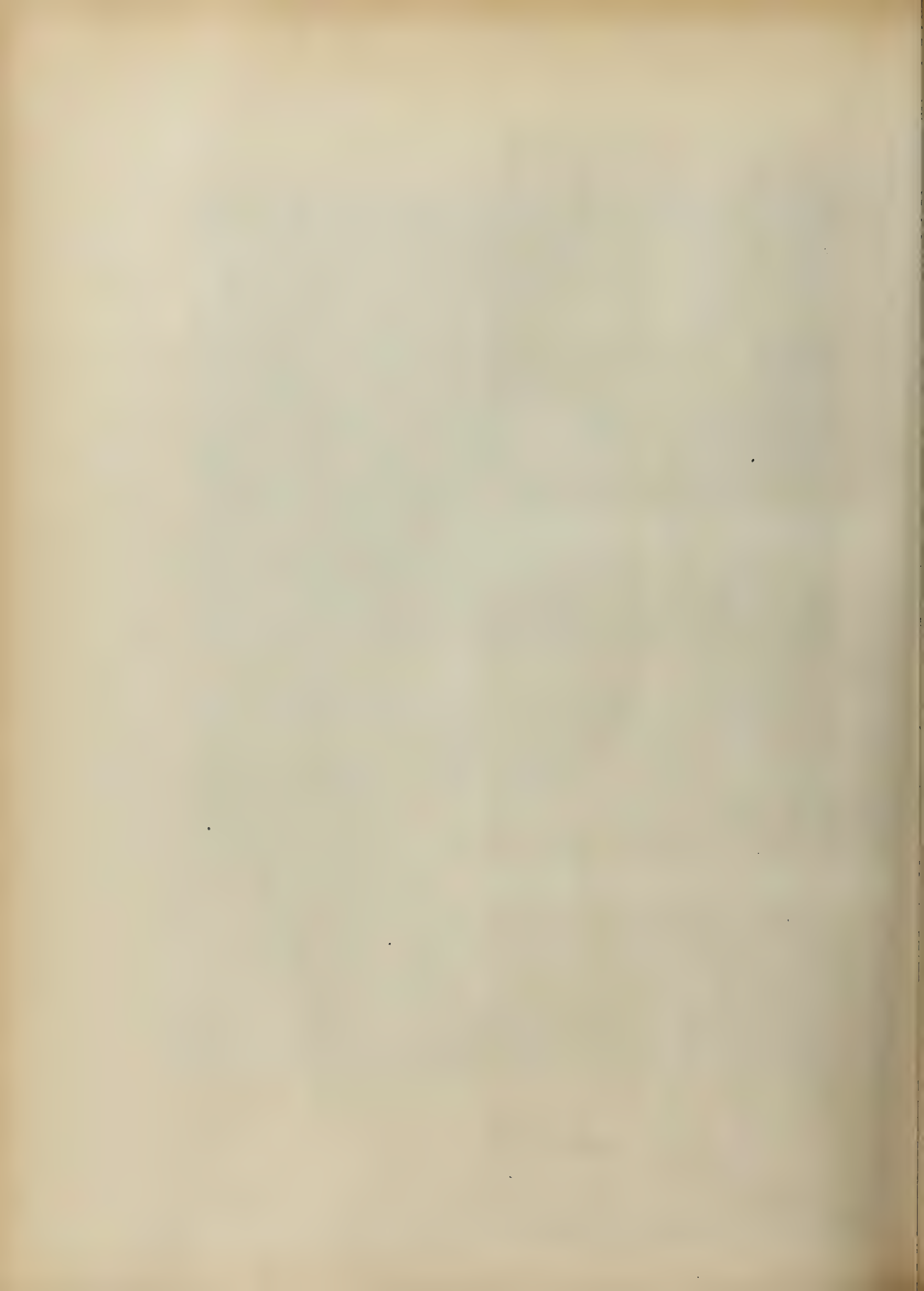
Die Figuren der Tafel II mit Ausnahme von Fig. 3 beziehen sich auf die unter A) beschriebene Linse und sollen die Helligkeitsverteilung in einem Lichtfleck allgemeiner Art ohne Rücksicht auf die Begrenzung durch ein Diaphragma darstellen (v. § 5, S. 565). Sie sind in 100facher Vergrösserung gezeichnet. Die Fig. 1a bis 1e (bezw. 2a bis 2e) beziehen sich auf einen Lichtfleck, der auf einer Schirmebene entsteht, die sich in der Entfernung von 93,78 (bezw. 92,45) mm hinter der letzten Linsenfläche und 2,22 (bezw. 3,55) mm vor der Vereinigungsstelle der centralen Parallelstrahlen befindet. Fig. 1a (bezw. 2a) stellt die Verteilung der Helligkeit in der $\lambda\mu$-Ebene dar (v. S. 567 und Textfigur 10 S. 560); die Fig. 1b, 1c, 1d (bezw. 2b, 2c, 2d) die Helligkeit in den einzelnen Blättern der Schirmebene, endlich Fig. 1e (bezw. 2e) die bei Aufeinanderlegung der Blätter resultierende Gesammthelligkeit des Lichtfleckes. Die den Isophoten beigesetzten Zahlen geben den Grad der Helligkeit an. Als Einheit gilt die Helligkeit, welche der Schirm bei Entfernung der Linse von dem in unendlich grosser Entfernung angenommenen leuchtenden Punkt erhalten würde. Die Schirmebene der Fig. 1 ist so gewählt, dass sie durch die Knotenpunkte der Brennfläche hindurchgeht und daher die Brennlinie in ein Hypocycloidenpar zerfällt (v. S. 542).

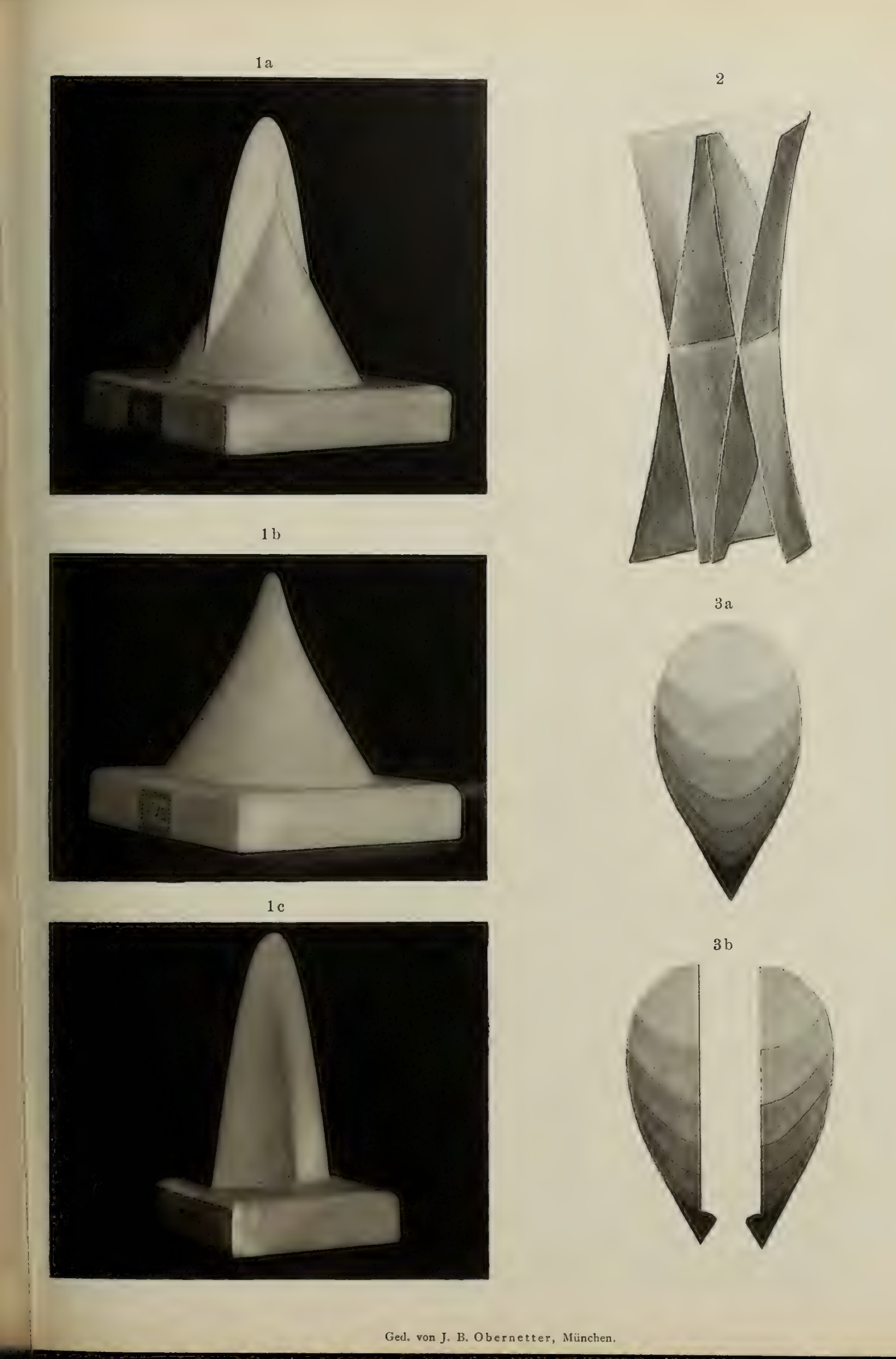
Die Figuren der Tafel III, nämlich 1a, 1b, 1c, 2a, 2b, 2c, 3a, 3b beziehen sich auf die Begrenzung des Lichtfleckes bei Abblendung der einfallenden Strahlen (v. § 6, S. 569). Dabei ist wieder die Linse $A$ vorausgesetzt. Fig. 1c, 2c und 3b stellen die Blendenebene dar und zwar in der Grösse, dass die Einheit des Masstabes 1 cm in Wirklichkeit bedeutet. Die Fig. 1a, 2a, 3a beziehen sich auf die Schirmebene, für sie ist die Einheit des Masstabes gleich 0,1 mm. Die Schirmebene ist in Fig. 1a und 2a in 92,45 mm Entfernung von der hinteren Linsenfläche angenommen, für Fig. 3a beträgt diese Entfernung 93,78 mm. Die Blendenebene ist jeweilig durch koncentrische Kreise in 10 flächengleiche Ringe, die verschieden grosser Abblendung entsprechen und einen centralen Kern geteilt, durch dessen Mitte die optische Axe hindurchgeht. Die Einteilung der Blendenebene ist durch Farbentöne hervorgehoben. Die Blendenebene in Fig. 1c hat man sich an der Vorderfläche der Linse gelegen zu denken. Fig. 1b gibt die Abbildung der Blendenebene in die $\lambda\mu$-Ebene wieder, Fig. 1a stellt dagegen die Abbildung der Blendenebene in die Schirmebene dar. Entsprechende Gebiete sind jedesmal mit gleichen Farbentönen versehen. Die feinpunktierte, aus zwei ellipsenähnlichen Zweigen bestehende Curve der Blendenebene 1c gibt den Ort der Schnittpunkte der Strahlen, welche die Schirmebene in der Brennlinie (Fig. 1a) treffen (v. Textfigur 13 S. 562). Die Fig. 1a, 1b, 1c stellen den allgemeinen Fall dar, wo der Lichtfleck trotz koncentrischer Abblendung der einfallenden Strahlen durch eine unsymmetrische Curve vierter Ordnung begrenzt wird. Bei günstiger Wahl der Blende kann man, wie die Fig. 2a und 3a zeigen, diese Unsymmetrie vermeiden (v. S. 572). Hiebei ist die Blendenebene in einer Entfernung von 20,9 mm vor der ersten Linsenfläche angenommen. Die punktierte Curve der Blendenebene, welche der Brennlinie des Lichtfleckes entspricht, liegt nunmehr symmetrisch zur optischen Axe und die Curven, welche bei verschiedenen Abblendungen den Lichtfleck begrenzen,

werden Ellipsen mit gemeinsamem Mittelpunkt (v. S. 573). Ihre Bilder in der $\lambda\mu$-Ebene 2b sind Gerade. Die Schirmebene bei Fig. 2a liegt an derselben Stelle wie bei Fig. 1a; bei Fig. 3a dagegen 93,78 mm hinter der letzten Linsenfläche wie bei Fig. 1e Tafel II. Die punktierte Curve der Blendenebene Fig. 3b besteht aus 2 Kreisen (v. S. 557, Formel 71 im Falle $\beta = 0$).

Die Fig. 3a und 3b auf Tafel I, die Fig. 3 auf Tafel II und die Fig. 4a, 4b und 5a, 5b auf Tafel III illustrieren die Wirkung des Linsensystems $B$ (Heliometerobjektiv). Fig. 3 Tafel II zeigt die Helligkeitsverteilung der Brennfigur in der Ebene, welche durch den Brennpunkt des Objektivs hindurchgeht in 1000facher Vergrösserung (v. Textfig. 16a, S. 574). Dabei ist als Abblendung der einfallenden Strahlen der innere Rand der Objektivfassung von 158 mm Durchmesser angenommen. Fig. 3a Tafel I zeigt in gleicher Vergrösserung den Lichtfleck in der Symmetrieebene der Brennfläche bei voller Oeffnung; Fig. 3b denselben Lichtfleck, wenn die rechte oder linke Hälfte des Heliometerobjektivs abgeblendet ist. Dabei ist angenommen, dass der leuchtende Punkt in der Trennungsebene des Objektivs liege. Die Fig. 4a, 4b und 5a, 5b auf Tafel III illustrieren die Abbildung der Blendenebene in diejenige Schirmebene, welche die Brennfläche symmetrisch teilt (v. Textfigur 15, S. 564). Sie zeigen auch, wie sich bei Veränderung des Blendendurchmessers die Begrenzung des Lichtfleckes ändert. Bei Fig. 4a ist die Blendenebene an der Vorderfläche des Objektivs angenommen. Die Strahlen, welche auf dem punktierten Linienpar der Blendenebene 4b auffallen, schneiden nach der Brechung die Schirmebene in den Brennlinien. Fig. 5a und 5b entspricht einer Blendenebene, die sich 1211,9‴ vor der vordern Linsenfläche befindet. Hiebei tritt die S. 575 erwähnte einfache Begrenzung des Lichtfleckes durch Kreise ein. Diese Abblendung wäre theoretisch die günstigste; ihre Anwendung setzt aber einen um die Hälfte grösseren Durchmesser des Objektivs voraus, oder es müsste der Durchmesser der Blende gegenüber dem Objektivdurchmesser auf die Hälfte reduciert werden, falls das Gesichtsfeld von $2 \times 48'$ aufrecht erhalten werden soll. Zu bemerken ist schliesslich noch, dass die Einheit des Masstabes der Tafel III in den Fig. 4a und 5a 0,01 mm, in den Fig. 4b und 5b dagegen 50 mm bedeutet.

---






Ged. von J. B. Obernetter, München.



1a

500
1000
2000
4000
8000
16000

1b

500
1000
2000
4000
8000
16000
16000
8000
4000
2000
1000
500

2d

Min. 915

2c

Min. 1580

1c

Min. 8000

1d

über 16000

2b

500
1000
2000
4000
8000
16000
16000
8000
4000
2000
1000
500

2a

500
1000
2000
4000
8000
16000
16000
8000
4000
2000
1580
2000
4000
8000
16000
16000
8000
4000
2000
1000
915

500
1000
2000
4000
8000
16000
16000
8000
8000
16000
16000
8000
4000
2000

1e

3

2e

S. Finsterwalder.



1a

1b

2a

2b

3a

1c

2c

4a

4b

5a

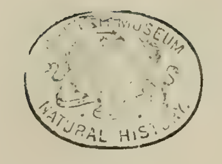
5b

3b

0 1 2 3 4 5 Masstab.

Druck von J. B. Obernetter, München.

S. Finsterwalder gez.



# Skizzen

## zu einem speciellen Fall des Problems der drei Körper.

Von

**Dr. E. Frhr. von Haerdtl.**

(Mit 4 Tafeln.)



# Vorrede.

Die vorliegende Abhandlung fällt ihrem Inhalt nach nahezu völlig mit jener Untersuchung zusammen, welche ich als Manuscript zur Concurrenz um den von der kgl. dänischen Gesellschaft der Wissenschaften gewidmeten Preis eingereicht hatte und welcher am 20. Februar 1891 die goldene Medaille zuerkannt worden ist.

Eine merkliche Erweiterung hat nur der fünfte Abschnitt durch Aufnahme jener Resultate erfahren, welche die wiederholte genaue Störungsrechnung mich hat finden lassen. Der Schluss des Termins hatte mich hier noch mitten in den diesbezüglichen Rechnungen überrascht.

Die übrigen Abschnitte haben nur Aenderungen formaler Natur erfahren. Es schien mir nämlich wegen des negativen Charakters der Resultate gerathen, an manchen Stellen die Darlegung noch zu kürzen und mich hier bloss auf die Wiedergabe der Hauptpunkte zu beschränken, während ich in dem oben erwähnten Manuscript, namentlich bezüglich der numerischen Werthe, detaillirtere Angaben gemacht hatte.

Schliesslich erlaube ich mir noch an dieser Stelle Herrn Professor Thiele meinen ergebensten Dank zu sagen. Mehreren werthvollen Bemerkungen, welche er die Güte hatte, mir nach Durchsicht des Manuscripts mitzutheilen, habe ich thunlichst Rechnung getragen.

# Einleitung.

Dass wir uns heute von den Bewegungserscheinungen in einem System von mehr als zwei Körper keine oder eine nur höchst unvollkommene Vorstellung zu machen im Stande sind, glaube ich, kann nicht geläugnet werden. und ich erblicke mit Gyldèn[1]) hierin die Hauptursache, wesshalb uns die Lösung des Problems der drei Körper so schwierig erscheint. Von Gyldèn ist auch meines Wissens zuerst auf einen Weg hingewiesen worden, auf dem diesem Uebelstand möglicherweise abgeholfen und die Erweiterung unseres Vorstellungsgebietes erreicht werden könnte, nämlich die Untersuchung einer Reihe von Specialfällen dieses Problems, denn es lässt sich erwarten, dass man durch eine grössere Zahl derartiger Untersuchungen — wenngleich jede an sich, uns nur ein Bild der Bewegung im speciellen Fall zu geben, im Stande ist — schliesslich doch aus deren Zusammenstellung zu zureichenden Vorstellungen der Bewegung im allgemeinen Fall gelangen oder doch wenigstens dieselben so weit ausbilden wird können, dass wir nicht mehr, wie heute, gezwungen sind, auf die Bewegungserscheinungen in einem System von nur zwei Körpern zurückzugreifen. Wie weit auf diesem — gewiss naturgemässen — Weg ein Beitrag zur Lösung des allgemeinsten Falles in Aussicht steht, lässt sich allerdings im Voraus auch nur näherungsweise nicht beurtheilen, doch, glaube ich, wird man diesen Weg schon desshalb als einen wissenschaftlich berechtigten ansehen müssen, als er uns dazu führt, uns mit den einfacheren Fällen eingehender zu befassen, deren Lösung zu ver-

1) H. Gyldèn, Eine Annäherungsmethode im Probleme der drei Körper. Acta Mathematica I u. a. O.

suchen und zu zeigen, ob und wie weit wir heute schon im Stande sind, der auch hier schon auftretenden Schwierigkeiten Herr zu werden.

In der vorliegenden Arbeit erscheint zum erstenmal die numerische Rechnung in den Dienst des Problems gestellt. Nach meiner Meinung handelt es sich nicht nur darum, die Existenz einfach periodischer Bewegungen zu beweisen, sondern in den einzelnen Fällen auch die geometrischen und mechanischen Bedingungen aufzusuchen, denn es steht zu erwarten, dass man hiebei zu brauchbaren Annäherungsformeln gelangen wird. Das nöthige Material zu solchen Untersuchungen zu liefern, sind aber numerische Rechnungen vorzugsweise geeignet.

In unserem Planetensystem ist die Massenvertheilung eine derartige, dass während eines mässigen Zeitraumes der Einfluss der Planeten auf einander im Vergleich zu jenen der Sonne sehr gering bleibt. Die Bewegungserscheinungen sind demnach auch nahezu dieselben, wie jene in einem System von nur zwei Körpern. Dieser Umstand setzt uns umgekehrt aber auch wieder in Stand für einen beliebigen, nur nicht zu weit entfernten Zeitmoment von den in unserem System stattfindenden Bewegungserscheinungen sofort wenigstens ein genähertes Bild zu entwerfen.

Verlassen wir aber unser Planetensystem und nehmen wir an, es liege uns z. B. ein mehrfaches Sternsystem vor, so gestalten sich die Verhältnisse wesentlich ungünstiger und schon auf die einfachsten Fragen über die in demselben stattfindende Bewegung werden wir die Antwort schuldig bleiben müssen.

Die vorliegende Untersuchung behandelt einen der einfachsten Fälle in einem derartigen System. Um den Leser mit demselben vertraut zu machen, gebe ich in Uebersetzung das von der königlich dänischen Gesellschaft der Wissenschaften gestellte Problem hier wieder:

„In einem Doppelstern, bestehend aus zwei gleichnamigen Körpern $A$ und $B$, sind die beschriebenen Bahnen Kreise. Ein dritter Punkt $C$, mit unendlich kleiner Masse, bewegt sich so in der Bahnebene der $A$ und $B$, dass er zu Beginn der Bewegung auf der Verlängerung der Linie $AB$ steht und zwar in einem Abstand von $A$, welcher halb so gross ist, wie der Abstand von $B$ bis $A$ und ferner, dass er um $A$ eine Kreisbahn beschreiben würde, sofern $B$ nicht vorhanden wäre. Bei Beginn sind alle Bewegungen nach derselben Seite gerichtet.“

1.

Nehmen wir die Linie $BAC$ als $X$-Axe eines rechtwinkligen fixen Coordinatensystems, dessen Ursprung in $A$ liege, an, und bezeichnen ferner mit $x_1\ y_1$ die Coordinaten, mit $m$ die Masse des Körpers $B$, mit $x_0\ y_0$ die Coordinaten des Körpers $C$ und zwar in der ungestörten (Kreis) Bahn, die Störungen in den einzelnen Coordinaten mit $\xi\ \eta$, so sind die thatsächlich stattfindenden, also gestörten Coordinaten $x\ y$ desselben Körpers $C$, dargestellt durch $x = x_0 + \xi$, $y = y_0 + \eta$, und mit Berücksichtigung der obigen Festsetzungen über die Massen ($C = 0$, $A = B = m$), gehen die bekannten Differentialgleichungen zur Berechnung der Störungen in den rechtwinkligen Coordinaten über in:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = k^2 m \left\{ \frac{x_1 - x}{\varrho^3} - \frac{x_1}{r_1^3} \right\} + k^2 m \left\{ \frac{x_0}{r_0^3} - \frac{x}{r^3} \right\}$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = k^2 m \left\{ \frac{y_1 - y}{\varrho^3} - \frac{y_1}{r_1^3} \right\} + k^2 m \left\{ \frac{y_0}{r_0^3} - \frac{y}{r^3} \right\}$$

Die Einheit der Distanz und der Masse können wir nach Belieben wählen, nur darf nicht übersehen werden, dass jede Verfügung hierüber zugleich eine bestimmte Zeiteinheit bedingt.

Ich habe $r_0 = \frac{1}{2} r_1 = 1$ genommen, und ferner $m$ so gewählt, dass es das Product $k^2 m$, wo $k$ die Gauss'sche Constante bedeutet, gleich der Einheit macht. Die obigen Gleichungen vereinfachen sich demnach noch weiter und zwar wird:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \left\{ \frac{x_1 - x}{\varrho^3} - \frac{x}{r^3} \right\} - \left\{ \frac{x_1}{8} - x_0 \right\}$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = \left\{ \frac{y_1 - y}{\varrho^3} - \frac{y}{r^3} \right\} - \left\{ \frac{y_1}{8} - y_0 \right\}$$

Die Berechnung der zweiten Glieder rechts vom Gleichheitszeichen bietet absolut keine Schwierigkeit. In den ersten Gliedern sind aber die Störungswerthe $\xi\ \eta$, also jene Werthe enthalten, die wir zu bestimmen suchen. Dieser Umstand erschwert zwar deren Berechnung, doch gestaltete sich dieselbe hier trotzdem sehr einfach, da hier nicht die äusserste Genauigkeit erreicht werden musste. Einige Worte dürften genügen, die Art der Berechnung derselben klar zu machen.

Dass ich überhaupt mich entschlossen habe, die Störungen in den rechtwinkligen Coordinaten zu ermitteln, findet seine Erklärung in dem Umstand, dass es bei dieser Art der Berechnung sofort möglich ist, sich vom Lauf des gestörten Körpers ein Bild zu machen. Indem ich die gestörten Coordinaten von Intervall zu Intervall auf einem graduirten Blatt eintrug und deren Schnittpunkte durch eine Curve verband, gestattete mir schon der Verlauf der Curve einen beiläufigen Schluss auf den Werth der gestörten Coordinaten des nächstfolgenden Intervalls zu ziehen. Der Differenzengang der Störungsincremente ermöglichte aber stets einen noch genaueren Werth voraus zu extrapoliren, so dass der direct berechnete Werth meist völlig mit dem angenommenen zusammenfiel und eine Wiederholung der Rechnung — von wenigen Fällen abgesehen — überflüssig wurde.

Da: $x_0 = \cos v_0 \qquad x = x_0 + \xi = r \cos v \qquad x_1 = r_1 \cos v_1$

$y_0 = \sin v_0 \qquad y = y_0 + \eta = r \sin v \qquad y_1 = r_1 \sin v_1$

ferner: $$\varrho^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2$$

endlich zu Beginn der Bewegung der obigen Festsetzungen gemäss:

$$v_0 = 0^0 \qquad v_1 = 180^0$$

zu nehmen ist, so glaube ich, ist durch die Ueberschrift die Bedeutung der Zahlen in nachfolgender Tafel genügend klar gethan. Wie man aus derselben ersieht, wurde der speciellen Störungsrechnung jenes Intervall zu Grunde gelegt, welches einer Bewegung des störenden Körpers $B$ im Betrag von $1^0\,15'$ in seiner Kreisbahn entspricht und die Rechnung so weit geführt, bis $B$ zwei volle Umläufe beschrieben hatte.

| $v_0$ | $v_1$ | $x$ | Diff. | $y$ | Diff. | $\varrho$ | Diff. | $r$ | Diff. | $v$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ° | ° | | | | | | | | | ° ′ | ° |
| 0.0 | 180.00 | + 1.00000 | — 83 | + 0.00000 | + 4362 | + 3.0000 | — 1 | + 1.0000 | + 1 | 0 0.0 | + 2 30.0 |
| 2.5 | 181.25 | + 0.99917 | — 246 | + 0.04362 | + 4354 | + 2.9999 | — 1 | + 1.0001 | + 4 | 2 30.0 | + 2 29.9 |
| 5.0 | 182.50 | + 0.99671 | — 408 | + 0.08716 | + 4338 | + 2.9998 | — 1 | + 1.0005 | + 7 | 4 59.9 | + 2 29.6 |
| 7.5 | 183.75 | + 0.99263 | — 569 | + 0.13054 | + 4314 | + 2.9997 | — 2 | + 1.0012 | + 9 | 7 29.5 | + 2 29.3 |
| 10.0 | 185.00 | + 0.98694 | — 729 | + 0.17368 | + 4283 | + 2.9995 | — 2 | + 1.0021 | + 12 | 9 58.8 | + 2 28.9 |
| 12.5 | 186.25 | + 0.97965 | — 888 | + 0.21651 | + 4244 | + 2.9993 | — 2 | + 1.0033 | + 14 | 12 27.7 | + 2 28.4 |
| 15.0 | 187.50 | + 0.97077 | — 1044 | + 0.25895 | + 4198 | + 2.9991 | — 3 | + 1.0047 | + 17 | 14 56.1 | + 2 27.8 |
| 17.5 | 188.75 | + 0.96033 | — 1197 | + 0.30093 | + 4145 | + 2.9988 | — 4 | + 1.0064 | + 19 | 17 23.9 | + 2 27.1 |
| 20.0 | 190.00 | + 0.94836 | — 1348 | + 0.34238 | + 4086 | + 2.9984 | — 4 | + 1.0083 | + 21 | 19 51.0 | + 2 26.4 |
| 22.5 | 191.25 | + 0.93488 | — 1494 | + 0.38324 | + 4019 | + 2.9980 | — 5 | + 1.0104 | + 23 | 22 17.4 | + 2 25.5 |
| 25.0 | 192.50 | + 0.91994 | — 1636 | + 0.42343 | + 3944 | + 2.9975 | — 6 | + 1.0127 | + 25 | 24 42.9 | + 2 24.6 |
| 27.5 | 193.75 | + 0.90358 | — 1775 | + 0.46287 | + 3865 | + 2.9969 | — 6 | + 1.0152 | + 27 | 27 7.5 | + 2 23.5 |
| 30.0 | 195.00 | + 0.88583 | — 1908 | + 0.50152 | + 3780 | + 2.9963 | — 6 | + 1.0179 | + 29 | 29 31.0 | + 2 22.5 |
| 32.5 | 196.25 | + 0.86675 | — 2037 | + 0.53932 | + 3688 | + 2.9957 | — 7 | + 1.0208 | + 31 | 31 53.5 | + 2 21.3 |
| 35.0 | 197.50 | + 0.84638 | — 2161 | + 0.57620 | + 3593 | + 2.9950 | — 7 | + 1.0239 | + 32 | 34 14.8 | + 2 20.1 |
| 37.5 | 198.75 | + 0.82477 | — 2280 | + 0.61213 | + 3493 | + 2.9943 | — 7 | + 1.0271 | + 34 | 36 34.9 | + 2 18.9 |
| 40.0 | 200.00 | + 0.80197 | — 2394 | + 0.64706 | + 3387 | + 2.9936 | — 8 | + 1.0305 | + 34 | 38 53.8 | + 2 17.7 |
| 42.5 | 201.25 | + 0.77803 | — 2502 | + 0.68093 | + 3276 | + 2.9928 | — 8 | + 1.0339 | + 36 | 41 11.5 | + 2 16.4 |
| 45.0 | 202.50 | + 0.75301 | — 2605 | + 0.71369 | + 3161 | + 2.9920 | — 9 | + 1.0375 | + 36 | 43 27.9 | + 2 14.9 |
| 47.5 | 203.75 | + 0.72696 | — 2703 | + 0.74530 | + 3044 | + 2.9911 | — 10 | + 1.0411 | + 37 | 45 42.8 | + 2 13.6 |
| 50.0 | 205.00 | + 0.69993 | — 2795 | + 0.77574 | + 2924 | + 2.9901 | — 10 | + 1.0448 | + 38 | 47 56.4 | + 2 12.3 |
| 52.5 | 206.25 | + 0.67198 | — 2881 | + 0.80498 | + 2800 | + 2.9891 | — 11 | + 1.0486 | + 38 | 50 8.7 | + 2 10.9 |
| 55.0 | 207.50 | + 0.64317 | — 2961 | + 0.83298 | + 2673 | + 2.9880 | — 11 | + 1.0524 | + 38 | 52 19.6 | + 2 9.5 |
| 57.5 | 208.75 | + 0.61356 | — 3034 | + 0.85971 | + 2545 | + 2.9869 | — 12 | + 1.0562 | + 38 | 54 29.1 | + 2 8.1 |
| 60.0 | 210.00 | + 0.58322 | — 3103 | + 0.88516 | + 2414 | + 2.9857 | — 12 | + 1.0600 | + 38 | 56 37.2 | + 2 6.6 |
| 62.5 | 211.25 | + 0.55219 | — 3166 | + 0.90930 | + 2280 | + 2.9845 | — 13 | + 1.0638 | + 38 | 58 43.8 | + 2 5.3 |
| 65.0 | 212.50 | + 0.52053 | — 3224 | + 0.93210 | + 2146 | + 2.9832 | — 14 | + 1.0676 | + 37 | 60 49.1 | + 2 4.0 |
| 67.5 | 213.75 | + 0.48829 | — 3274 | + 0.95356 | + 2011 | + 2.9818 | — 15 | + 1.0713 | + 37 | 62 53.1 | + 2 2.5 |
| 70.0 | 215.00 | + 0.45555 | — 3320 | + 0.97367 | + 1872 | + 2.9803 | — 16 | + 1.0750 | + 35 | 64 55.6 | + 2 1.1 |
| 72.5 | 216.25 | + 0.42235 | — 3362 | + 0.99239 | + 1734 | + 2.9787 | — 16 | + 1.0785 | + 35 | 66 56.7 | + 1 59.9 |
| 75.0 | 217.50 | + 0.38873 | — 3397 | + 1.00973 | + 1595 | + 2.9771 | — 17 | + 1.0820 | + 33 | 68 56.6 | + 1 58.6 |
| 77.5 | 218.75 | + 0.35476 | — 3426 | + 1.02568 | + 1456 | + 2.9754 | — 19 | + 1.0853 | + 32 | 70 55.2 | + 1 57.3 |
| 80.0 | 220.00 | + 0.32050 | — 3449 | + 1.04024 | + 1316 | + 2.9735 | — 20 | + 1.0885 | + 30 | 72 52.5 | + 1 56.1 |
| 82.5 | 221.25 | + 0.28601 | — 3469 | + 1.05340 | + 1177 | + 2.9715 | — 21 | + 1.0915 | + 29 | 74 48.6 | + 1 54.9 |
| 85.0 | 222.50 | + 0.25132 | — 3483 | + 1.06517 | + 1037 | + 2.9694 | — 23 | + 1.0944 | + 27 | 76 43.5 | + 1 53.6 |
| 87.5 | 223.75 | + 0.21649 | — 3492 | + 1.07554 | + 897 | + 2.9671 | — 24 | + 1.0971 | + 25 | 78 37.1 | + 1 52.6 |
| 90.0 | 225.00 | + 0.18157 | — 3496 | + 1.08451 | + 757 | + 2.9647 | — 26 | + 1.0996 | + 23 | 80 29.7 | + 1 51.5 |
| 92.5 | 226.25 | + 0.14661 | — 3495 | + 1.09208 | + 617 | + 2.9621 | — 27 | + 1.1019 | + 21 | 82 21.2 | + 1 50.5 |
| 95.0 | 227.50 | + 0.11166 | — 3490 | + 1.09825 | + 478 | + 2.9594 | — 28 | + 1.1040 | + 17 | 84 11.7 | + 1 49.4 |
| 97.5 | 228.75 | + 0.07676 | — 3479 | + 1.10303 | + 340 | + 2.9566 | — 30 | + 1.1057 | + 15 | 86 1.1 | + 1 48.5 |
| 100.0 | 230.00 | + 0.04197 | — 3464 | + 1.10643 | + 201 | + 2.9536 | — 32 | + 1.1072 | + 13 | 87 49.6 | + 1 47.6 |
| 102.5 | 231.25 | + 0.00733 | — 3445 | + 1.10844 | + 63 | + 2.9504 | — 35 | + 1.1085 | + 9 | 89 37.2 | + 1 46.8 |
| 105.0 | 232.50 | — 0.02712 | — 3422 | + 1.10907 | — 74 | + 2.9469 | — 37 | + 1.1094 | + 6 | 91 24.0 | + 1 46.0 |
| 107.5 | 233.75 | — 0.06134 | — 3393 | + 1.10833 | — 210 | + 2.9432 | — 40 | + 1.1100 | + 3 | 93 10.0 | + 1 45.3 |
| 110.0 | 235.00 | — 0.09527 | — 3360 | + 1.10623 | — 345 | + 2.9392 | — 43 | + 1.1103 | — 0 | 94 55.3 | + 1 44.6 |
| 112.5 | 236.25 | — 0.12887 | — 3324 | + 1.10278 | — 479 | + 2.9349 | — 45 | + 1.1103 | — 4 | 96 39.9 | + 1 44.0 |
| 115.0 | 237.50 | — 0.16211 | — 3282 | + 1.09799 | — 614 | + 2.9304 | — 48 | + 1.1099 | — 8 | 98 23.9 | + 1 43.4 |
| 117.5 | 238.75 | — 0.19493 | — 3237 | + 1.09185 | — 747 | + 2.9256 | — 51 | + 1.1091 | — 12 | 100 7.3 | + 1 43.0 |
| 120.0 | 240.00 | — 0.22730 | — 3187 | + 1.08438 | — 879 | + 2.9205 | — 54 | + 1.1079 | — 15 | 101 50.3 | + 1 42.5 |
| 122.5 | 241.25 | — 0.25917 | — 3133 | + 1.07559 | — 1011 | + 2.9151 | — 58 | + 1.1064 | — 20 | 103 32.8 | + 1 42.2 |
| 125.0 | 242.50 | — 0.29050 | — 3075 | + 1.06548 | — 1141 | + 2.9093 | — 62 | + 1.1044 | — 25 | 105 15.0 | + 1 42.0 |
| 127.5 | 243.75 | — 0.32125 | — 3013 | + 1.05407 | — 1270 | + 2.9031 | — 66 | + 1.1019 | — 29 | 106 57.0 | + 1 41.7 |
| 130.0 | 245.00 | — 0.35138 | — 2946 | + 1.04137 | — 1398 | + 2.8965 | — 70 | + 1.0990 | — 33 | 108 38.7 | + 1 41.6 |
| 132.5 | 246.25 | — 0.38084 | — 2875 | + 1.02739 | — 1526 | + 2.8895 | — 75 | + 1.0957 | — 38 | 110 20.3 | + 1 41.6 |
| 135.0 | 247.50 | — 0.40959 | — 2860 | + 1.01213 | — 1653 | + 2.8820 | — 80 | + 1.0919 | — 44 | 112 1.9 | + 1 41.7 |

| $v_0$ | $v_1$ | $x$ | Diff. | $y$ | Diff. | $\varrho$ | Diff. | $r$ | Diff. | $c$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ° | ° | | | | | | | | | ° ′ | ° ′ |
| 137.5 | 248.75 | −0.43759 | −2719 | +0.99560 | −1779 | +2.8740 | −84 | +1.0875 | −49 | 113 43.6 | +1 41.8 |
| 140.0 | 250.00 | −0.46478 | −2636 | +0.97781 | −1905 | +2.8656 | −90 | +1.0826 | −54 | 115 25.4 | +1 42.1 |
| 142.5 | 251.25 | −0.49114 | −2547 | +0.95876 | −2029 | +2.8566 | −95 | +1.0772 | −59 | 117 7.5 | +1 42.4 |
| 145.0 | 252.50 | −0.51661 | −2453 | +0.93847 | −2152 | +2.8471 | −101 | +1.0713 | −66 | 118 49.9 | +1 42.9 |
| 147.5 | 253.75 | −0.54114 | −2355 | +0.91695 | −2275 | +2.8370 | −106 | +1.0647 | −71 | 120 32.8 | +1 43.5 |
| 150.0 | 255.00 | −0.56469 | −2251 | +0.89420 | −2396 | +2.8264 | −113 | +1.0576 | −78 | 122 16.3 | +1 44.3 |
| 152.5 | 256.25 | −0.58720 | −2141 | +0.87024 | −2517 | +2.8151 | −119 | +1.0498 | −84 | 124 0.6 | +1 45.1 |
| 155.0 | 257.50 | −0.60861 | −2026 | +0.84507 | −2637 | +2.8032 | −127 | +1.0414 | −91 | 125 45.7 | +1 46.0 |
| 157.5 | 258.75 | −0.62887 | −1907 | +0.81870 | −2757 | +2.7905 | −134 | +1.0323 | −97 | 127 31.7 | +1 47.3 |
| 160.0 | 260.00 | −0.64794 | −1780 | +0.79113 | −2875 | +2.7771 | −143 | +1.0226 | −105 | 129 19.0 | +1 48.7 |
| 162.5 | 261.25 | −0.66574 | −1647 | +0.76238 | −2993 | +2.7628 | −151 | +1.0121 | −112 | 131 7.7 | +1 50.3 |
| 165.0 | 262.50 | −0.68221 | −1508 | +0.73245 | −3111 | +2.7477 | −159 | +1.0009 | −119 | 132 58.0 | +1 52.0 |
| 167.5 | 263.75 | −0.69729 | −1360 | +0.70134 | −3225 | +2.7318 | −168 | +0.9890 | −128 | 134 50.0 | +1 54.1 |
| 170.0 | 265.00 | −0.71089 | −1206 | +0.66909 | −3341 | +2.7150 | −178 | +0.9762 | −135 | 136 44.1 | +1 56.4 |
| 172.5 | 266.25 | −0.72295 | −1043 | +0.63568 | −3455 | +2.6972 | −188 | +0.9627 | −144 | 138 40.5 | +1 59.1 |
| 175.0 | 267.50 | −0.73338 | −871 | +0.60113 | −3566 | +2.6784 | −200 | +0.9483 | −153 | 140 39.6 | +2 2.0 |
| 177.5 | 268.75 | −0.74209 | −687 | +0.56547 | −3677 | +2.6584 | −211 | +0.9330 | −162 | 142 41.6 | +2 5.3 |
| 180.0 | 270.00 | −0.74896 | −495 | +0.52870 | −3787 | +2.6373 | −224 | +0.9168 | −172 | 144 46.9 | +2 9.1 |
| 182.5 | 271.25 | −0.75391 | −291 | +0.49083 | −3894 | +2.6149 | −236 | +0.8996 | −181 | 146 56.0 | +2 13.5 |
| 185.0 | 272.50 | −0.75682 | −74 | +0.45189 | −3999 | +2.5913 | 251 | +0.8815 | −191 | 149 9.5 | +2 18.5 |
| 187.5 | 273.75 | −0.75756 | +159 | +0.41190 | −4101 | +2.5662 | −265 | +0.8624 | −203 | 151 28.0 | +2 24.0 |
| 190.0 | 275.00 | −0.75597 | +407 | +0.37089 | −4198 | +2.5397 | −280 | +0.8421 | −214 | 153 52.0 | +2 30.4 |
| 192.5 | 276.25 | −0.75190 | +673 | +0.32891 | −4293 | +2.5117 | −297 | +0.8207 | −225 | 156 22.4 | +2 37.8 |
| 195.0 | 277.50 | −0.74517 | +958 | +0.28598 | −4380 | +2.4820 | −316 | +0.7982 | −238 | 159 0.2 | +2 46.4 |
| 197.5 | 278.75 | −0.73559 | +1266 | +0.24218 | −4459 | +2.4504 | −334 | +0.7744 | −250 | 161 46.6 | +2 56.2 |
| 200.0 | 280.00 | −0.72293 | +1599 | +0.19759 | −4531 | +2.4170 | −355 | +0.7494 | −263 | 164 42.8 | +3 7.8 |
| 202.5 | 281.25 | −0.70694 | +1961 | +0.15228 | −4590 | +2.3815 | −376 | +0.7231 | −276 | 167 50.6 | +3 21.5 |
| 205.0 | 282.50 | −0.68733 | +2356 | +0.10638 | −4634 | +2.3439 | −400 | +0.6955 | −290 | 171 12.1 | +3 37.8 |
| 207.5 | 283.75 | −0.66377 | +2788 | +0.06004 | −4656 | +2.3039 | −424 | +0.6665 | −305 | 174 49.9 | +3 57.2 |
| 210.0 | 285.00 | −0.63589 | +3267 | +0.01348 | −4650 | +2.2615 | −450 | +0.6360 | −319 | 178 47.1 | +4 20.9 |
| 212.5 | 286.25 | −0.60322 | +3798 | −0.03302 | −4609 | +2.2165 | −477 | +0.6041 | −334 | 183 8.0 | +4 50.0 |
| 215.0 | 287.50 | −0.56524 | +4383 | −0.07911 | −4513 | +2.1688 | −505 | +0.5707 | −347 | 187 58.0 | +5 26.1 |
| 217.5 | 288.75 | −0.52141 | +5035 | −0.12424 | −4350 | +2.1183 | −534 | +0.5360 | −360 | 193 24.1 | +6 11.9 |
| 220.0 | 290.00 | −0.47106 | +5761 | −0.16774 | −4081 | +2.0649 | −559 | +0.5000 | −369 | 199 36.0 | +7 10.0 |
| 222.5 | 291.25 | −0.41345 | +6562 | −0.20855 | −3672 | +2.0090 | −579 | +0.4631 | −375 | 206 46.0 | +8 25.4 |
| 225.0 | 292.50 | −0.34783 | +7429 | −0.24527 | −3055 | +1.9511 | −586 | +0.4256 | 371 | 215 11.4 | +10 2.9 |
| 227.5 | 293.75 | −0.27354 | +8318 | −0.27582 | −2151 | +1.8925 | −572 | +0 3885 | −355 | 225 14.3 | +12 8.0 |
| 230.0 | 295.00 | −0.19036 | +9138 | −0.29733 | −863 | +1.8353 | −522 | +0.3530 | −314 | 237 22.3 | +14 42.1 |
| 232.5 | 296.25 | −0.09898 | +9690 | −0.30596 | +875 | +1.7831 | −405 | +0.3216 | −244 | 252 4.4 | +17 31.6 |
| 235.0 | 297.50 | −0.00208 | +9695 | −0.29721 | +2992 | +1.7426 | −221 | +0.2972 | −136 | 269 36.0 | +19 56.5 |
| 237.5 | 298.75 | +0.09487 | +8917 | −0.26729 | +5168 | +1.7205 | +19 | +0.2836 | −1 | 289 32.5 | +20 56.5 |
| 240.0 | 300.00 | +0.18404 | +7420 | −0.21561 | +6932 | +1.7224 | +246 | +0.2835 | +133 | 310 29.0 | +19 59.1 |
| 242.5 | 301.25 | +0.25824 | +5579 | −0.14629 | +7985 | +1.7470 | +429 | +0.2968 | +242 | 330 28.1 | +17 35.1 |
| 245.0 | 302.50 | +0.31403 | +3789 | −0.06644 | +8373 | +1.7899 | +540 | +0.3210 | +313 | 348 3.2 | +14 45.6 |
| 247.5 | 303.75 | +0.35192 | +2255 | +0.01729 | +8303 | +1.8439 | +587 | +0 3523 | +354 | 362 48.8 | +12 11.0 |
| 250.0 | 305.00 | +0.37447 | +1022 | +0.10032 | +7976 | +1.9026 | +598 | +0.3877 | +371 | 374 59.8 | +10 5.3 |
| 252.5 | 306.25 | +0.38469 | +54 | +0.18008 | +7528 | +1.9624 | +589 | +0.4248 | +374 | 385 5.1 | +8 27.3 |
| 255.0 | 307.50 | +0.38523 | −702 | +0.25536 | +7035 | +2.0213 | +567 | +0.4622 | +369 | 393 32.4 | +7 11.7 |
| 257.5 | 308.75 | +0.37821 | −1297 | +0.32571 | +6535 | +2.0780 | +540 | +0.4991 | +360 | 400 44.1 | +6 13.2 |
| 260.0 | 310.00 | +0.36524 | −1764 | +0.39106 | +6049 | +2.1320 | +511 | +0.5351 | +347 | 406 57.3 | +5 27.4 |
| 262.5 | 311.25 | +0 34760 | −2137 | +0.45155 | +5584 | +2.1831 | +482 | +0.5698 | +334 | 412 24.7 | +4 50.9 |
| 265.0 | 312.50 | +0.32623 | −2436 | +0.50739 | +5145 | +2.2313 | +454 | +0 6032 | +320 | 417 15.6 | +4 21.8 |
| 267.5 | 313.75 | +0.30187 | −2676 | +0.55884 | +4731 | +2.2767 | +427 | +0.6352 | +305 | 421 37.4 | +3 57.9 |
| 270.0 | 315.00 | +0.27511 | −2871 | +0.60615 | +4343 | +2.3194 | +402 | +0.6657 | +290 | 425 35.3 | +3 38.3 |
| 272.5 | 316.25 | +0.24640 | −3029 | +0.64958 | +3977 | +2.3596 | +378 | +0.6947 | +277 | 429 13.6 | +3 22.0 |

| $v_0$ | $v_1$ | $x$ | Diff. | $y$ | Diff. | $\varrho$ | Diff. | $r$ | Diff. | $v$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ° | ° | | | | | | | | | ° ′ | ° ′ |
| 275.0 | 317.50 | + 0.21611 | — 3156 | + 0.68935 | + 3633 | + 2.3974 | + 356 | + 0.7224 | + 264 | 432 35.6 | + 3 8.3 |
| 277.5 | 318.75 | + 0.18455 | — 3259 | + 0.72568 | + 3308 | + 2.4330 | + 336 | + 0.7488 | + 250 | 435 43.9 | + 2 56.6 |
| 280.0 | 320.00 | + 0.15196 | — 3340 | + 0.75876 | + 3000 | + 2.4666 | + 316 | + 0.7738 | + 238 | 438 40.5 | + 2 46.6 |
| 282.5 | 321.25 | + 0.11856 | — 3404 | + 0.78876 | + 2710 | + 2.4982 | + 299 | + 0.7976 | + 226 | 441 27.1 | + 2 38.0 |
| 285.0 | 322.50 | + 0.08452 | — 3453 | + 0.81586 | + 2433 | + 2.5281 | + 282 | + 0.8202 | + 215 | 444 5.1 | + 2 30.6 |
| 287.5 | 323.75 | + 0.04999 | — 3491 | + 0.84019 | + 2170 | + 2.5563 | + 266 | + 0.8417 | + 203 | 446 35.7 | + 2 24.1 |
| 290.0 | 325.00 | + 0.01508 | — 3515 | + 0.86189 | + 1918 | + 2.5829 | + 251 | + 0.8620 | + 193 | 448 59.8 | + 2 18.5 |
| 292.5 | 326.25 | — 0.02007 | — 3531 | + 0.88107 | + 1679 | + 2.6080 | + 237 | + 0.8813 | + 183 | 451 18.3 | + 2 13.5 |
| 295.0 | 327.50 | — 0.05538 | — 3539 | + 0.89786 | + 1449 | + 2.6317 | + 224 | + 0.8996 | + 173 | 453 31.8 | + 2 9.1 |
| 297.5 | 328.75 | — 0.09077 | — 3538 | + 0.91235 | + 1228 | + 2.6541 | + 212 | + 0.9169 | + 163 | 455 40.9 | + 2 5.2 |
| 300.0 | 330.00 | — 0.12615 | — 3532 | + 0.92463 | + 1017 | + 2.6753 | + 200 | + 0.9332 | + 154 | 457 46.1 | + 2 1.8 |
| 302.5 | 331.25 | — 0.16147 | — 3519 | + 0.93480 | + 812 | + 2.6953 | + 190 | + 0.9486 | + 146 | 459 47.9 | + 1 58.9 |
| 305.0 | 332.50 | — 0.19666 | — 3501 | + 0.94292 | + 615 | + 2.7143 | + 179 | + 0.9632 | + 137 | 461 46.8 | + 1 56.3 |
| 307.5 | 333.75 | — 0.23167 | — 3477 | + 0.94907 | + 425 | + 2.7322 | + 169 | + 0.9769 | + 129 | 463 43.1 | + 1 53.8 |
| 310.0 | 335.00 | — 0.26644 | — 3448 | + 0.95332 | + 241 | + 2.7491 | + 159 | + 0.9898 | + 121 | 465 36.9 | + 1 51.7 |
| 312.5 | 336.25 | — 0.30092 | — 3415 | + 0.95573 | + 63 | + 2.7650 | + 151 | + 1.0019 | + 114 | 467 28.6 | + 1 49.9 |
| 315.0 | 337.50 | — 0.33507 | — 3379 | + 0.95636 | — 108 | + 2.7801 | + 142 | + 1.0133 | + 107 | 469 18.5 | + 1 48.3 |
| 317.5 | 338.75 | — 0.36886 | — 3339 | + 0.95528 | — 274 | + 2.7943 | + 135 | + 1.0240 | + 100 | 471 6.8 | + 1 46.9 |
| 320.0 | 340.00 | — 0.40225 | — 3296 | + 0.95254 | — 437 | + 2.8078 | + 128 | + 1.0340 | + 93 | 472 53.7 | + 1 45.6 |
| 322.5 | 341.25 | — 0.43521 | — 3248 | + 0.94817 | — 594 | + 2.8206 | + 120 | + 1.0433 | + 86 | 474 39.3 | + 1 44.6 |
| 325.0 | 342.50 | — 0.46769 | — 3196 | + 0.94223 | — 746 | + 2.8326 | + 114 | + 1.0519 | + 80 | 476 23.9 | + 1 43.6 |
| 327.5 | 343.75 | — 0.49965 | — 3141 | + 0.93477 | — 895 | + 2.8440 | + 108 | + 1.0599 | + 74 | 478 7.5 | + 1 42.8 |
| 330.0 | 345.00 | — 0.53106 | — 3085 | + 0.92582 | — 1040 | + 2.8548 | + 101 | + 1.0673 | + 68 | 479 50.3 | + 1 42.3 |
| 332.5 | 346.25 | — 0.56191 | — 3025 | + 0.91542 | — 1181 | + 2.8649 | + 95 | + 1.0741 | + 63 | 481 32.6 | + 1 41.7 |
| 335.0 | 347.50 | — 0.59216 | — 2962 | + 0.90361 | — 1317 | + 2.8744 | + 90 | + 1.0804 | + 57 | 483 14.3 | + 1 41.3 |
| 337.5 | 348.75 | — 0.62178 | — 2895 | + 0.89044 | — 1451 | + 2.8834 | + 85 | + 1.0861 | + 51 | 484 55.6 | + 1 40.9 |
| 340.0 | 350.00 | — 0.65073 | — 2826 | + 0.87593 | — 1581 | + 2.8919 | + 79 | + 1.0912 | + 46 | 486 36.5 | + 1 40.8 |
| 342.5 | 351.25 | — 0.67899 | — 2753 | + 0.86012 | — 1707 | + 2.8998 | + 74 | + 1.0958 | + 42 | 488 17.3 | + 1 40.6 |
| 345.0 | 352.50 | — 0.70652 | — 2679 | + 0.84305 | — 1830 | + 2.9072 | + 71 | + 1.1000 | + 36 | 489 57.9 | + 1 40.6 |
| 347.5 | 353.75 | — 0.73331 | — 2602 | + 0.82475 | — 1950 | + 2.9143 | + 66 | + 1.1036 | + 32 | 491 38.5 | + 1 40.6 |
| 350.0 | 355.00 | — 0.75933 | — 2521 | + 0.80525 | — 2067 | + 2.9209 | + 62 | + 1.1068 | + 27 | 493 19.1 | + 1 40.8 |
| 352.5 | 356.25 | — 0.78454 | — 2438 | + 0.78458 | — 2181 | + 2.9271 | + 58 | + 1.1095 | + 23 | 494 59.9 | + 1 41.0 |
| 355.0 | 357.50 | — 0.80892 | — 2352 | + 0.76277 | — 2290 | + 2.9329 | + 55 | + 1.1118 | + 19 | 496 40.9 | + 1 41.3 |
| 357.5 | 358.75 | — 0.83244 | — 2264 | + 0.73987 | — 2397 | + 2.9384 | + 51 | + 1.1137 | + 15 | 498 22.2 | + 1 41.6 |
| 360.0 | 360.00 | — 0.85508 | — 2173 | + 0.71590 | — 2501 | + 2.9435 | + 48 | + 1.1152 | + 11 | 500 3.8 | + 1 42.0 |
| 362.5 | 361.25 | — 0.87681 | — 2078 | + 0.69089 | — 2601 | + 2.9483 | + 45 | + 1.1163 | + 7 | 501 45.8 | + 1 42.5 |
| 365.0 | 362.50 | — 0.89759 | — 1981 | + 0.66488 | — 2699 | + 2.9528 | + 42 | + 1.1170 | + 4 | 503 28.3 | + 1 43.0 |
| 367.5 | 363.75 | — 0.91740 | — 1882 | + 0.63789 | — 2793 | + 2.9570 | + 39 | + 1.1174 | — 0 | 505 11.3 | + 1 43.6 |
| 370.0 | 365.00 | — 0.93622 | — 1781 | + 0.60996 | — 2884 | + 2.9609 | + 36 | + 1.1174 | — 3 | 506 54.9 | + 1 44.3 |
| 372.5 | 366.25 | — 0.95403 | — 1677 | + 0.58112 | — 2971 | + 2.9645 | + 34 | + 1.1171 | — 6 | 508 39.2 | + 1 45.0 |
| 375.0 | 367.50 | — 0.97080 | — 1570 | + 0.55141 | — 3055 | + 2.9679 | + 32 | + 1.1165 | — 9 | 510 24.2 | + 1 45.8 |
| 377.5 | 368.75 | — 0.98650 | — 1461 | + 0.52086 | — 3136 | + 2.9711 | + 30 | + 1.1156 | — 12 | 512 10.0 | + 1 46.6 |
| 380.0 | 370.00 | — 1.00111 | — 1348 | + 0.48950 | — 3213 | + 2.9741 | + 28 | + 1.1144 | — 15 | 513 56.6 | + 1 47.5 |
| 382.5 | 371.25 | — 1.01459 | — 1233 | + 0.45737 | — 3285 | + 2.9769 | + 26 | + 1.1129 | — 17 | 515 44.1 | + 1 48.3 |
| 385.0 | 372.50 | — 1.02692 | — 1116 | + 0.42452 | — 3355 | + 2.9795 | + 24 | + 1.1112 | — 19 | 517 32.4 | + 1 49.3 |
| 387.5 | 373.75 | — 1.03808 | — 995 | + 0.39097 | — 3420 | + 2.9819 | + 23 | + 1.1093 | — 22 | 519 21.7 | + 1 50.3 |
| 390.0 | 375.00 | — 1.04803 | — 874 | + 0.35677 | — 3481 | + 2.9842 | + 21 | + 1.1071 | — 24 | 521 12.0 | + 1 51.3 |
| 392.5 | 376.25 | — 1.05677 | — 749 | + 0.32196 | — 3538 | + 2.9863 | + 20 | + 1.1047 | — 25 | 523 3.3 | + 1 52.4 |
| 395.0 | 377.50 | — 1.06426 | — 623 | + 0.28658 | — 3592 | + 2.9883 | + 19 | + 1.1022 | — 27 | 524 55.7 | + 1 53.6 |
| 397.5 | 378.75 | — 1.07049 | — 493 | + 0.25066 | — 3641 | + 2.9902 | + 17 | + 1.0995 | — 29 | 526 49.3 | + 1 54.7 |
| 400.0 | 380.00 | — 1.07542 | — 361 | + 0.21425 | — 3685 | + 2.9919 | + 16 | + 1.0966 | — 30 | 528 44.0 | + 1 55.8 |
| 402.5 | 381.25 | — 1.07903 | — 228 | + 0.17740 | — 3724 | + 2.9935 | + 15 | + 1.0936 | — 32 | 530 39.8 | + 1 57.0 |
| 405.0 | 382.50 | — 1.08131 | — 94 | + 0.14016 | — 3759 | + 2.9950 | + 14 | + 1.0904 | — 33 | 532 36.8 | + 1 58.3 |
| 407.5 | 383.75 | — 1.08225 | + 44 | + 0.10257 | — 3789 | + 2.9964 | + 14 | + 1.0871 | — 34 | 534 35.1 | + 1 59.6 |
| 410.0 | 385.00 | — 1.08181 | + 184 | + 0.06468 | — 3812 | + 2.9978 | + 13 | + 1.0837 | — 34 | 536 34.7 | + 2 0.8 |

| $v_0$ | $v_1$ | $x$ | Diff. | $y$ | Diff. | $\varrho$ | Diff. | $r$ | Diff. | $v$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ° | ° | | | | | | | | | ° ′ | ° ′ |
| 412.5 | 386.25 | −1.07997 | +325 | +0.02656 | −3831 | +2.9991 | +12 | +1.0803 | −35 | 538 35.5 | +2 2.0 |
| 415.0 | 387.50 | −1.07672 | +467 | −0.01175 | −3845 | +3.0003 | +11 | +1.0768 | −36 | 540 37.5 | +2 3.4 |
| 417.5 | 388.75 | −1.07205 | +610 | −0.05020 | −3854 | +3.0014 | +10 | +1.0732 | −36 | 542 40.9 | +2 4.6 |
| 420.0 | 390.00 | −1.06595 | +753 | −0.08874 | −3857 | +3.0024 | +10 | +1.0696 | −36 | 544 45.5 | +2 6.0 |
| 422.5 | 391.25 | −1.05842 | +898 | −0.12731 | −3853 | +3.0034 | +10 | +1.0660 | −35 | 546 51.5 | +2 7.3 |
| 425.0 | 392.50 | −1.04944 | +1044 | −0.16584 | −3844 | +3.0044 | +9 | +1.0625 | −36 | 548 58.8 | +2 8.6 |
| 427.5 | 393.75 | −1.03900 | +1190 | −0.20428 | −3829 | +3.0053 | +8 | +1.0589 | −35 | 551 7.4 | +2 9.9 |
| 430.0 | 395.00 | −1.02710 | +1337 | −0.24257 | −3807 | +3.0061 | +7 | +1.0554 | −35 | 553 17.3 | +2 11.2 |
| 432.5 | 396.25 | −1.01373 | +1482 | −0.28064 | −3778 | +3.0068 | +7 | +1.0519 | −35 | 555 28.5 | +2 12.3 |
| 435.0 | 397.50 | −0.99891 | +1627 | −0.31842 | −3743 | +3.0075 | +6 | +1.0484 | −33 | 557 40.8 | +2 13.6 |
| 437.5 | 398.75 | −0.98264 | +1772 | −0.35585 | −3703 | +3.0081 | +6 | +1.0451 | −33 | 559 54.4 | +2 14.8 |
| 440.0 | 400.00 | −0.96492 | +1916 | −0.39288 | −3655 | +3.0087 | +6 | +1.0418 | −31 | 562 9.2 | +2 16.0 |
| 442.5 | 401.25 | −0.94576 | +2058 | −0.42943 | −3600 | +3.0093 | +5 | +1.0387 | −30 | 564 25.2 | +2 17.1 |
| 445.0 | 402.50 | −0.92518 | +2198 | −0.46543 | −3540 | +3.0098 | +5 | +1.0357 | −29 | 566 42.3 | +2 18.2 |
| 447.5 | 403.75 | −0.90320 | +2336 | −0.50083 | −3473 | +3.0103 | +4 | +1.0328 | −28 | 569 0.5 | +2 19.2 |
| 450.0 | 405.00 | −0.87984 | +2471 | −0.53556 | −3400 | +3.0107 | +4 | +1.0300 | −26 | 571 19.7 | +2 20.2 |
| 452.5 | 406.25 | −0.85513 | +2603 | −0.56956 | −3320 | +3.0111 | +4 | +1.0274 | −24 | 573 39.9 | +2 21.1 |
| 455.0 | 407.50 | −0.82910 | +2733 | −0.60276 | −3233 | +3.0115 | +3 | +1.0250 | −22 | 576 1.0 | +2 22.0 |
| 457.5 | 408.75 | −0.80177 | +2859 | −0.63509 | −3141 | +3.0118 | +3 | +1.0228 | −20 | 578 23.0 | +2 22.7 |
| 460.0 | 410.00 | −0.77318 | +2981 | −0.66650 | −3043 | +3.0121 | +2 | +1.0208 | −18 | 580 45.7 | +2 23.5 |
| 462.5 | 411.25 | −0.74337 | +3199 | −0.69693 | −2938 | +3.0123 | +2 | +1.0190 | −16 | 583 9.2 | +2 24.1 |
| 465.0 | 412.50 | −0.71238 | +3212 | −0.72631 | −2827 | +3.0125 | +1 | +1.0174 | −15 | 585 33.3 | +2 24.7 |
| 467.5 | 413.75 | −0.68026 | +3321 | −0.75460 | −2714 | +3.0126 | +1 | +1.0159 | −11 | 587 58.0 | +2 25.1 |
| 470.0 | 415.00 | −0.64705 | +3424 | −0.78174 | −2593 | +3.0127 | −0 | +1.0148 | −10 | 590 23.1 | +2 25.5 |
| 472.5 | 416.25 | −0.61281 | +3521 | −0.80767 | −2468 | +3.0127 | −1 | +1.0138 | −7 | 592 48.6 | +2 25.9 |
| 475.0 | 417.50 | −0.57760 | +3613 | −0.83235 | −2339 | +3.0126 | −1 | +1.0131 | −4 | 595 14.5 | +2 26.1 |
| 477.5 | 418.75 | −0.54147 | +3699 | −0.85574 | −2205 | +3.0125 | −1 | +1.0127 | −3 | 597 40.6 | +2 26.2 |
| 480.0 | 420.00 | −0.50448 | +3778 | −0.87779 | −2066 | +3.0124 | −1 | +1.0124 | −0 | 600 6.8 | +2 26.2 |
| 482.5 | 421.25 | −0.46670 | +3850 | −0.89845 | −1925 | +3.0123 | −2 | +1.0124 | +3 | 602 33.0 | +2 26.2 |
| 485.0 | 422.50 | −0.42820 | +3916 | −0.91770 | −1780 | +3.0121 | −3 | +1.0127 | +5 | 604 59.2 | +2 26.0 |
| 487.5 | 423.75 | −0.38904 | +3975 | −0.93550 | −1632 | +3.0118 | −3 | +1.0132 | +7 | 607 25.2 | +2 25.7 |
| 490.0 | 425.00 | −0.34929 | +4028 | −0.95182 | −1482 | +3.0115 | −4 | +1.0139 | +9 | 609 50.9 | +2 25.4 |
| 492.5 | 426.25 | −0.30901 | +4072 | −0.96664 | −1330 | +3.0111 | −4 | +1.0148 | +12 | 612 16.3 | +2 25.0 |
| 495.0 | 427.50 | −0.26829 | +4110 | −0.97994 | −1177 | +3.0107 | −5 | +1.0160 | +14 | 614 41.3 | +2 24.5 |
| 497.5 | 428.75 | −0.22719 | +4141 | −0.99171 | −1023 | +3.0102 | −5 | +1.0174 | +16 | 617 5.8 | +2 23.9 |
| 500.0 | 430.00 | −0.18578 | +4163 | −1.00194 | −867 | +3.0097 | −5 | +1.0190 | +18 | 619 29.7 | +2 23.2 |
| 502.5 | 431.25 | −0.14415 | +4179 | −1.01061 | −711 | +3.0092 | −6 | +1.0208 | +21 | 621 52.9 | +2 22.5 |
| 505.0 | 432.50 | −0.10236 | +4188 | −1.01772 | −555 | +3.0086 | −6 | +1.0229 | +22 | 624 15.4 | +2 21.6 |
| 507.5 | 433.75 | −0.06048 | +4189 | −1.02327 | −400 | +3.0080 | −7 | +1.0251 | +24 | 626 37.0 | +2 20.8 |
| 510.0 | 435.00 | −0.01859 | +4185 | −1.02727 | −245 | +3.0073 | −7 | +1.0275 | +25 | 628 57.8 | +2 19.8 |
| 512.5 | 436.25 | +0.02326 | +4172 | −1.02972 | −91 | +3.0066 | −8 | +1.0300 | +27 | 631 17.6 | +2 18.8 |
| 515.0 | 437.50 | +0.06498 | +4153 | −1.03063 | +62 | +3.0058 | −8 | +1.0327 | +28 | 633 36.4 | +2 17.8 |
| 517.5 | 438.75 | +0.10651 | +4127 | −1.03001 | +213 | +3.0050 | −9 | +1.0355 | +29 | 635 54.2 | +2 16.7 |
| 520.0 | 440.00 | +0.14778 | +4095 | −1.02788 | +362 | +3.0041 | −9 | +1.0384 | +31 | 638 10.9 | +2 15.5 |
| 522.5 | 441.25 | +0.18873 | +4056 | −1.02426 | +508 | +3.0032 | −9 | +1.0415 | +32 | 640 26.4 | +2 14.3 |
| 525.0 | 442.50 | +0.22929 | +4012 | −1.01918 | +653 | +3.0023 | −10 | +1.0447 | +32 | 642 40.7 | +2 13.1 |
| 527.5 | 443.75 | +0.26941 | +3963 | −1.01265 | +795 | +3.0013 | −11 | +1.0479 | +33 | 644 53.8 | +2 12.0 |
| 530.0 | 445.00 | +0.30904 | +3907 | −1.00470 | +934 | +3.0002 | −12 | +1.0512 | +33 | 647 5.8 | +2 10.8 |
| 532.5 | 446.25 | +0.34811 | +3846 | −0.99536 | +1069 | +2.9990 | −12 | +1.0545 | +33 | 649 16.6 | +2 9.5 |
| 535.0 | 447.50 | +0.38657 | +3779 | −0.98467 | +1200 | +2.9978 | −13 | +1.0578 | +34 | 651 26.1 | +2 8.2 |
| 537.5 | 448.75 | +0.42436 | +3707 | −0.97267 | +1329 | +2.9965 | −13 | +1.0612 | +34 | 653 34.3 | +2 6.9 |
| 540.0 | 450.00 | +0.46143 | +3630 | −0.95938 | +1454 | +2.9952 | −14 | +1.0646 | +33 | 655 41.2 | +2 5.6 |
| 542.5 | 451.25 | +0.49773 | +3551 | −0.94484 | +1575 | +2.9938 | −15 | +1.0679 | +33 | 657 46.8 | +2 4.4 |
| 545.0 | 452.50 | +0.53324 | +3465 | −0.92909 | +1693 | +2.9923 | −17 | +1.0712 | +33 | 659 51.2 | +2 3.1 |
| 547.5 | 453.75 | +0.56789 | +3375 | −0.91216 | +1806 | +2.9906 | −17 | +1.0745 | +32 | 661 54.3 | +2 1.9 |

| $v_0$ | $v_1$ | $x$ | Diff. | $y$ | Diff. | $\varrho$ | Diff. | $r$ | Diff. | $v$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ° | ° | | | | | | | | | ° ′ | ° ′ |
| 550.0 | 455.00 | +0.60164 | +3283 | −0.89410 | +1915 | +2.9889 | −17 | +1.0777 | +31 | 663 56.2 | +2 0.6 |
| 552.5 | 456.25 | +0.63447 | +3186 | −0.87495 | +2020 | +2.9872 | −18 | +1.0808 | +30 | 665 56.8 | +1 59.5 |
| 555.0 | 457.50 | +0.66633 | +3087 | −0.85475 | +2121 | +2.9854 | −20 | +1.0838 | +28 | 667 56.3 | +1 58.3 |
| 557.5 | 458.75 | +0.69720 | +2984 | −0.83354 | +2219 | +2.9834 | −21 | +1.0866 | +28 | 669 54.6 | +1 57.2 |
| 560.0 | 460.00 | +0.72704 | +2877 | −0.81135 | +2312 | +2.9813 | −23 | +1.0894 | +26 | 671 51.8 | +1 56.0 |
| 562.5 | 461.25 | +0.75581 | +2768 | −0.78823 | +2400 | +2.9790 | −24 | +1.0920 | +25 | 673 47.8 | +1 55.0 |
| 565.0 | 462.50 | +0.78349 | +2656 | −0.76423 | +2485 | +2.9766 | −25 | +1.0945 | +23 | 675 42.8 | +1 53.9 |
| 567.5 | 463.75 | +0.81005 | +2541 | −0.73938 | +2565 | +2.9741 | −26 | +1.0968 | +20 | 677 36.7 | +1 52.9 |
| 570.0 | 465.00 | +0.83546 | +2424 | −0.71373 | +2640 | +2.9715 | −28 | +1.0988 | +19 | 679 29.6 | +1 51.9 |
| 572.5 | 466.25 | +0.85970 | +2304 | −0.68733 | +2712 | +2.9687 | −30 | +1.1007 | +16 | 681 21.5 | +1 50.9 |
| 575.0 | 467.50 | +0.88274 | +2182 | −0.66021 | +2779 | +2.9657 | −32 | +1.1023 | +14 | 683 12.4 | +1 50.0 |
| 577.5 | 468.75 | +0.90456 | +2058 | −0.63242 | +2841 | +2.9625 | −34 | +1.1037 | +12 | 685 2.4 | +1 49.2 |
| 580.0 | 470.00 | +0.92514 | +1932 | −0.60401 | +2900 | +2.9591 | −35 | +1.1049 | +8 | 686 51.6 | +1 48.3 |
| 582.5 | 471.25 | +0.94446 | +1804 | −0.57501 | +2954 | +2.9556 | −38 | +1.1057 | +6 | 688 39.9 | +1 47.6 |
| 585.0 | 472.50 | +0.96250 | +1675 | −0.54547 | +3005 | +2.9518 | −41 | +1.1063 | +3 | 690 27.5 | +1 46.9 |
| 587.5 | 473.75 | +0.97925 | +1544 | −0.51542 | +3052 | +2.9477 | −43 | +1.1066 | −0 | 692 14.4 | +1 46.3 |
| 590.0 | 475.00 | +0.99469 | +1410 | −0.48490 | +3094 | +2.9434 | −45 | +1.1066 | −4 | 694 0.7 | +1 45.6 |
| 592.5 | 476.25 | +1.00879 | +1275 | −0.45396 | +3131 | +2.9389 | −48 | +1.1062 | −7 | 695 46.3 | +1 45.1 |
| 595.0 | 477.50 | +1.02154 | +1138 | −0.42265 | +3165 | +2.9341 | −52 | +1.1055 | −10 | 697 31.4 | +1 44.6 |
| 597.5 | 478.75 | +1.03292 | +999 | −0.39100 | +3195 | +2.9289 | −55 | +1.1045 | −15 | 699 16.0 | +1 44.1 |
| 600.0 | 480.00 | +1.04291 | +860 | −0.35905 | +3221 | +2.9234 | −58 | +1.1030 | −19 | 701 0.1 | +1 43.8 |
| 602.5 | 481.25 | +1.05151 | +719 | −0.32684 | +3242 | +2.9176 | −62 | +1.1011 | −22 | 702 43.9 | +1 43.6 |
| 605.0 | 482.50 | +1.05870 | +576 | −0.29442 | +3260 | +2.9114 | −66 | +1.0989 | −27 | 704 27.5 | +1 43.4 |
| 607.5 | 483.75 | +1.06446 | +431 | −0.26182 | +3274 | +2.9048 | −70 | +1.0962 | −32 | 706 10.9 | +1 43.2 |
| 610.0 | 485.00 | +1.06877 | +285 | −0.22908 | +3282 | +2.8978 | −73 | +1.0930 | −36 | 707 54.1 | +1 43.2 |
| 612.5 | 486.25 | +1.07162 | +139 | −0.19626 | +3286 | +2.8905 | −78 | +1.0894 | −40 | 709 37.3 | +1 43.2 |
| 615.0 | 487.50 | +1.07301 | −10 | −0.16340 | +3286 | +2.8827 | −83 | +1.0854 | −46 | 711 20.5 | +1 43.3 |
| 617.5 | 488.75 | +1.07291 | −161 | −0.13054 | +3283 | +2.8744 | −89 | +1.0808 | −51 | 713 3.8 | +1 43.5 |
| 620.0 | 490.00 | +1.07130 | −314 | −0.09771 | +3274 | +2.8655 | −94 | +1.0757 | −56 | 714 47.3 | +1 43.8 |
| 622.5 | 491.25 | +1.06816 | −468 | −0.06497 | +3261 | +2.8561 | −99 | +1.0701 | −61 | 716 31.1 | +1 44.3 |
| 625.0 | 492.50 | +1.06348 | −622 | −0.03236 | +3243 | +2.8462 | −104 | +1.0640 | −67 | 718 15.4 | +1 44.8 |
| 627.5 | 493.75 | +1.05726 | −780 | +0.00007 | +3220 | +2.8358 | −110 | +1.0573 | −73 | 720 0.2 | +1 45.5 |
| 630.0 | 495.00 | +1.04946 | −940 | +0.03227 | +3193 | +2.8248 | −117 | +1.0500 | −80 | 721 45.7 | +1 46.2 |
| 632.5 | 496.25 | +1.04006 | −1103 | +0.06420 | +3160 | +2.8131 | −124 | +1.0420 | −85 | 723 31.9 | +1 47.2 |
| 635.0 | 497.50 | +1.02903 | −1268 | +0.09580 | +3122 | +2.8007 | −131 | +1.0335 | −92 | 725 19.1 | +1 48.3 |
| 637.5 | 498.75 | +1.01635 | −1435 | +0.12702 | +3078 | +2.7876 | −139 | +1.0243 | −99 | 727 7.4 | +1 49.6 |
| 640.0 | 500.00 | +1.00200 | −1603 | +0.15780 | +3028 | +2.7737 | −147 | +1.0144 | −107 | 728 57.0 | +1 51.0 |
| 642.5 | 501.25 | +0.98597 | −1774 | +0.18808 | +2972 | +2.7590 | −155 | +1.0037 | −113 | 730 48.0 | +1 52.6 |
| 645.0 | 502.50 | +0.96823 | −1948 | +0.21780 | +2911 | +2.7435 | −164 | +0.9924 | −120 | 732 40.6 | +1 54.6 |
| 647.5 | 503.75 | +0.94875 | −2127 | +0.24691 | +2842 | +2.7271 | −173 | +0.9804 | −129 | 734 35.2 | +1 56.8 |
| 650.0 | 505.00 | +0.92748 | −2307 | +0.27533 | +2764 | +2.7098 | −183 | +0.9675 | −137 | 736 32.0 | +1 59.2 |
| 652.5 | 506.25 | +0.90441 | −2490 | +0.30297 | +2678 | +2.6915 | −193 | +0.9538 | −145 | 738 31.2 | +2 1.9 |
| 655.0 | 507.50 | +0.87951 | −2678 | +0.32975 | +2584 | +2.6722 | −204 | +0.9393 | −154 | 740 33.1 | +2 5.1 |
| 657.5 | 508.75 | +0.85273 | −2868 | +0.35559 | +2480 | +2.6518 | −216 | +0.9239 | −163 | 742 38.2 | +2 8.6 |
| 660.0 | 510.00 | +0.82405 | −3064 | +0.38039 | +2366 | +2.6302 | −229 | +0.9076 | −173 | 744 46.8 | +2 12.5 |
| 662.5 | 511.25 | +0.79341 | −3263 | +0.40405 | +2240 | +2.6073 | −242 | +0.8903 | −182 | 746 59.3 | +2 17.0 |
| 665.0 | 512.50 | +0.76078 | −3468 | +0.42645 | +2100 | +2.5831 | −256 | +0.8721 | −192 | 749 16.3 | +2 22.2 |
| 667.5 | 513.75 | +0.72610 | −3676 | +0.44745 | +1946 | +2.5575 | −271 | +0.8529 | −203 | 751 38.5 | +2 28.1 |
| 670.0 | 515.00 | +0.68934 | −3889 | +0.46691 | +1775 | +2.5304 | −287 | +0.8326 | −214 | 754 6.6 | +2 34.8 |
| 672.5 | 516.25 | +0.65045 | −4108 | +0.48466 | +1587 | +2.5017 | −304 | +0.8112 | −226 | 756 41.4 | +2 42.5 |
| 675.0 | 517.50 | +0.60937 | −4332 | +0.50053 | +1377 | +2.4713 | −322 | +0.7886 | −238 | 759 23.9 | +2 51.5 |
| 677.5 | 518.75 | +0.56605 | −4561 | +0.51430 | +1143 | +2.4391 | −341 | +0.7648 | −250 | 762 15.4 | +3 2.0 |
| 680.0 | 520.00 | +0.52044 | −4793 | +0.52573 | +881 | +2.4050 | −362 | +0.7398 | −264 | 765 17.4 | +3 14.2 |
| 682.5 | 521.25 | +0.47251 | −5030 | +0.53454 | +587 | +2.3688 | −384 | +0.7134 | −276 | 768 31.6 | +3 28.5 |
| 685.0 | 522.50 | +0.42221 | −5269 | +0.54041 | +254 | +2.3304 | −407 | +0.6858 | −290 | 772 0.1 | +3 45.6 |

| $v_0$ | $v_1$ | $x$ | Diff. | $y$ | Diff. | $\varrho$ | Diff. | $r$ | Diff. | $v$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ° | ° | | | | | | | | | ° ′ | ° ′ |
| 687.5 | 523.75 | + 0.36952 | | + 0.54295 | | + 2.2897 | | + 0.6568 | | 775 45.7 | |
| 690.0 | 525.00 | + 0.31446 | — 5506 | + 0.54169 | — 126 | + 2.2465 | — 432 | + 0.6264 | — 304 | 779 51.8 | + 4 6.1 |
| 692.5 | 526.25 | + 0.25705 | — 5741 | + 0.53609 | — 560 | + 2.2006 | — 459 | + 0.5945 | — 319 | 784 23.0 | + 4 31.2 |
| 695.0 | 527.50 | + 0.19738 | — 5967 | + 0.52550 | — 1059 | + 2.1520 | — 486 | + 0.5613 | — 332 | 789 24.8 | + 5 1.8 |
| 697.5 | 528.75 | + 0.13565 | — 6173 | + 0.50912 | — 1638 | + 2.1006 | — 514 | + 0.5269 | — 344 | 795 4.8 | + 5 40.0 |
| 700.0 | 530.00 | + 0.07221 | — 6344 | + 0.48597 | — 2315 | + 2.0465 | — 541 | + 0.4913 | — 356 | 801 32.9 | + 6 28.1 |
| 702.5 | 531.25 | + 0.00767 | — 6454 | + 0.45488 | — 3109 | + 1.9900 | — 565 | + 0.4549 | — 364 | 809 2.0 | + 7 29.1 |
| 705.0 | 532.50 | — 0.05698 | — 6465 | + 0.41448 | — 4040 | + 1.9320 | — 580 | + 0.4184 | — 365 | 817 49.5 | + 8 47.5 |
| 707.5 | 533.75 | — 0.12011 | — 6313 | + 0.36320 | — 5128 | + 1.8738 | — 582 | + 0.3825 | — 359 | 828 17.9 | + 10 28.4 |
| 710.0 | 535.00 | — 0.17911 | — 5900 | + 0.29950 | — 6370 | + 1.8177 | — 561 | + 0.3490 | — 335 | 840 52.8 | + 12 34.9 |
| 712.5 | 536.25 | — 0.23008 | — 5097 | + 0.22243 | — 7707 | + 1.7681 | — 496 | + 0.3200 | — 290 | 855 58.1 | + 15 5.3 |
| 715.0 | 537.50 | — 0.26777 | — 3769 | + 0.13262 | — 8981 | + 1.7311 | — 370 | + 0.2988 | — 212 | 873 39.1 | + 17 41.0 |
| 717.5 | 538.75 | — 0.28671 | — 1894 | + 0.03361 | — 9901 | + 1.7129 | — 182 | + 0.2887 | — 101 | 893 18.8 | + 19 39.7 |
| 720.0 | 540.00 | — 0.28350 | + 321 | — 0.06796 | — 1015 | + 1.7178 | + 49 | + 0.2915 | + 28 | 913 28.8 | + 20 10.0 |
| 722.5 | 541.25 | — 0.25899 | + 2451 | — 0.16452 | — 9656 | + 1.7447 | + 269 | + 0.3068 | + 153 | 932 25.5 | + 18 56.7 |
| 725 0 | 542.50 | — 0.21766 | + 4133 | — 0.25043 | — 8591 | + 1.7879 | + 432 | + 0.3318 | + 250 | 949 0.3 | + 16 34.8 |
| 727.5 | 543.75 | — 0.16500 | + 5266 | — 0.32342 | — 7299 | + 1.8408 | + 529 | + 0.3631 | + 313 | 962 58.2 | + 13 57.9 |
| 730.0 | 545.00 | — 0.10574 | + 5926 | — 0.38355 | — 6013 | + 1.8982 | + 574 | + 0.3979 | + 348 | 974 35.2 | + 11 37.0 |
| 732.5 | 546.25 | — 0.04324 | + 6250 | — 0.43200 | — 4845 | + 1.9567 | + 585 | + 0.4342 | + 363 | 981 17.0 | + 9 41.8 |
| 735.0 | 547.50 | + 0.02030 | + 6354 | — 0.47028 | — 3828 | + 2.0142 | + 575 | + 0.4707 | + 365 | 992 28.3 | + 8 11.3 |
| 737 5 | 548.75 | + 0.08352 | + 6322 | 0.49985 | — 2957 | + 2.0695 | + 553 | + 0.5068 | + 361 | 999 29.1 | + 7 0.8 |
| 740.0 | 550.00 | + 0.14557 | + 6205 | — 0.52198 | — 2213 | + 2.1223 | + 528 | + 0.5419 | + 351 | 1005 35.0 | + 6 5.9 |
| 742.5 | 551.25 | + 0.20595 | + 6038 | — 0.53774 | — 1576 | + 2.1725 | + 502 | + 0.5758 | + 339 | 1010 57.4 | + 5 22.4 |
| 745.0 | 552.50 | + 0.26435 | + 5840 | — 0.54800 | — 1026 | + 2.2199 | + 474 | + 0.6084 | + 326 | 1015 45.1 | + 4 47.7 |
| 747.5 | 553.75 | + 0.32060 | + 5625 | — 0.55349 | — 549 | + 2.2646 | + 447 | + 0.6396 | + 312 | 1020 4.8 | + 4 19.7 |
| 750 0 | 555.00 | + 0.37462 | + 5402 | — 0.55483 | — 134 | + 2.3067 | + 421 | + 0.6695 | + 299 | 1024 1.6 | + 3 56.8 |
| 752.5 | 556.25 | + 0.42636 | + 5174 | — 0.55251 | + 232 | + 2.3464 | + 397 | + 0.6979 | + 284 | 1027 39.4 | + 3 37.8 |
| 755.0 | 557.50 | + 0.47583 | + 4947 | — 0.54695 | + 556 | + 2.3838 | + 374 | + 0.7250 | + 271 | 1031 1.3 | + 3 21.9 |
| 757.5 | 558.75 | + 0.52304 | + 4721 | — 0.53852 | + 843 | + 2.4191 | + 353 | + 0.7507 | + 257 | 1034 9.9 | + 3 8.6 |
| 760.0 | 560.00 | + 0.56802 | + 4498 | — 0.52752 | + 1100 | + 2.4524 | + 333 | + 0.7752 | + 245 | 1037 7.0 | + 2 57.1 |
| 762.5 | 561.25 | + 0.61082 | + 4280 | — 0.51422 | + 1330 | + 2.4838 | + 314 | + 0.7984 | + 232 | 1039 54.4 | + 2 47.4 |
| 765.0 | 562.50 | + 0.65147 | + 4065 | — 0.49884 | + 1538 | + 2.5134 | + 296 | + 0.8205 | + 221 | 1042 33.4 | + 2 39.0 |
| 767.5 | 563.75 | + 0.69001 | + 3854 | — 0.48159 | + 1725 | + 2.5413 | + 279 | + 0.8415 | + 210 | 1045 5.2 | + 2 31.8 |
| 770.0 | 565.00 | + 0.72649 | + 3648 | — 0.46265 | + 1894 | + 2.5677 | + 264 | + 0.8613 | + 198 | 1047 30.6 | + 2 25.4 |
| 772.5 | 566.25 | + 0.76096 | + 3447 | — 0.44216 | + 2049 | + 2.5927 | + 250 | + 0.8801 | + 188 | 1049 50.5 | + 2 19.9 |
| 775.0 | 567.50 | + 0.79345 | + 3249 | — 0.42026 | + 2190 | + 2.6164 | + 237 | + 0.8979 | + 178 | 1052 5.5 | + 2 15.0 |
| 777.5 | 568.75 | + 0.82400 | + 3055 | — 0.39709 | + 2317 | + 2.6387 | + 223 | + 0.9147 | + 168 | 1054 16.2 | + 2 10.7 |
| 780.0 | 570.00 | + 0.85265 | + 2865 | — 0.37277 | + 2432 | + 2.6598 | + 211 | + 0.9306 | + 159 | 1056 23.1 | + 2 6.9 |
| 782.5 | 571.25 | + 0.87944 | + 2679 | — 0.34740 | + 2537 | + 2.6798 | + 200 | + 0.9156 | + 150 | 1058 26.7 | + 2 3.6 |
| 785.0 | 572.50 | + 0.90440 | + 2496 | — 0.32107 | + 2633 | + 2.6988 | + 190 | + 0.9597 | + 141 | 1060 27.3 | + 2 0.6 |
| 787.5 | 573.75 | + 0.92756 | + 2316 | — 0.29386 | + 2721 | + 2.7167 | + 179 | + 0.9730 | + 133 | 1062 25.3 | + 1 58.0 |
| 790.0 | 575.00 | + 0.94896 | + 2140 | — 0.26585 | + 2801 | + 2.7336 | + 169 | + 0.9855 | + 125 | 1064 21.0 | + 1 55.7 |
| 792.5 | 576.25 | + 0.96863 | + 1967 | — 0.23711 | + 2871 | + 2.7495 | + 159 | + 0.9972 | + 117 | 1066 14.7 | + 1 53.7 |
| 795.0 | 577.50 | + 0.98660 | + 1797 | — 0.20772 | + 2939 | + 2.7645 | + 150 | + 1.0082 | + 110 | 1068 6.6 | + 1 51.9 |
| 797.5 | 578.75 | + 1.00289 | + 1629 | — 0.17774 | + 2998 | + 2.7787 | + 142 | + 1.0185 | + 103 | 1069 57.0 | + 1 50.4 |
| 800.0 | 580.00 | + 1.01752 | + 1463 | — 0.14724 | + 3050 | + 2.7922 | + 135 | + 1.0281 | + 96 | 1071 46.0 | + 1 49.0 |
| 802.5 | 581.25 | + 1.03050 | + 1298 | — 0.11628 | + 3096 | + 2.8050 | + 128 | + 1.0370 | + 89 | 1073 33.7 | + 1 47.7 |
| 805.0 | 582.50 | + 1.04186 | + 1136 | — 0.08492 | + 3136 | + 2.8171 | + 121 | + 1.0453 | + 83 | 1075 20.4 | + 1 46.7 |
| 807.5 | 583.75 | + 1.05162 | + 976 | — 0.05321 | + 3171 | + 2.8285 | + 114 | + 1.0530 | + 77 | 1077 6.2 | + 1 45.8 |
| 810.0 | 585.00 | + 1.05980 | + 818 | — 0.02120 | + 3201 | + 2.8392 | + 107 | + 1.0600 | + 70 | 1078 51.2 | + 1 45.0 |
| 812.5 | 586.25 | + 1.06643 | + 663 | + 0.01105 | + 3225 | + 2.8494 | + 102 | + 1.0665 | + 65 | 1080 35.6 | + 1 44.4 |
| 815.0 | 587.50 | + 1.07151 | + 508 | + 0.04350 | + 3245 | + 2.8591 | + 97 | + 1.0724 | + 59 | 1082 19.5 | + 1 43.9 |
| 817.5 | 588.75 | + 1.07504 | + 353 | + 0.07611 | + 3261 | + 2.8682 | + 91 | + 1.0777 | + 53 | 1084 3.0 | + 1 43.5 |
| 820.0 | 590.00 | + 1.07703 | + 199 | + 0.10883 | + 3272 | + 2.8768 | + 86 | + 1.0825 | + 48 | 1085 46.2 | + 1 43.2 |
| 822.5 | 591.25 | + 1.07748 | + 45 | + 0.14161 | + 3278 | + 2.8848 | + 80 | + 1.0867 | + 42 | 1087 29.2 | + 1 43.0 |
| | | | — 111 | | + 3281 | | + 74 | | + 37 | | + 1 43.1 |

| $r_0$ | $r_1$ | $x$ | Diff. | $y$ | Diff. | $\varrho$ | Diff. | $r$ | Diff. | $v$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ° | ° | | | | | | | | | ° ′ | ° ′ |
| 825.0 | 592.50 | + 1.07637 | − 265 | + 0.17442 | + 3279 | + 2.8922 | + 69 | + 1.0904 | + 31 | 1089 12.3 | + 1 43.1 |
| 827.5 | 593.75 | + 1.07372 | − 417 | + 0.20721 | + 3273 | + 2.8991 | + 64 | + 1.0935 | + 26 | 1090 55.4 | + 1 43.2 |
| 830.0 | 595.00 | + 1.06955 | − 568 | + 0.23994 | + 3263 | + 2.8955 | + 60 | + 1.0961 | + 21 | 1092 38.6 | + 1 43.6 |
| 832.5 | 596.25 | + 1.06387 | − 718 | + 0.27257 | + 3249 | + 2.9015 | + 56 | + 1.0982 | + 16 | 1094 22.2 | + 1 44.0 |
| 835.0 | 597.50 | + 1.05669 | − 866 | + 0.30506 | + 3231 | + 2.9171 | + 53 | + 1.0998 | + 12 | 1096 6.2 | + 1 44.4 |
| 837.5 | 598.75 | + 1.04803 | − 1011 | + 0.33737 | + 3207 | + 2.9224 | + 49 | + 1.1010 | + 7 | 1097 50.6 | + 1 45.0 |
| 840.0 | 600.00 | + 1.03792 | − 1152 | + 0.36944 | + 3180 | + 2.9273 | + 46 | + 1.1017 | + 3 | 1099 35.6 | + 1 45.5 |
| 842.5 | 601.25 | + 1.02640 | − 1289 | + 0.40124 | + 3148 | + 2.9319 | + 43 | + 1.1020 | 0 | 1101 21.1 | + 1 46.1 |
| 845.0 | 602.50 | + 1.01351 | − 1426 | + 0.43272 | + 3112 | + 2.9362 | + 41 | + 1.1020 | − 4 | 1103 7.2 | + 1 46.8 |
| 847.5 | 603.75 | + 0.99925 | − 1561 | + 0.46384 | + 3073 | + 2.9403 | + 38 | + 1.1016 | − 6 | 1104 54.0 | + 1 47.6 |
| 850.0 | 605.00 | + 0.98364 | − 1695 | + 0.49457 | + 3028 | + 2.9441 | + 36 | + 1.1010 | − 10 | 1106 41.6 | + 1 48.3 |
| 852.5 | 606.25 | + 0.96669 | − 1827 | + 0.52485 | + 2978 | + 2.9477 | + 33 | + 1.1000 | − 13 | 1108 29.9 | + 1 49.2 |
| 855.0 | 607.50 | + 0.94842 | − 1957 | + 0.55463 | + 2924 | + 2.9510 | + 31 | + 1.0987 | − 16 | 1110 19.1 | + 1 50.1 |
| 857.5 | 608.75 | + 0.92885 | − 2086 | + 0.58387 | + 2867 | + 2.9541 | + 29 | + 1.0971 | − 18 | 1112 9.2 | + 1 51.1 |
| 860.0 | 610.00 | + 0.90799 | − 2213 | + 0.61254 | + 2804 | + 2.9570 | + 27 | + 1.0953 | − 21 | 1114 0.3 | + 1 52.0 |
| 862.5 | 611.25 | + 0.88586 | − 2338 | + 0.64058 | + 2738 | + 2.9597 | + 26 | + 1.0932 | − 23 | 1115 52.3 | + 1 53.1 |
| 865.0 | 612.50 | + 0.86248 | − 2462 | + 0.66796 | + 2666 | + 2.9623 | + 24 | + 1.0909 | − 26 | 1117 45.4 | + 1 54.2 |
| 867.5 | 613.75 | + 0.83786 | − 2582 | + 0.69462 | + 2590 | + 2.9647 | + 22 | + 1.0883 | − 27 | 1119 39.6 | + 1 55.3 |
| 870.0 | 615.00 | + 0.81204 | − 2699 | + 0.72052 | + 2510 | + 2.9669 | + 21 | + 1.0856 | − 29 | 1121 34.9 | + 1 46.6 |
| 872.5 | 616.25 | + 0.78505 | − 2815 | + 0.74562 | + 2425 | + 2.9690 | + 20 | + 1.0827 | − 31 | 1123 31.5 | + 1 57.7 |
| 875.0 | 617.50 | + 0.75690 | − 2927 | + 0.76987 | + 2335 | + 2.9710 | + 19 | + 1.0796 | − 32 | 1125 29.2 | + 1 59.0 |
| 877.5 | 618.75 | + 0.72763 | − 3037 | + 0.79322 | + 2241 | + 2.9729 | + 18 | + 1.0764 | − 34 | 1127 28.2 | + 2 0.2 |
| 880.0 | 620.00 | + 0.69726 | − 3145 | + 0.81563 | + 2142 | + 2.9747 | + 16 | + 1.0730 | − 34 | 1129 28.4 | + 2 1.6 |
| 882.5 | 621.25 | + 0.66581 | − 3248 | + 0.83705 | + 2038 | + 2.9763 | + 15 | + 1.0696 | − 37 | 1131 30.0 | + 2 2.9 |
| 885.0 | 622.50 | + 0.63333 | − 3348 | + 0.85743 | + 1930 | + 2.9778 | + 14 | + 1.0659 | − 36 | 1133 32.9 | + 2 4.3 |
| 887.5 | 623.75 | + 0.59985 | − 3443 | + 0.87673 | + 1818 | + 2.9792 | + 13 | + 1.0623 | − 37 | 1135 37.2 | + 2 5.7 |
| 890.0 | 625.00 | + 0.56542 | − 3535 | + 0.89491 | + 1701 | + 2.9805 | + 12 | + 1.0586 | − 38 | 1137 42.9 | + 2 7.0 |
| 892.5 | 626.25 | + 0.53007 | − 3623 | + 0.91192 | + 1579 | + 2.9817 | + 12 | + 1.0548 | − 38 | 1139 49.9 | + 2 8.4 |
| 895.0 | 627.50 | + 0.49384 | − 3706 | + 0.92771 | + 1453 | + 2.9829 | + 11 | + 1.0510 | − 39 | 1141 58.3 | + 2 9.9 |
| 897.5 | 628.75 | + 0.45678 | − 3785 | + 0.94224 | + 1323 | + 2.9840 | + 10 | + 1.0471 | − 38 | 1144 8.2 | + 2 11.3 |
| 900.0 | 630.00 | + 0.41893 | − 3859 | + 0.95547 | + 1189 | + 2.9850 | + 9 | + 1.0433 | − 39 | 1146 19.5 | + 2 12.7 |
| 902.5 | 631.25 | + 0.38034 | − 3925 | + 0.96736 | + 1051 | + 2.9859 | + 9 | + 1.0394 | − 37 | 1148 32.2 | + 2 14.0 |
| 905.0 | 632.50 | + 0.34109 | − 3988 | + 0.97787 | + 910 | + 2.9868 | + 8 | + 1.0357 | − 37 | 1150 46.2 | + 2 15.5 |
| 907.5 | 633.75 | + 0.30121 | − 4046 | + 0.98697 | + 765 | + 2.9876 | + 7 | + 1.0320 | − 37 | 1153 1.7 | + 2 16.9 |
| 910.0 | 635.00 | + 0.26075 | − 4095 | + 0.99462 | + 617 | + 2.9883 | + 7 | + 1.0283 | − 37 | 1155 18.6 | + 2 18.2 |
| 912.5 | 636.25 | + 0.21980 | − 4139 | + 1.00079 | + 466 | + 2.9890 | + 5 | + 1.0246 | − 35 | 1157 36.8 | + 2 19.5 |
| 915.0 | 637.50 | + 0.17841 | − 4177 | + 1.00545 | + 312 | + 2.9895 | + 5 | + 1.0211 | − 33 | 1159 56.3 | + 2 20.8 |
| 917.5 | 638.75 | + 0.13664 | − 4206 | + 1.00857 | + 156 | + 2.9900 | + 4 | + 1.0178 | − 32 | 1162 17.1 | + 2 22.0 |
| 920.0 | 640.00 | + 0.09458 | − 4230 | + 1.01013 | − 3 | + 2.9904 | + 4 | + 1.0146 | − 31 | 1164 39.1 | + 2 23.1 |
| 922.5 | 641.25 | + 0.05228 | − 4246 | + 1.01010 | − 163 | + 2.9908 | + 3 | + 1.0115 | − 30 | 1167 2.2 | + 2 24.3 |
| 925.0 | 642.50 | + 0.00982 | − 4254 | + 1.00847 | − 325 | + 2.9911 | + 2 | + 1.0085 | − 28 | 1169 26.5 | + 2 25.4 |
| 927.5 | 643.75 | − 0.03272 | − 4256 | + 1.00522 | − 488 | + 2.9913 | + 2 | + 1.0057 | − 25 | 1171 51.9 | + 2 26.3 |
| 930.0 | 645.00 | − 0.07528 | − 4249 | + 1.00034 | − 651 | + 2.9915 | + 1 | + 1.0032 | − 24 | 1174 18.2 | + 2 27.3 |
| 932.5 | 646.25 | − 0.11777 | − 4236 | + 0.99383 | − 815 | + 2.9916 | 0 | + 1.0008 | − 22 | 1176 45.5 | + 2 28.2 |
| 935.0 | 647.50 | − 0.16013 | − 4214 | + 0.98568 | − 979 | + 2.9916 | 0 | + 0.9986 | − 20 | 1179 13.7 | + 2 28.9 |
| 937.5 | 648.75 | − 0.20227 | − 4184 | + 0.97589 | − 1142 | + 2.9916 | − 1 | + 0.9966 | − 17 | 1181 42.6 | + 2 29.6 |
| 940.0 | 650.00 | − 0.24411 | − 4149 | + 0.96447 | − 1304 | + 2.9915 | − 2 | + 0.9949 | − 15 | 1184 12.2 | + 2 30.3 |
| 942.5 | 651.25 | − 0.28558 | − 4101 | + 0.95143 | − 1464 | + 2.9913 | − 3 | + 0.9934 | − 13 | 1186 42.5 | + 2 30.7 |
| 945.0 | 652.50 | − 0.32659 | − 4048 | + 0.93679 | − 1623 | + 2.9910 | − 4 | + 0.9921 | − 11 | 1189 13.2 | + 2 31.2 |
| 947.5 | 653.75 | − 0.36707 | − 3988 | + 0.92056 | − 1777 | + 2.9906 | − 4 | + 0.9910 | − 8 | 1191 44.4 | + 2 31.4 |
| 950.0 | 655.00 | − 0.40695 | − 3918 | + 0.90279 | − 1931 | + 2.9902 | − 5 | + 0.9902 | − 5 | 1194 15.8 | + 2 31.7 |
| 952.5 | 656.25 | − 0.44613 | − 3844 | + 0.88348 | − 2081 | + 2.9897 | − 6 | + 0.9897 | − 3 | 1196 47.5 | + 2 31.9 |
| 955.0 | 657.50 | − 0.48457 | − 3760 | + 0.86267 | − 2227 | + 2.9891 | − 7 | + 0.9894 | 0 | 1199 19.4 | + 2 31.8 |
| 957.0 | 658.75 | − 0.52217 | − 3670 | + 0.84040 | − 2369 | + 2.9884 | − 7 | + 0.9894 | + 2 | 1201 51.2 | + 2 31.8 |
| 960.0 | 660.00 | − 0.55887 | − 3573 | + 0.81671 | − 2505 | + 2.9877 | − 8 | + 0.9896 | + 5 | 1204 23.0 | + 2 31.5 |

| $v_0$ | $v_1$ | $x$ | Diff. | $y$ | Diff. | $\varrho$ | Diff. | $r$ | Diff. | $v$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ° | ° | | | | | | | | | ° ′ | ° ′ |
| 962.5 | 661.25 | − 0.59460 | − 3469 | + 0.79166 | − 2638 | + 2.9869 | − 10 | + 0.9901 | + 7 | 1206 51.5 | + 2 31.3 |
| 965.0 | 662.50 | 0.62929 | − 3357 | + 0.76528 | − 2765 | + 2.9859 | − 10 | + 0.9908 | + 9 | 1209 25.8 | + 2 30.8 |
| 967.5 | 663.75 | − 0.66286 | − 3243 | + 0.73763 | − 2887 | + 2.9849 | − 11 | + 0.9917 | + 12 | 1211 56.6 | + 2 30.4 |
| 970.0 | 665.00 | − 0.69529 | − 3122 | + 0.70876 | − 3004 | + 2.9838 | − 12 | + 0.9929 | + 14 | 1214 27.0 | + 2 29.9 |
| 972.5 | 666.25 | − 0.72651 | − 2995 | + 0.67872 | − 3112 | + 2.9826 | − 12 | + 0.9943 | + 15 | 1216 56.9 | + 2 29.1 |
| 975.0 | 667.50 | − 0.75646 | − 2864 | + 0.64760 | − 3216 | + 2.9814 | − 14 | + 0.9958 | + 18 | 1219 26.0 | + 2 28.3 |
| 977.5 | 668.75 | − 0.78510 | − 2729 | + 0.61544 | − 3311 | + 2.9800 | − 14 | + 0.9976 | + 20 | 1221 54.3 | + 2 27.6 |
| 980.0 | 670.00 | − 0.81239 | − 2590 | + 0.58233 | − 3400 | + 2.9786 | − 15 | + 0.9996 | + 21 | 1224 21.9 | + 2 26.8 |
| 982.5 | 671.25 | − 0.83829 | − 2447 | + 0.54833 | − 3485 | + 2.9771 | − 15 | + 1.0017 | + 23 | 1226 48.7 | + 2 25.8 |
| 985.0 | 672.50 | − 0.86276 | − 2300 | + 0.51348 | − 3562 | + 2.9756 | − 17 | + 1.0040 | + 24 | 1229 14.5 | + 2 24.7 |
| 987.5 | 673.75 | − 0.88576 | − 2151 | + 0.47786 | − 3629 | + 2.9739 | − 18 | + 1.0064 | + 26 | 1231 39.2 | + 2 23.6 |
| 990.0 | 675.00 | − 0.90727 | − 1999 | + 0.44157 | − 3692 | + 2.9721 | − 19 | + 1.0090 | + 27 | 1234 2.8 | + 2 22.6 |
| 992.5 | 676.25 | − 0.92726 | − 1846 | + 0.40465 | − 3745 | + 2.9702 | − 20 | + 1.0117 | + 28 | 1236 25.4 | + 2 21.4 |
| 995.0 | 677.50 | − 0.94572 | − 1690 | + 0.36720 | − 3793 | + 2.9682 | − 21 | + 1.0145 | + 29 | 1238 46.8 | + 2 20.2 |
| 997.5 | 678.75 | − 0.96262 | − 1534 | + 0.32927 | − 3834 | + 2.9661 | − 21 | + 1.0174 | + 29 | 1241 7.0 | + 2 19.0 |
| 1000.0 | 680.00 | − 0.97796 | − 1377 | + 0.29093 | − 3868 | + 2.9640 | − 22 | + 1.0203 | + 29 | 1243 26.0 | + 2 17.7 |
| 1002.5 | 681.25 | − 0.99173 | − 1220 | + 0.25225 | − 3893 | + 2.9618 | − 23 | + 1.0232 | + 31 | 1245 43.7 | + 2 16.5 |
| 1005.0 | 682.50 | − 1.00393 | − 1061 | + 0.21332 | − 3912 | + 2.9595 | − 24 | + 1.0263 | + 31 | 1248 0.2 | + 2 15.2 |
| 1007.5 | 683.75 | − 1.01454 | − 904 | + 0.17420 | − 3924 | + 2.9571 | − 25 | + 1.0294 | + 30 | 1250 15.4 | + 2 13.9 |
| 1010.0 | 685.00 | − 1.02358 | − 746 | + 0.13496 | − 3931 | + 2.9546 | − 26 | + 1.0324 | + 31 | 1252 29.3 | + 2 12.7 |
| 1012.5 | 686.25 | − 1.03104 | − 589 | + 0.09565 | − 3929 | + 2.9520 | − 28 | + 1.0355 | + 30 | 1254 42.0 | + 2 11.3 |
| 1015.0 | 687.50 | − 1.03693 | 433 | + 0.05636 | − 3921 | + 2.9492 | − 29 | + 1.0385 | + 29 | 1256 53.3 | + 2 10.1 |
| 1017.0 | 688.75 | − 1.04126 | − 277 | + 0.01715 | − 3908 | + 2.9463 | − 30 | + 1.0414 | + 29 | 1259 3.4 | + 2 8.8 |
| 1020.0 | 690.00 | − 1.04403 | − 123 | − 0.02193 | − 3887 | + 2.9433 | − 31 | + 1.0443 | + 27 | 1261 12.2 | + 2 7.5 |
| 1022.5 | 691.25 | − 1.04526 | + 29 | − 0.06080 | − 3861 | + 2.9402 | − 32 | + 1.0470 | + 27 | 1263 19.7 | + 2 6.4 |
| 1025.0 | 692.50 | − 1.04497 | + 180 | − 0.09941 | − 3829 | + 2.9370 | − 34 | + 1.0497 | + 25 | 1265 26.1 | + 2 5.1 |
| 1027.5 | 693.75 | − 1.04317 | + 329 | − 0.13770 | − 3792 | + 2.9336 | − 36 | + 1.0522 | + 24 | 1267 31.2 | + 2 4.0 |
| 1030.0 | 695.00 | − 1.03988 | + 476 | − 0.17562 | − 3748 | + 2.9300 | − 37 | + 1.0546 | + 22 | 1269 35.2 | + 2 2.8 |
| 1032.5 | 696.25 | − 1.03512 | + 622 | − 0.21310 | − 3698 | + 2.9263 | − 38 | + 1.0568 | + 20 | 1271 38.0 | + 2 1.7 |
| 1035.0 | 697.50 | − 1.02890 | + 765 | − 0.25008 | − 3643 | + 2.9225 | − 41 | + 1.0588 | + 19 | 1273 39.7 | + 2 0.6 |
| 1037.5 | 698.75 | − 1.02125 | + 906 | − 0.28651 | − 3584 | + 2.9184 | − 43 | + 1.0607 | + 16 | 1275 40.3 | + 1 59.6 |
| 1040.0 | 700.00 | − 1.01219 | + 1044 | − 0.32235 | − 3519 | + 2.9141 | − 45 | + 1.0623 | + 14 | 1277 39.9 | + 1 58.6 |
| 1042.5 | 701.25 | − 1.00175 | + 1180 | − 0.35754 | − 3450 | + 2.9096 | − 47 | + 1.0637 | + 11 | 1279 38.5 | + 1 57.7 |
| 1045.0 | 702.50 | − 0.98995 | + 1313 | − 0.39204 | − 3375 | + 2.9049 | − 49 | + 1.0648 | + 8 | 1281 36.2 | + 1 56.9 |
| 1047.5 | 703.75 | − 0.97682 | + 1444 | − 0.42579 | − 3296 | + 2.9000 | − 52 | + 1.0656 | + 5 | 1283 33.1 | + 1 56.1 |
| 1050.0 | 705.00 | − 0.96238 | + 1572 | − 0.45875 | − 3212 | + 2.8948 | − 55 | + 1.0661 | + 2 | 1285 29.2 | + 1 55.3 |
| 1052.5 | 706.25 | − 0.94666 | + 1697 | − 0.49087 | − 3123 | + 2.8893 | − 57 | + 1.0663 | − 0 | 1287 24.5 | + 1 54.6 |
| 1055.0 | 707.50 | − 0.92969 | + 1819 | − 0.52210 | − 3029 | + 2.8836 | − 60 | + 1.0663 | − 5 | 1289 19.1 | + 1 53.9 |
| 1057.5 | 708.75 | − 0.91150 | + 1938 | − 0.55239 | − 2932 | + 2.8776 | − 63 | + 1.0658 | − 8 | 1291 13.0 | + 1 53.4 |
| 1060.0 | 710.00 | − 0.89212 | + 2055 | − 0.58171 | − 2830 | + 2.8713 | − 66 | + 1.0650 | − 11 | 1293 6.4 | + 1 52.9 |
| 1062.5 | 711.25 | − 0.87157 | + 2169 | − 0.61001 | − 2723 | + 2.8647 | − 70 | + 1.0639 | − 16 | 1294 59.3 | + 1 52.5 |
| 1065.0 | 712.50 | − 0.84988 | + 2280 | − 0.63724 | − 2613 | + 2.8577 | − 74 | + 1.0623 | − 21 | 1296 51.8 | + 1 52.1 |
| 1067.5 | 713.75 | − 0.82708 | + 2388 | − 0.66337 | − 2498 | + 2.8503 | − 78 | + 1.0602 | − 24 | 1298 43.9 | + 1 51.9 |
| 1070.0 | 715.00 | − 0.80320 | + 2493 | − 0.68835 | − 2379 | + 2.8425 | − 82 | + 1.0578 | − 29 | 1300 35.8 | + 1 51.7 |
| 1072.5 | 716.25 | − 0.77827 | + 2595 | − 0.71214 | − 2255 | + 2.8343 | − 87 | + 1.0549 | − 34 | 1302 27.5 | + 1 51.7 |
| 1075.0 | 717.50 | − 0.75232 | + 2695 | − 0.73469 | − 2127 | + 2.8256 | − 91 | + 1.0515 | − 38 | 1304 19.2 | + 1 51.8 |
| 1077.5 | 718.75 | − 0.72537 | + 2790 | − 0.75596 | − 1995 | + 2.8165 | − 96 | + 1.0477 | − 44 | 1306 11.0 | + 1 51.9 |
| 1080.0 | 720.00 | − 0.69747 | + 2882 | − 0.77591 | − 1858 | + 2.8069 | − 102 | + 1.0433 | − 49 | 1308 2.9 | + 1 52.1 |
| 1082.5 | 721.25 | − 0.66865 | + 2972 | − 0.79449 | − 1715 | + 2.7967 | − 107 | + 1.0384 | − 55 | 1309 55.0 | + 1 52.4 |
| 1085.0 | 722.50 | − 0.63893 | + 3059 | − 0.81164 | − 1570 | + 2.7860 | − 113 | + 1.0329 | − 60 | 1311 47.4 | + 1 53.0 |
| 1087.5 | 723.75 | − 0.60834 | + 3142 | − 0.82734 | − 1419 | + 2.7747 | − 119 | + 1.0269 | − 66 | 1313 40.4 | + 1 53.6 |
| 1090.0 | 725.00 | − 0.57692 | + 3222 | − 0.84153 | − 1263 | + 2.7628 | − 125 | + 1.0203 | − 73 | 1315 34.0 | + 1 54.5 |
| 1092.5 | 726.25 | − 0.54470 | + 3297 | − 0.85416 | − 1102 | + 2.7503 | − 132 | + 1.0130 | − 78 | 1317 28.5 | + 1 55.3 |
| 1095.0 | 727.50 | − 0.51173 | + 3369 | − 0.86518 | − 935 | + 2.7371 | − 139 | + 1.0052 | − 85 | 1319 23.8 | + 1 56.4 |
| 1097.5 | 728.75 | − 0.47804 | + 3437 | − 0.87453 | − 764 | + 2.7232 | − 147 | + 0.9967 | − 92 | 1321 20.2 | + 1 57.8 |

| $v_0$ | $v_1$ | $x$ | Diff. | $y$ | Diff. | $\varrho$ | Diff. | $r$ | Diff. | $v$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ° | ° | | | | | | | | | ° ' | ° ' |
| 1100.0 | 730.00 | -0.44367 | +3502 | -0.88217 | -586 | +2.7085 | -155 | +0.9875 | -100 | 1323 18.0 | +1 59.3 |
| 1102.5 | 731.25 | -0.40865 | +3561 | -0.88803 | -401 | +2.6930 | -164 | +0.9775 | -106 | 1325 17.3 | +2 1.0 |
| 1105.0 | 732.50 | -0.37304 | +3616 | -0.89204 | -210 | +2.6766 | -173 | +0.9669 | -114 | 1327 18.3 | +2 3.0 |
| 1107.5 | 733.75 | -0.33688 | +3667 | -0.89414 | -12 | +2.6593 | -182 | +0.9555 | -122 | 1329 21.3 | +2 5.3 |
| 1110.0 | 735.00 | -0.30021 | +3712 | -0.89426 | +192 | +2.6411 | -192 | +0.9433 | -130 | 1331 26.6 | +2 7.8 |
| 1112.5 | 736.25 | -0.26309 | +3751 | -0.89234 | +405 | +2.6219 | -202 | +0.9303 | -138 | 1333 34.4 | +2 10.7 |
| 1115.0 | 737.50 | -0.22558 | +3785 | -0.88829 | +626 | +2.6017 | -213 | +0.9165 | -147 | 1335 45.1 | +2 14.0 |
| 1117.5 | 738.75 | -0.18773 | +3812 | -0.88203 | +858 | +2.5804 | -225 | +0.9018 | -156 | 1337 59.1 | +2 17.7 |
| 1120.0 | 740.00 | -0.14961 | +3832 | -0.87345 | +1099 | +2.5579 | -238 | +0.8862 | -166 | 1340 16.8 | +2 22.0 |
| 1122.5 | 741.25 | -0.11129 | +3841 | -0.86246 | +1350 | +2.5341 | -251 | +0.8696 | -175 | 1342 38.8 | +2 26.8 |
| 1125.0 | 742.50 | -0.07288 | +3843 | -0.84896 | +1612 | +2.5090 | -265 | +0.8521 | -186 | 1345 5.6 | +2 32.3 |
| 1127.5 | 743.75 | -0.03445 | +3835 | -0.83284 | +1888 | +2.4825 | -280 | +0.8335 | -195 | 1347 37.9 | +2 38.6 |
| 1130.0 | 745.00 | +0.00390 | +3813 | -0.81396 | +2178 | +2.4545 | -296 | +0.8140 | -207 | 1350 16.5 | +2 45.7 |
| 1132.5 | 746.25 | +0.04203 | +3779 | -0.79218 | +2482 | +2.4249 | -313 | +0.7933 | -218 | 1353 2.2 | +2 54.0 |
| 1135.0 | 747.50 | +0.07982 | +3726 | -0.76736 | +2802 | +2.3936 | -331 | +0.7715 | -230 | 1355 56.2 | +2 3.7 |
| 1137.5 | 748.75 | +0.11708 | +3654 | -0.73934 | +3140 | +2.3605 | -350 | +0.7485 | -241 | 1358 59.9 | +3 14.7 |
| 1140.0 | 750.00 | +0.15362 | +3560 | -0.70794 | +3496 | +2.3255 | -369 | +0.7244 | -253 | 1362 14.6 | +3 27.7 |
| 1142.5 | 751.25 | +0.18922 | +3438 | -0.67298 | +3875 | +2.2886 | -390 | +0.6991 | -266 | 1365 42.3 | +3 43.0 |
| 1145.0 | 752.50 | +0.22360 | +3281 | -0.63423 | +4275 | +2.2496 | -412 | +0.6725 | -278 | 1369 25.3 | +4 0.9 |
| 1147.5 | 753.75 | +0.25641 | +3084 | -0.59148 | +4699 | +2.2084 | -435 | +0.6447 | -291 | 1373 26.2 | +4 22.7 |
| 1150.0 | 755.00 | +0.28725 | +2835 | -0.54449 | +5150 | +2.1649 | -458 | +0.6156 | -302 | 1377 48.9 | +4 48.7 |
| 1152.5 | 756.25 | +0.31560 | +2520 | -0.49299 | +5622 | +2.1191 | -481 | +0.5854 | -314 | 1382 37.6 | +5 20.2 |
| 1155.0 | 757.50 | +0.34080 | +2126 | -0.43677 | +6117 | +2.0710 | -503 | +0.5540 | -323 | 1387 57.8 | +5 59.1 |
| 1157.5 | 758.75 | +0.36206 | +1629 | -0.37560 | +6627 | +2.0207 | -522 | +0.5217 | -330 | 1393 56.9 | +6 47.0 |
| 1160.0 | 760.00 | +0.37835 | +1000 | -0.30933 | +7139 | +1.9685 | -535 | +0.4887 | -333 | 1400 43.9 | +7 46.3 |
| 1162.5 | 761.25 | +0.38835 | +210 | -0.23794 | +7625 | +1.9150 | -538 | +0.4554 | -328 | 1408 30.2 | +9 0.1 |
| 1165.0 | 762.50 | +0.39045 | -778 | -0.16169 | +8039 | +1.8612 | -523 | +0.4226 | -314 | 1417 30.3 | +10 30.0 |
| 1167.5 | 763.75 | +0.38267 | -1991 | -0.08130 | +8300 | +1.8089 | -480 | +0.3912 | -284 | 1428 0.3 | +12 15.8 |
| 1170.0 | 765.00 | +0.36276 | -3414 | +0.00170 | +8297 | +1.7609 | -400 | +0.3628 | -234 | 1440 16.1 | +14 10.8 |
| 1172.5 | 766.25 | +0.32862 | -4963 | +0.08467 | +7904 | +1.7209 | -274 | +0.3394 | -159 | 1454 26.9 | +15 57.4 |
| 1175.0 | 767.50 | +0.27899 | -6455 | +0.16371 | +7059 | +1.6935 | -110 | +0.3235 | -59 | 1470 24.3 | +17 7.8 |
| 1177.5 | 768.75 | +0.21444 | -7649 | +0.23430 | +5757 | +1.6825 | +72 | +0.3176 | +52 | 1487 32.1 | +17 10.1 |
| 1180.0 | 770.00 | +0.13795 | -8378 | +0.29187 | +4213 | +1.6897 | +240 | +0.3228 | +156 | 1504 42.2 | +16 5.1 |
| 1182.5 | 771.25 | +0.05417 | -8628 | +0.33400 | +2663 | +1.7137 | +370 | +0.3384 | +237 | 1520 47.3 | +14 18.0 |
| 1185.0 | 772.50 | -0.03211 | -8500 | +0.36063 | +1276 | +1.7507 | +453 | +0.3621 | +292 | 1535 5.3 | +12 19.5 |
| 1187.5 | 773.75 | -0.11711 | -8132 | +0.37339 | +121 | +1.7960 | +500 | +0.3913 | +326 | 1547 24.8 | +10 29.8 |
| 1190.0 | 775.00 | -0.19843 | -7637 | +0.37460 | -800 | +1.8460 | +518 | +0.4239 | +343 | 1557 54.6 | +8 56.7 |
| 1192.5 | 776.25 | -0.27480 | -7093 | +0.36660 | -1523 | +1.8978 | +517 | +0.4582 | +347 | 1566 51.3 | +7 40.9 |
| 1195.0 | 777.50 | -0.34573 | -6540 | +0.35137 | -2085 | +1.9495 | +507 | +0.4929 | +346 | 1574 32.2 | +6 40.0 |
| 1197.5 | 778.75 | -0.41113 | -6001 | +0.33052 | -2520 | +2.0002 | +491 | +0.5275 | +339 | 1581 12.2 | +5 51.1 |
| 1200.0 | 780.00 | -0.47114 | -5490 | +0.30532 | 2859 | +2.0493 | +471 | +0.5614 | +330 | 1587 3.3 | +5 11.9 |
| 1202.5 | 781.25 | -0.52604 | -5007 | +0.27673 | -3121 | +2.0964 | +449 | +0.5944 | +319 | 1592 15.2 | +4 39.9 |
| 1205.0 | 782.50 | -0.57611 | -4554 | +0.24552 | -3324 | +2.1413 | +427 | +0.6263 | +306 | 1596 55.1 | +4 13.6 |
| 1207.5 | 783.75 | -0.62165 | -4132 | +0.21228 | -3480 | +2.1840 | +405 | +0.6569 | +294 | 1601 8.7 | +3 52.1 |
| 1210.0 | 785.00 | -0.66297 | -3736 | +0.17748 | -3599 | +2.2245 | +384 | +0.6863 | +282 | 1605 0.8 | +3 33.9 |
| 1212.5 | 786.25 | -0.70033 | -3365 | +0.14149 | -3689 | +2.2629 | +364 | +0.7145 | +269 | 1608 34.7 | +3 18.7 |
| 1215.0 | 787.50 | -0.73398 | -3017 | +0.10460 | -3755 | +2.2993 | +345 | +0.7414 | +257 | 1611 53.4 | +3 5.7 |
| 1217.5 | 788.75 | -0.76415 | -2689 | +0.06705 | -3802 | +2.3338 | +326 | +0.7671 | +245 | 1614 59.1 | +2 54.8 |
| 1220.0 | 790.00 | -0.79104 | -2381 | +0.02903 | -3832 | +2.3664 | +309 | +0.7916 | +233 | 1617 53.9 | +2 45.3 |
| 1222.5 | 791.25 | -0.81485 | -2090 | -0.00929 | -3847 | +2.3973 | +293 | +0.8149 | +222 | 1620 39.2 | +2 37.1 |
| 1225.0 | 792.50 | -0.83575 | -1814 | -0.04776 | -3851 | +2.4266 | +277 | +0.8371 | +211 | 1623 16.3 | +2 29.8 |
| 1227.5 | 793.75 | -0.85389 | -1552 | -0.08627 | -3846 | +2.4543 | +263 | +0.8582 | +201 | 1625 46.1 | +2 23.7 |
| 1230.0 | 795.00 | -0.86941 | -1302 | -0.12473 | -3831 | +2.4806 | +249 | +0.8783 | +191 | 1628 9.8 | +2 18.3 |
| 1232.5 | 796.25 | -0.88243 | -1065 | -0.16304 | -3809 | +2.5055 | +236 | +0.8974 | +181 | 1630 28.1 | +2 13.4 |
| 1235.0 | 797.50 | -0.89308 | -839 | -0.20113 | -3781 | +2.5291 | +224 | +0.9155 | +171 | 1632 41.5 | +2 9.2 |

| $v_0$ | $v_1$ | $x$ | Diff. | $y$ | Diff. | $\varrho$ | Diff. | $r$ | Diff. | $v$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ° | ° | | | | | | | | | ° ′ | ° ′ |
| 1237.5 | 798.75 | − 0.90147 | − 621 | − 0.23894 | − 3746 | + 2.5515 | + 213 | + 0.9326 | + 162 | 1634 50.7 | + 2 5.5 |
| 1240.0 | 800.00 | − 0.90768 | − 413 | − 0.27640 | − 3706 | + 2.5728 | + 202 | + 0.9488 | + 154 | 1636 56.2 | + 2 2.1 |
| 1242.5 | 801.25 | − 0.91181 | − 214 | − 0.31346 | − 3662 | + 2.5930 | + 191 | + 0.9642 | + 145 | 1638 58.3 | + 1 59.2 |
| 1245.0 | 802.50 | − 0.91395 | − 22 | − 0.35008 | − 3614 | + 2.6121 | + 181 | + 0.9787 | + 137 | 1640 57.5 | + 1 56.7 |
| 1247.5 | 803.75 | − 0.91417 | + 163 | − 0.38622 | − 3561 | + 2.6302 | + 172 | + 0.9924 | + 129 | 1642 54.2 | + 1 54.4 |
| 1250.0 | 805.00 | − 0.91254 | + 342 | − 0.42183 | − 3503 | + 2.6474 | + 164 | + 1.0053 | + 121 | 1644 48.6 | + 1 52.3 |
| 1252.5 | 806.25 | − 0.90912 | + 514 | − 0.45686 | − 3443 | + 2.6638 | + 156 | + 1.0174 | + 114 | 1646 40.9 | + 1 50.9 |
| 1255.0 | 807.50 | − 0.90398 | + 679 | − 0.49129 | − 3380 | + 2.6794 | + 148 | + 1.0288 | + 107 | 1648 31.4 | + 1 48.9 |
| 1257.5 | 808.75 | − 0.89719 | + 839 | − 0.52509 | − 3314 | + 2.6942 | + 140 | + 1.0395 | + 101 | 1650 20.3 | + 1 47.6 |
| 1260.0 | 810.00 | − 0.88880 | + 995 | − 0.55823 | − 3245 | + 2.7082 | + 133 | + 1.0496 | + 93 | 1652 7.9 | + 1 46.4 |
| 1262.5 | 811.25 | − 0.87885 | + 1145 | − 0.59068 | − 3173 | + 2.7215 | + 126 | + 1.0589 | + 87 | 1653 54.3 | + 1 45.4 |
| 1265.0 | 812.50 | − 0.86740 | + 1291 | − 0.62241 | − 3099 | + 2.7341 | + 120 | + 1.0676 | + 80 | 1655 39.7 | + 1 44.6 |
| 1267.5 | 813.75 | − 0.85449 | + 1431 | − 0.65340 | − 3023 | + 2.7461 | + 115 | + 1.0756 | + 75 | 1657 24.3 | + 1 43.8 |
| 1270.0 | 815.00 | − 0.84018 | + 1567 | − 0.68363 | − 2944 | + 2.7576 | + 109 | + 1.0831 | + 70 | 1659 8.1 | + 1 43.2 |
| 1272.5 | 816.25 | − 0.82451 | + 1700 | − 0.71307 | − 2862 | + 2.7685 | + 103 | + 1.0901 | + 64 | 1660 51.3 | + 1 42.7 |
| 1275.0 | 817.50 | − 0.80751 | + 1828 | − 0.74169 | − 2777 | + 2.7788 | + 98 | + 1.0965 | + 58 | 1662 34.0 | + 1 42.4 |
| 1277.5 | 818.75 | − 0.78923 | + 1952 | − 0.76946 | − 2690 | + 2.7886 | + 94 | + 1.1023 | + 53 | 1664 16.4 | + 1 42.1 |
| 1280.0 | 820.00 | − 0.76971 | + 2071 | − 0.79636 | − 2601 | + 2.7980 | + 90 | + 1.1076 | + 48 | 1665 58.5 | + 1 41.9 |
| 1282.5 | 821.25 | − 0.74900 | + 2187 | − 0.82237 | − 2511 | + 2.8070 | + 86 | + 1.1124 | + 43 | 1667 40.4 | + 1 41.9 |
| 1285.0 | 822.50 | − 0.72713 | + 2300 | − 0.84748 | − 2418 | + 2.8156 | + 81 | + 1.1167 | + 38 | 1669 22.3 | + 1 41.9 |
| 1287.5 | 823.75 | − 0.70413 | + 2409 | − 0.87166 | − 2323 | + 2.8237 | + 77 | + 1.1205 | + 34 | 1671 4.2 | + 1 41.9 |
| 1290.0 | 825.00 | − 0.68004 | + 2513 | − 0.89489 | − 2225 | + 2.8314 | + 74 | + 1.1239 | + 30 | 1672 46.1 | + 1 42.1 |
| 1292.5 | 826.25 | − 0.65491 | + 2614 | − 0.91714 | − 2125 | + 2.8388 | + 71 | + 1.1269 | + 27 | 1674 28.2 | + 1 42.3 |
| 1295.0 | 827.50 | − 0.62877 | + 2711 | − 0.93839 | − 2023 | + 2.8459 | + 68 | + 1.1296 | + 22 | 1676 10.5 | + 1 42.7 |
| 1297.5 | 828.75 | − 0.60166 | + 2804 | − 0.95862 | − 1919 | + 2.8527 | + 65 | + 1.1318 | + 18 | 1677 53.2 | + 1 43.0 |
| 1300.0 | 830.00 | − 0.57362 | + 2894 | − 0.97781 | − 1813 | + 2.8592 | + 63 | + 1.1336 | + 15 | 1679 36.2 | + 1 43.4 |
| 1302.5 | 831.25 | − 0.54468 | + 2980 | − 0.99594 | − 1704 | + 2.8655 | + 61 | + 1.1351 | + 12 | 1681 19.6 | + 1 43.9 |
| 1305.0 | 832.50 | − 0.51488 | + 3063 | − 1.01298 | − 1593 | + 2.8716 | + 59 | + 1.1363 | + 9 | 1683 3.5 | + 1 44.3 |
| 1307.5 | 833.75 | − 0.48425 | + 3141 | − 1.02891 | − 1481 | + 2.8775 | + 57 | + 1.1372 | + 5 | 1684 47.8 | + 1 44.9 |
| 1310.0 | 835.00 | − 0.45284 | + 3217 | − 1.04372 | − 1366 | + 2.8832 | + 54 | + 1.1377 | + 3 | 1686 32.7 | + 1 45.6 |
| 1312.5 | 836.25 | − 0.42067 | + 3289 | − 1.05738 | − 1249 | + 2.8886 | + 53 | + 1.1380 | 0 | 1688 18.3 | + 1 46.3 |
| 1315.0 | 837.50 | − 0.38778 | + 3357 | − 1.06987 | − 1130 | + 2.8939 | + 51 | + 1.1380 | − 3 | 1690 4.6 | + 1 47.0 |
| 1317.5 | 838.75 | − 0.35421 | + 3421 | − 1.08117 | − 1010 | + 2.8990 | + 50 | + 1.1377 | − 5 | 1691 51.6 | + 1 47.8 |
| 1320.0 | 840.00 | − 0.32000 | + 3481 | − 1.09127 | − 888 | + 2.9040 | + 49 | + 1.1372 | − 7 | 1693 39.4 | + 1 48.6 |
| 1322.5 | 841.25 | − 0.28519 | + 3538 | − 1.10015 | − 764 | + 2.9089 | + 48 | + 1.1365 | − 9 | 1695 28.0 | + 1 49.5 |
| 1325.0 | 842.50 | − 0.24981 | + 3589 | − 1.10779 | − 638 | + 2.9137 | + 47 | + 1.1356 | − 11 | 1697 17.5 | + 1 50.4 |
| 1327.5 | 843.75 | − 0.21392 | + 3635 | − 1.11417 | − 511 | + 2.9184 | + 47 | + 1.1345 | − 12 | 1699 7.9 | + 1 51.2 |
| 1330.0 | 845.00 | − 0.17757 | + 3678 | − 1.11928 | − 384 | + 2.9231 | + 46 | + 1.1333 | − 14 | 1700 59.1 | + 1 52.2 |
| 1332.5 | 846.25 | − 0.14079 | + 3717 | − 1.12312 | − 254 | + 2.9277 | + 45 | + 1.1319 | − 15 | 1702 51.3 | + 1 53.1 |
| 1335.0 | 847.50 | − 0.10362 | + 3751 | − 1.12566 | − 123 | + 2.9322 | + 44 | + 1.1304 | − 15 | 1704 44.4 | + 1 54.1 |
| 1337.5 | 848.75 | − 0.06611 | + 3781 | − 1.12689 | + 9 | + 2.9366 | + 44 | + 1.1289 | − 17 | 1706 38.5 | + 1 55.2 |
| 1340.0 | 850.00 | − 0.02830 | + 3806 | − 1.12680 | + 143 | + 2.9410 | + 45 | + 1.1272 | − 18 | 1708 33.7 | + 1 56.2 |
| 1342.5 | 851.25 | + 0.00976 | + 3826 | − 1.12537 | + 276 | + 2.9455 | + 45 | + 1.1254 | − 18 | 1710 29.9 | + 1 57.1 |
| 1345.0 | 852.50 | + 0.04802 | + 3842 | − 1.12261 | + 411 | + 2.9500 | + 45 | + 1.1236 | − 18 | 1712 27.0 | + 1 58.1 |
| 1347.5 | 853.75 | + 0.08644 | + 3852 | − 1.11850 | + 547 | + 2.9545 | + 45 | + 1.1218 | − 18 | 1714 25.1 | + 1 59.2 |
| 1350.0 | 855.00 | + 0.12496 | + 3858 | − 1.11303 | + 683 | + 2.9590 | + 45 | + 1.1200 | − 18 | 1716 24.3 | + 2 0.3 |
| 1352.5 | 856.25 | + 0.16354 | + 3858 | − 1.10620 | + 819 | + 2.9635 | + 46 | + 1.1182 | − 17 | 1718 24.6 | + 2 1.2 |
| 1355.0 | 857.50 | + 0.20212 | + 3853 | − 1.09801 | + 954 | + 2.9681 | + 46 | + 1.1165 | − 17 | 1720 25.8 | + 2 2.2 |
| 1357.5 | 858.75 | + 0.24065 | + 3843 | − 1.08847 | + 1089 | + 2.9727 | + 47 | + 1.1148 | − 17 | 1722 28.0 | + 2 3.2 |
| 1360.0 | 860.00 | + 0.27908 | + 3828 | − 1.07758 | + 1225 | + 2.9774 | + 47 | + 1.1131 | − 15 | 1724 31.2 | + 2 4.1 |
| 1362.5 | 861.25 | + 0.31736 | + 3809 | − 1.06533 | + 1360 | + 2.9821 | + 48 | + 1.1116 | − 14 | 1726 35.3 | + 2 5.0 |
| 1365.0 | 862.50 | + 0.35545 | + 3783 | − 1.05173 | + 1494 | + 2.9869 | + 49 | + 1.1102 | − 13 | 1728 40.3 | + 2 5.9 |
| 1367.5 | 863.75 | + 0.39328 | + 3752 | − 1.03679 | + 1627 | + 2.9918 | + 49 | + 1.1089 | − 12 | 1730 46.2 | + 2 6.8 |
| 1370.0 | 865.00 | + 0.43080 | + 3715 | − 1.02052 | + 1757 | + 2.9967 | + 50 | + 1.1077 | − 10 | 1732 53.0 | + 2 7.7 |
| 1372.5 | 866.25 | + 0.46795 | + 3675 | − 1.00295 | + 1886 | + 3.0017 | + 51 | + 1.1067 | − 8 | 1735 0.7 | + 2 8.4 |

| $v_0$ | $v_1$ | $x$ | Diff. | $y$ | Diff. | $\varrho$ | Diff. | $r$ | Diff. | $v$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ° | ° | | | | | | | | | ° ′ | ° ′ |
| 1375.0 | 867.50 | + 0.50470 | + 3628 | − 0.98409 | + 2013 | + 3.0068 | + 52 | + 1.1059 | − 5 | 1737 9.1 | + 2 9.0 |
| 1377.5 | 868.75 | + 0.54098 | + 3576 | − 0.96396 | + 2138 | + 3.0120 | + 53 | + 1.1054 | − 4 | 1739 18.1 | + 2 9.6 |
| 1380.0 | 870.00 | + 0.57674 | + 3520 | − 0.94258 | + 2261 | + 3.0173 | + 54 | + 1.1050 | − 1 | 1741 27.7 | + 2 10.7 |
| 1382.5 | 871.25 | + 0.61194 | + 3459 | − 0.91997 | + 2380 | + 3.0227 | + 55 | + 1.1049 | + 2 | 1743 37.9 | + 2 10.6 |
| 1385.0 | 872.50 | + 0.64653 | + 3394 | − 0.89617 | + 2497 | + 3.0282 | + 57 | + 1.1051 | + 4 | 1745 48.5 | + 2 11.0 |
| 1387.5 | 873.75 | + 0.68047 | + 3324 | − 0.87120 | + 2611 | + 3.0339 | + 58 | + 1.1055 | + 7 | 1747 59.5 | + 2 11.4 |
| 1390.0 | 875.00 | + 0.71371 | + 3249 | − 0.84509 | + 2720 | + 3.0397 | + 59 | + 1.1062 | + 9 | 1750 10.9 | + 2 11.7 |
| 1392.5 | 876.25 | + 0.74620 | + 3171 | − 0.81789 | + 2827 | + 3.0456 | + 60 | + 1.1071 | + 13 | 1752 22.6 | + 2 11.8 |
| 1395.0 | 877.50 | + 0.77791 | + 3088 | − 0.78962 | + 2930 | + 3.0516 | + 61 | + 1.1084 | + 17 | 1754 34.4 | + 2 11.8 |
| 1397.5 | 878.75 | + 0.80879 | + 3002 | − 0.76032 | + 3029 | + 3.0577 | + 63 | + 1.1101 | + 19 | 1756 46.2 | + 2 11.8 |
| 1400.0 | 880.00 | + 0.83881 | + 2912 | − 0.73003 | + 3123 | + 3.0640 | + 64 | + 1.1120 | + 23 | 1758 58.0 | + 2 11.7 |
| 1402.5 | 881.25 | + 0.86793 | + 2819 | − 0.69880 | + 3212 | + 3.0704 | + 65 | + 1.1143 | + 26 | 1761 9.7 | + 2 11.5 |
| 1405.0 | 882.50 | + 0.89612 | + 2724 | − 0.66668 | + 3298 | + 3.0769 | + 67 | + 1.1169 | + 30 | 1763 21.2 | + 2 11.1 |
| 1407.5 | 883.75 | + 0.92336 | + 2627 | − 0.63370 | + 3378 | + 3.0836 | + 69 | + 1.1199 | + 34 | 1765 32.3 | + 2 10.7 |
| 1410.0 | 885.00 | + 0.94963 | + 2527 | − 0.59992 | + 3454 | + 3.0905 | + 71 | + 1.1233 | + 37 | 1767 43.0 | + 2 10.2 |
| 1412.5 | 886.25 | + 0.97490 | + 2425 | − 0.56538 | + 3524 | + 3.0976 | + 72 | + 1.1270 | + 41 | 1769 53.2 | + 2 9.7 |
| 1415.0 | 887.50 | + 0.99915 | + 2321 | − 0.53014 | + 3590 | + 3.1048 | + 74 | + 1.1311 | + 44 | 1772 2.9 | + 2 9.0 |
| 1417.5 | 888.75 | + 1.02236 | + 2216 | − 0.49424 | + 3649 | + 3.1122 | + 75 | + 1.1355 | + 49 | 1774 11.9 | + 2 8.2 |
| 1420.0 | 890.00 | + 1.04452 | + 2111 | − 0.45775 | + 3704 | + 3.1197 | + 77 | + 1.1404 | + 53 | 1776 20.1 | + 2 7.3 |
| 1422.5 | 891.25 | + 1.06563 | + 2004 | − 0.42071 | + 3756 | + 3.1274 | + 80 | + 1.1457 | + 56 | 1778 27.4 | + 2 6.3 |
| 1425.0 | 892.50 | + 1.08567 | + 1898 | − 0.38315 | + 3800 | + 3.1354 | + 81 | + 1.1513 | + 60 | 1780 33.7 | + 2 5.2 |
| 1427.5 | 893.75 | + 1.10465 | + 1790 | − 0.34515 | + 3840 | + 3.1435 | + 83 | + 1.1573 | + 64 | 1782 38.9 | + 2 4.1 |
| 1430.0 | 895.00 | + 1.12255 | + 1682 | − 0.30675 | + 3877 | + 3.1518 | + 85 | + 1.1637 | + 68 | 1784 43.0 | + 2 2.9 |
| 1432.5 | 896.25 | + 1.13937 | + 1576 | − 0.26798 | + 3907 | + 3.1603 | + 87 | + 1.1705 | + 71 | 1786 45.9 | + 2 1.6 |
| 1435.0 | 897.50 | + 1.15513 | + 1471 | − 0.22891 | + 3934 | + 3.1690 | + 89 | + 1.1776 | + 75 | 1788 47.5 | + 2 0.2 |
| 1437.5 | 898.75 | + 1.16984 | + 1365 | − 0.18957 | + 3957 | + 3.1779 | + 91 | + 1.1851 | + 78 | 1790 47.7 | + 1 58.9 |
| 1440.0 | 900.00 | + 1.18349 | | − 0.15000 | | + 3.1870 | | + 1.1929 | | 1792 46.6 | |

Einen besseren Ueberblick über die Bahn und die Bewegung des Punktes $C$, als durch Vergleich obiger Zahlen möglich wäre, gewinnt man auf graphischem Wege. Bevor ich jedoch hiezu die nöthigen Erläuterungen gebe, will ich nur noch einige Bemerkungen, die Genauigkeit der obigen Zahlen betreffend, machen.

Obwohl bei Berechnung obiger Zahlen, welche durchwegs fünfstellig geführt wurde, mit möglichster Sorgfalt vorgegangen wurde, unterliegt es wohl keinem Zweifel, dass die Ungenauigkeit der Resultate, namentlich der späteren, eine wesentlich grössere sei und zwar aus folgenden Gründen: Erstlich ist für unsern Fall, wo die Störungen sehr grosse Beträge erreichten, die Berechnung der Störungen in den rechtwinkligen Coordinaten an sich nicht sehr geeignet, da die Zerlegung der Störungen nach den beiden Axen dieselben noch grösser erscheinen lässt, wie sie in der That sind. Auch war der Betrag der einzelnen Störungsincremente

manchmal so gross, dass es nöthig gewesen wäre, um die letzten Einheiten sicherzustellen, wenigstens sechsstellige Tafeln anzuwenden. In Folge der doppelten Summation, welche nun über diese Incremente auszuführen ist, addiren sich aber nicht nur diese Fehler der einzelnen Incremente, sondern deren Unsicherheit geht wesentlich vergrössert auf die späteren Resultate über. Ist aber in solcher directer Weise der Fehler einmal bis zu einem merkbaren Betrag gestiegen, so beeinflusst er auch weiter in indirecter Weise die Genauigkeit der Resultate, denn aus der Zugrundelegung eines fehlerhaften Werthes der gestörten Coordinaten resultirt nothwendig wieder ein fehlerhafter Werth des hiemit berechneten Störungsincrements.

Warum ich demungeachtet die Störungen der rechtwinkligen Coordinaten ermittelte, ist bereits früher motivirt worden und dass ich hier auch auf die Erreichung einer grösseren Genauigkeit kein besonderes Gewicht legte, findet seine Erklärung in dem Umstand, dass ich vorerst nur ein beiläufiges Bild von der Bewegung des Körpers $C$ gewinnen wollte, was durch die obige Rechnung auch in denkbar kürzester Zeit erreicht wurde.

Wirft der Leser einen Blick auf die Tafel I, so bemerkt er im Centrum einen grösseren Punkt $A$, der die Lage des Centralkörpers markirt, ferner zwei concentrische Kreise, wovon der kleinere (⁓⁓) die Bahn des Punktes $C$ darstellt, welche derselben beschrieben würde, wenn der Körper $B$ keinen störenden Einfluss auf ihn ausüben würde, während der grössere uns die Bahn des störenden Körpers $B$ versinnlichen soll. Dieser letztere Kreis wurde statt mit dem Radius 2 bloss mit dem Radius 1.5 beschrieben, damit sich das Format der Zeichnung nicht allzu gross gestalte. Von den Punkten (1) beginnend, hat man sich die Bewegung in der Richtung der Pfeile vor sich gehend zu denken. Die gleiche Nummer führenden Punkte theils in der Bahn des störenden Körpers $B$, theils in der wahren (gestörten) Bahn des gestörten Körpers $C$ markiren den jeweiligen gleichzeitigen Stand dieser zwei Körper. Die dritte schlingenförmige Linie gibt uns also ein Bild von der relativen Bewegung des Körpers $C$ um den Punkt $A$.

Die Hauptmomente lassen sich in folgende Sätze zusammenfassen:

1) Innerhalb einer Zeit, welche der doppelten Umlaufszeit des störenden Körpers $B$ entspricht, bleibt der Körper $C$ bei dem Körper $A$, also jenem Körper, den er auch in der ungestörten Bahn hätte umkreisen müssen.

2) Eine Wiederholung des Anfangszustandes, d. h. dass die drei Körper sowohl in einer Linie stehen, als dass auch die Entfernung $AC$ nahe gleich der Einheit wird, tritt innerhalb dieser Zeit dreimal ein, sohin entspricht diese Periode einer Zunahme der Länge des störenden Körpers von rund $240^0$, aber erst nach $3 \times 240^0$ ist auch die Position der Verbindungslinie der drei Körper nahezu dieselbe wie zu Beginn der Bewegung.

3) Innerhalb jeder Periode beschreibt der Körper $C$ eine $\omega$-förmige Schlinge um den Körper $A$, nähert sich hiebei demselben einmal bis auf eine Distanz von rund $\frac{1}{4}$ der anfänglichen Distanz, und zwar fällt der Moment des Periheldurchgangs nahezu zusammen mit dem Zeitpunkt, in welchem der Körper $C$ die Verbindungslinie der Körper $AB$ schneidet. Die drei Körper stehen sohin wieder nahe in einer Geraden, doch nimmt der Körper $C$ nun seinen Platz zwischen $A$ und $B$ ein.

Bisher haben wir das rechtwinklige Axensystem als fix angenommen und zwar fiel der Ursprung mit dem Punkt $A$ zusammen und die $+X$-Axe war durch jenen Punkt gelegt worden, welchen der Körper $C$ bei Beginn der Bewegung einnahm. Eine bessere Vorstellung darüber, wie nahe die in den einzelnen Perioden beschriebenen Bahnen zusammenfallen, gewinnt man aber aus dem Anblick der Tafel II, welche die relative Bewegung des Punktes $C$ um $A$ bezogen auf ein bewegliches Coordinatensystem wiedergibt.

Das bewegliche System wurde derart gewählt:

Von der Anfangslage $XAY$ ausgehend, drehe sich das rechtwinklige Axensystem mit gleichförmiger Geschwindigkeit um den Punkt $A$ in derselben Richtung wie die Bewegung der Körper $B$ und $C$ stattfindet und ferner führe es gerade eine volle Umdrehung in jener Zeit aus, welche der störende Körper $B$ benöthigt, um einmal seine Bahn zu durchlaufen. Die Coordinaten des Punktes $C$ bezogen auf das neue bewegliche System sind dann definirt durch:

$$\mathfrak{x} = r \cos (v - n_1 t)$$
$$\mathfrak{y} = r \sin (v - n_1 t)$$

Da die obige Tafel uns sofort: $v_1 = v_{01} + n_1 t = 180 + n_1 t$ gibt, so berechnen sich leicht die neuen Coordinaten nach:

$$\mathfrak{x} = -r\cos(v - v_1)$$
$$\mathfrak{y} = -r\sin(v - v_1)$$

Durch Construction der solcherweise berechneten Coordinaten gelangte ich zu der auf Tafel II wiedergegebenen Figur, welche näher zu erläutern wohl nicht nöthig sein dürfte.

Während der zwei ersten Umläufe fallen, wie man bemerkt, die Bahnen nahezu zusammen. Der dritte Umlauf weist stärkere Differenzen auf.

Ich habe bereits früher auf die Ungenauigkeit der obigen, der Construction zu Grunde liegenden Zahlen hingewiesen. Die Frage liegt demnach nahe: sind die Differenzen zwischen den einzelnen Umläufen nicht etwa bloss scheinbare d. h. durch die Ungenauigkeit der Rechnung bedingte? Wäre dieses der Fall, so hätten wir es hier mit einer rein periodischen Bewegung zu thun, sind aber diese Differenzen reell, so belehrt uns sofort ein Blick auf Tafel II, dass nicht nur die Differenzen sehr rasch anwachsen, sondern dass auch die Bewegung in verhältnissmässig ausserordentlich kurzer Zeit einen völlig andern Charakter annehmen müsste. Die Frage nach dem periodischen oder nicht periodischen Charakter der Bewegung einer Entscheidung näher zu bringen oder zuzuführen, war das nächste Ziel, dem ich zustrebte, und ich glaube, auch zustreben musste.

Dass die bisherigen Resultate uns hierauf aber noch keine definitive Antwort zu geben erlauben, bedarf wohl nach den obigen Bemerkungen über deren mögliche Unsicherheit keiner weiteren Begründung.

## 2.

Wenn man auf numerischem Weg eine Entscheidung der im Vorangehenden definirten Frage erreichen will, kann man in zweifacher Weise vorgehen. Man wird nämlich entweder auf allgemeine Störungen übergehen oder aber nochmals, jedoch mit grösserer Genauigkeit, specielle Störungen berechnen, wobei es aber klar ist, dass man sich hier auf die Wiederholung des ersten Sechstels der vorangehenden Rechnungen wird

beschränken können, denn wie man aus Tafel II ersieht, ist eine Periodicität nur dann möglich, wenn zwischen den beiden Bahnhälften (1 — 5) und (5 — 9) Identität und Symmetrie herrscht, was wieder zur Bedingung hat, dass das Perihel auf die verlängerte Linie *C A* zu liegen kommt. Letzteres müsste bei $v_0 = 240^0$ stattfinden.

Ich habe, — was, wie ich mir hier selbst zu bemerken erlaube, nicht sehr praktisch war, — zuerst den ersterwähnten weiteren Weg eingeschlagen, doch hatte mich hiezu einerseits die nahe Uebereinstimmung der einzelnen Umläufe verleitet, andererseits erhoffte ich auf diesem Weg zu einem weit allgemeineren Resultat zu gelangen.

Es sollen nun erst jene Ausdrücke abgeleitet werden, welche der Berechnung der allgemeinen Störungen zu Grunde gelegt wurden.

Interpolirt man aus der früher gegebenen Tafel der gestörten Coordinaten für jene Momente, wo $v - v_1$ beziehungsweise $= -180^0\,0'$; $= -157^0\,30'$; $= -135^0\,0'$ ist, also für je $22\frac{1}{2}^0$ die entsprechenden Werthe von $r$ und $v$, so erhält man die in folgendem Täfelchen wiedergegebenen Werthe:

| $(v - v_1)$ | $r$ | Diff. | $v$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|
| ° ′ | | | ° ′ | ° ′ |
| — 180 0 | + 1.0000 | + 431 | 0 0.0 | + 46 56.2 |
| — 157 30 | + 1.0431 | + 441 | 46 56.2 | + 66 52.7 |
| — 135 0 | + 1.0872 | — 3762 | 113 48.9 | + 55 29.5 |
| — 112 30 | + 0.7110 | — 2137 | 169 18.4 | + 30 48.9 |
| — 90 0 | + 0.4973 | — 1128 | 200 7.3 | + 26 21.0 |
| — 67 30 | + 0.3845 | — 607 | 226 28.3 | + 24 35.9 |
| — 45 0 | + 0.3238 | — 320 | 251 4.2 | + 24 24.2 |
| — 22 30 | + 0.2918 | — 83 | 275 28.4 | + 23 44.2 |
| 0 0 | + 0.2835 | + 71 | 299 12.6 | + 23 47.7 |
| + 22 30 | + 0.2906 | + 298 | 323 0.3 | + 24 29.7 |
| + 45 0 | + 0.3204 | + 607 | 347 30.0 | + 25 3.5 |
| + 67 30 | + 0.3811 | + 1080 | 372 33.5 | + 26 14.5 |
| + 90 0 | + 0.4891 | + 2004 | 398 48.0 | + 29 45.3 |
| + 112 30 | + 0.6895 | + 3802 | 428 33.3 | + 51 53.3 |
| + 135 0 | + 1.0697 | — 113 | 480 26.6 | + 70 58.8 |
| + 157 30 | + 1.0584 | | 551 25.4 | |

| $(v-v_1)$ | $r$ | Diff. | $v$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|
| ° ′ | | | ° ′ | ° ′ |
| + 180 0 | + 1.0124 | + 402 | 599 52.8 | + 48 9.3 |
| + 202 30 | + 1.0526 | + 207 | 648 2.1 | + 67 30.4 |
| + 225 0 | + 1.0733 | — 3627 | 715 32.5 | + 53 21.3 |
| + 247 30 | + 0.7106 | — 2079 | 768 53.8 | + 30 31.1 |
| + 270 0 | + 0.5027 | — 1111 | 799 24.9 | + 26 15.5 |
| + 292 30 | + 0.3916 | — 591 | 825 40.4 | + 24 24.6 |
| + 315 0 | + 0.3325 | — 348 | 850 5.0 | + 25 1.6 |
| + 337 30 | + 0.2977 | — 95 | 875 6.6 | + 23 52.2 |
| + 360 0 | + 0.2882 | + 97 | 898 58.8 | + 23 51.0 |
| + 382 30 | + 0.2979 | + 321 | 922 49.8 | + 24 40.5 |
| + 405 0 | + 0.3300 | + 621 | 947 30.3 | + 25 1.1 |
| + 427 30 | + 0.3921 | + 1105 | 972 31.4 | + 26 9.6 |
| + 450 0 | + 0.5026 | + 2091 | 998 41.0 | + 30 40.0 |
| + 472 30 | + 0.7117 | + 3627 | 1029 21.0 | + 53 37.1 |
| + 495 0 | + 1.0744 | — 358 | 1082 58.1 | + 66 3.4 |
| + 517 30 | + 1.0386 | | 1149 1.5 | |

Schon bei dem Anblick der vorliegenden Zahlen drängte sich mir die Ueberzeugung auf, dass sich $r$ und $v$ als Reihen nach Vielfachen von $(v-v_1)$ nummerisch genähert darstellen lassen. Das Interesse, welches dieser Umstand an sich beansprucht, erhöht sich aber noch wesentlich dadurch, dass, wie wir sehen werden, die Darstellung eine über Erwarten gute wird.

Schreiben wir den Radiusvector in der Form:

$$r = c_0 + c_1 \cos(v-v_1) + c_2 \cos 2(v-v_1) + \ldots\ldots c_8 \cos 8(v-v_1)$$
$$+ s_1 \sin(v-v_1) + s_2 \sin 2(v-v_1) + \ldots\ldots s_7 \sin 7(v-v_1)$$

so lassen sich bekanntlich die Entwicklungscoefficienten $c_\nu$ und $s_\nu$ nach bekannten Formeln sofort berechnen. Indem ich zuerst die 15 speciellen Werthe von $r$, welche für: $v-v_1 = -180^0\,0'$ bis: $v-v_1 = +157^0\,30'$, hierauf jene, welche von $v-v_1 = +180^0\,0'$ bis $v-v_1 = 517^0\,30'$ gelten, zu Grunde legte, erhielt ich die nachfolgenden nummerischen Coefficienten in der Entwicklung des Radiusvectors.

| I | II |
|---|---|
| $r = + 0.62006$ | $r = + 0.62555$ |
| $- 0.42907 \cos (v - v_1)$ | $- 0.42907 \cos (v - v_1)$ |
| $+ 0.08290 \cos 2 (v - v_1)$ | $+ 0.07941 \cos 2 (v - v_1)$ |
| $+ 0.04480 \cos 3 (v - v_1)$ | $+ 0.04480 \cos 3 (v - v_1)$ |
| $- 0.06640 \cos 4 (v - v_1)$ | $- 0.06304 \cos 4 (v - v_1)$ |
| $+ 0.04347 \cos 5 (v - v_1)$ | $+ 0.04347 \cos 5 (v - v_1)$ |
| $- 0.00862 \cos 6 (v - v_1)$ | $- 0.00559 \cos 6 (v - v_1)$ |
| $- 0.01745 \cos 7 (v - v_1)$ | $- 0.01745 \cos 7 (v - v_1)$ |
| $+ 0.01381 \cos 8 (v - v_1)$ | $+ 0.01396 \cos 8 (v - v_1)$ |
| $- 0.00507 \sin (v - v_1)$ | $- 0.00507 \sin (v - v_1)$ |
| $+ 0.00190 \sin 2 (v - v_1)$ | $+ 0.00075 \sin 2 (v - v_1)$ |
| $+ 0.00200 \sin 3 (v - v_1)$ | $+ 0.00199 \sin 3 (v - v_1)$ |
| $- 0.00432 \sin 4 (v - v_1)$ | $+ 0.00185 \sin 4 (v - v_1)$ |
| $+ 0.00365 \sin 5 (v - v_1)$ | $+ 0.00364 \sin 5 (v - v_1)$ |
| $- 0.00162 \sin 6 (v - v_1)$ | $+ 0.00165 \sin 6 (v - v_1)$ |
| $+ 0.00067 \sin 7 (v - v_1)$ | $+ 0.00067 \sin 7 (v - v_1)$ |

Sowohl die Differenzen der Cosinusglieder, wie sämmtliche Coefficienten der Sinusglieder liegen unter der Grenze der Unsicherheit der zu Grunde gelegten Werthe des Radiusvectors. Vernachlässigt man letztere ganz und nimmt das Mittel der Cosinus-Coefficienten, so resultirt:

$$
\begin{aligned}
(r) = & + 0.62280 \\
& - 0.42907 \cos (v - v_1) \\
& + 0.08115 \cos 2 (v - v_1) \\
& + 0.04480 \cos 3 (v - v_1) \\
& - 0.06472 \cos 4 (v - v_1) \\
& + 0.04347 \cos 5 (v - v_1) \\
& - 0.00710 \cos 6 (v - v_1) \\
& - 0.01745 \cos 7 (v - v_1) \\
& + 0.01388 \cos 8 (v - v_1)
\end{aligned}
$$

Diesen Ausdruck für den gestörten Radiusvector habe ich für eine grosse Zahl beliebig gewählter Werthe von $(v - v_1)$ mit jenen Werthen verglichen, welche uns die Haupttafel der gestörten Coordinaten für $r$ gibt. Die grösste Differenz erreichte den Betrag von $-0.016$, doch wurden die meisten Werthe des Radiusvectors fast völlig durch obigen Ausdruck $(r)$ dargestellt. Die Behauptung, dass obiger Ausdruck $(r)$ als

eine erste Näherung an den wahren Werth anzusehen sei, erscheint demnach zur Genüge gerechtfertigt.

Die numerischen Werthe der Coefficienten in der Entwicklung für die Länge, wenn

$$v = nt + C_0 + C_1 \cos(v - v_1) + C_2 \cos 2(v - v_1) + \ldots . C_8 \cos 8(v - v_1)$$
$$+ S_1 \sin(v - v_1) + S_2 \sin 2(v - v_1) + \ldots . S_7 \sin 7(v - v_1)$$

angenommen wird, berechnen sich ebenfalls leicht durch mechanische Quadratur, nur muss vorher von den speciellen Werthen von $v$, welche in obigem Täfelchen angesetzt sind, das Glied $nt$ in Abzug gebracht werden.

Da mit Rücksicht auf die oben getroffene Wahl über die Einheit der Masse und der Entfernung die mittlere Bewegung des störenden Körpers $B$ mit $n_1 = \frac{1}{2} \cdot 57^0 29578$ anzunehmen ist, und sich ferner — von einer kleinen Correction, deren Betrag die Unsicherheitsgrenze der $v$ nicht überschreitet, abgesehen — $n : n_1 = 5 : 2$ verhält, resultirt für $n$ der Werth $n = \frac{5}{4} \cdot 57^0 29578 = 71^0 619725$. Es mag hier noch beigefügt werden, dass die Dauer der Periode: 8.37758 Zeittheile beträgt, und dass als Zeiteinheit jene Zeit anzunehmen ist, welche der störende Körper $B$ benöthigt, um 28.64789 Grade in seiner Bahn zurückzulegen.

Auch hier zeigte es sich wieder, dass bei Zugrundelegung der Werthe von $v$ zwischen $v - v_1 = -180^0 0'$ bis $v - v_1 = +157^0 30'$ einerseits, und $v - v_1 = 180^0 0'$ bis $v - v_1 = 517^0 30'$ andrerseits, für die Coefficienten $C$ und $S$ nahezu dieselben Werthe resultirten, ich lasse daher gleich die Mittelwerthe folgen. Es ist:

$$\begin{aligned}(v) = &+ 71\overset{0}{.}619725\, t \\ &- 48.71580 \sin(v - v_1) \\ &+ \phantom{0}6.18601 \sin 2(v - v_1) \\ &+ \phantom{0}4.35290 \sin 3(v - v_1) \\ &- \phantom{0}5.36889 \sin 4(v - v_1) \\ &+ \phantom{0}3.03586 \sin 5(v - v_1) \\ &- \phantom{0}1.02105 \sin 6(v - v_1) \\ &- \phantom{0}0.05451 \sin 7(v - v_1) \\ \\ &+ \phantom{0}1\overset{0}{.}11975 \\ &+ \phantom{0}0.24527 \cos(v - v_1) \\ &- \phantom{0}0.12121 \cos 2(v - v_1)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(v) = & - 0\overset{\circ}{.}16946 \cos 3\,(v - v_1) \\
& + 0.25104 \cos 4\,(v - v_1) \\
& - 0.07391 \cos 5\,(v - v_1) \\
& - 0.01504 \cos 6\,(v - v_1) \\
& + 0.11061 \cos 7\,(v - v_1) \\
& - 0.11205 \cos 8\,(v - v_1)
\end{aligned}
$$

Beschränkt man sich hier auf die Mitnahme der ersten acht Glieder und vergleicht die hieraus folgenden Werthe von $v$ mit den Tafelwerthen, so überzeugt man sich leicht, dass letztere durchwegs bis auf einige Grade dargestellt werden. Wir werden demnach auch hier die ersten acht Glieder in obiger Entwicklung von $(v)$ als erste Näherung ansehen können.

Durch die bisherige Entwicklung erscheint der Radiusvector und die Länge in der gestörten Bahn näherungsweise durch Reihen dargestellt, welche nach Vielfachen der Differenzen der Längen des gestörten und störenden Körpers fortschreiten. Wir werden aber in der Folge auch von Reihen Gebrauch machen, welche nach Vielfachen von $(n - n_1)\,t$ fortschreiten, ich will daher deren Entwicklung gleich hier anschliessen.

Mit Zugrundelegung des obigen Werthes von $n - n_1 = 42^{\circ}971835$ lassen sich sofort die Momente bestimmen, wo $(n - n_1)\,t$ beziehungsweise $= 0$, $= 22^{\circ}30'$, $= 45^{\circ}0'$ etc. wird. Interpolirt man nun weiter für diese Momente aus der Tafel der gestörten Coordinaten die zugehörigen Werthe von $r$ und $v$ und benützt dieselben zur Bestimmung der numerischen Werthe der Coefficienten, so gelangt man zu den folgenden Entwicklungen:

$$
\begin{aligned}
(r) = & + 0.9474 \\
& + 0.2070 \cos (n - n_1)\,t \\
& - 0.2040 \cos 2\,(n - n_1)\,t \\
& + 0.0898 \cos 3\,(n - n_1)\,t \\
& - 0.0590 \cos 4\,(n - n_1)\,t \\
& + 0.0378 \cos 5\,(n - n_1)\,t \\
& - 0.0305 \cos 6\,(n - n_1)\,t \\
& + 0.0236 \cos 7\,(n - n_1)\,t \\
& - 0.0121 \cos 8\,(n - n_1)\,t
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
(v) = & \phantom{-}\ 71\overset{\circ}{.}619725\,t \\
& - 61.4030 \sin (n - n_1)\,t \\
& + 35.1430 \sin 2\,(n - n_1)\,t \\
& - 17.3200 \sin 3\,(n - n_1)\,t \\
& + 11.1070 \sin 4\,(n - n_1)\,t \\
& - \phantom{1}6.8690 \sin 5\,(n - n_1)\,t \\
& + \phantom{1}4.3150 \sin 6\,(n - n_1)\,t \\
& - \phantom{1}2.0240 \sin 7\,(n - n_1)\,t
\end{aligned}
$$

$$(r) = -0.0017 \sin (n-n_1)\,t$$
$$-0.0081 \sin 2\,(n-n_1)\,t$$
$$+0.0004 \sin 3\,(n-n_1)\,t$$
$$-0.0032 \sin 4\,(n-n_1)\,t$$
$$0 \sin 5\,(n-n_1)\,t$$
$$-0.0013 \sin 6\,(n-n_1)\,t$$
$$+0.0003 \sin 7\,(n-n_1)\,t$$

$$(v) = -0\overset{0}{.}3520$$
$$+0.7750 \cos (n-n_1)\,t$$
$$-1.2200 \cos 2\,(n-n_1)\,t$$
$$+0.7330 \cos 3\,(n-n_1)\,t$$
$$-0.5030 \cos 4\,(n-n_1)\,t$$
$$+0.6540 \cos 5\,(n-n_1)\,t$$
$$-0.6420 \cos 6\,(n-n_1)\,t$$
$$+0.9940 \cos 7\,(n-n_1)\,t$$
$$-0.4400 \cos 8\,(n-n_1)\,t$$

Der Vergleich dieser Entwicklungen für *(r)* und *(v)* mit den Tafelwerthen ergab wieder nur geringe Differenzen, ja durch eine Correction von + 0.0214967 des mit der Zeit multiplicirten Coefficienten lässt es sich erreichen, dass die obigen Ausdrücke während des ersten Umlaufs fast völlig die gestörten Coordinaten darstellen. Aus diesem Grund habe ich auch bei Berechnung der allgemeinen Störungen mit Zugrundelegung der vorstehenden Reihen statt $71^0 6197250$ den Werth $71^0 6412217$ angenommen.

Stellt man diese Entwicklungen von $v$ der vorangehenden gegenüber, so bemerkt man wohl eine geringere Convergenz der Coefficienten. Besonders auffällig ist aber der Umstand, dass hier sowohl in der Reihe für den Radiusvector als für die Länge ein regelmässiger Zeichenwechsel eintritt, welcher Umstand mir dafür zu sprechen scheint, dass die Entwicklung nach Vielfachen von $(n - n_1)\,t$ die naturgemässere sei.

Da das Verfahren, welches uns zu den vorstehenden Entwicklungen für den gestörten Radiusvector und die Länge geführt hat, rein interpolatorischen Charakter hat, ist es selbstverständlich nicht erlaubt, hieraus etwa auf die Form der Integrale der Differentialgleichungen unseres Problems oder auf den periodischen Charakter der Bewegung zu schliessen. Von der Erwägung ausgehend, dass die vorstehenden Ausdrücke *(r)* und *(v)* aber wenigstens zu Beginn der Bewegung als eine Näherung anzusehen sind, können wir dieselben der Berechnung der allgemeinen Störungen zu Grunde legen.

Denken wir uns zu diesem Zweck: $r = (r) + \varrho$ und $v = (v) + \chi$ gesetzt, ferner die Differentialgleichungen für $\varrho$ und $\chi$ aufgestellt und integrirt, so wird $\varrho$ und $\chi$ klein resultiren müssen, wenn die Bewegung eine

rein periodische ist, oder wenigstens innerhalb eines längeren Zeitraumes sich nahe wiederholt. Ergibt sich aber $\varrho$ und $\chi$ gross, so gestattet uns dieses sofort einen gegentheiligen Schluss.

### 3.

Bevor ich an die Darlegung der Berechnung der allgemeinen Störungen schreite, welche ich erstlich mit Zugrundelegung der Reihen nach Vielfachen von $(v - v_1)$ führte, will ich gleich vorausschicken, dass dieser Weg das Ziel nicht habe erreichen lassen und ich diese Rechnungen als aussichtslos habe abbrechen müssen. Ich gebe aber trotzdem in Kürze die Hauptmomente hier wieder, da aus denselben auch der Grund hiefür erhellt.

Bezeichnet man mit $\varrho$ und $\chi$ beziehungsweise jene Beträge, um welche $(r)$ und $(v)$ zu verbessern sind, damit diese Näherungen den wahren Radiusvector und die Länge in der gestörten Bahn völlig darstellen und bezeichnen wir letztere mit $r$ und $v$, so ist ja

$$r = (r) + \varrho, \qquad v = (v) + \chi.$$

Werden nun weiter diese Ausdrücke in die bekannten Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\left(r^2 \frac{dv}{dt}\right)}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial v} \\ &\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{\mu_1}{r}(1 + F) = \frac{\partial \Omega}{\partial r} \end{aligned}\right\} \quad 1$$

in welchen für unseren Fall: $\mu_1 = 1$, $F = 0$ zu setzen ist, substituirt und wird durchwegs nach Potenzen der kleinen Grössen $\varrho$ und $\chi$ entwickelt, so werden wir zu zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung in $\varrho$ und $\chi$ gelangen, deren Integration uns $\varrho$ und $\chi$ zu liefern hat.

Da das Verhältniss $\left[\frac{r}{r_1}\right]$ rund den Werth $\frac{1}{2}$ behält, ist eine Entwicklung der Störungsfunction[1]) nach steigenden Potenzen von $\left[\frac{r}{r_1}\right]$ möglich und zwar gilt:

---

1) Ich war bei der Entwicklung und numerischen Rechnung von $\Omega$ bis $\left[\frac{r}{r_1}\right]^{10}$ gegangen, doch beschränke ich mich hier auf die Angabe der Anfangsglieder.

$$\Omega = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{4\,r_1}\left(\frac{r}{r_1}\right)^2 + \cdots\cdot$$
$$+ \left[\frac{3}{8\,r_1}\left(\frac{r}{r_1}\right)^3 + \cdots\cdot\right]\cos(v - v_1) \text{ u. s. w.}$$

Denkt man sich einstweilen auf der rechten Seite statt $\left[\frac{r}{r_1}\right]$ unseren obigen Werth des gestörten Radiusvectors $\left[\frac{(r)}{r_1}\right]$ substituirt, so möge der Werth, den die linke Seite annimmt, mit $\Omega_0$ bezeichnet werden. Man hat nun durchwegs für $\left[\frac{r}{r_1}\right]^i \cdots \left[\frac{(r)+\varrho}{r_1}\right]^i$ zu substituiren. Entwickelt man diese Posten erst nach steigenden Potenzen der kleinen Grösse $\varrho$, vernachlässigt ferner alle Glieder mit $\varrho^3$ und denkt sich nach Substitution derselben auf der rechten Seite alle Glieder, welche beziehungsweise $\varrho$ und $\varrho^2$ als Factor haben, zusammengefasst, so nimmt die rechte Seite die Form an:

$$\Omega = \Omega_0 + \varrho\,\Omega_1 + \varrho^2\,\Omega_2 \qquad 2$$

und die Entwicklung ergab für $\Omega_1$ und $\Omega_2$ beziehungsweise:

$$\Omega_1 = \frac{1}{2\,r_1^2}\left(\frac{r}{r_1}\right) + \frac{9}{16\,r_1^2}\left(\frac{r}{r_1}\right)^3 + \cdots\cdot$$
$$+ \left[\frac{9}{8\,.\,r_1^2}\left(\frac{r}{r_1}\right)^2 + \cdots\cdot\right]\cos(v - v_1) \text{ u. s. w.}$$
$$\Omega_2 = \frac{1}{4\,r_1^3} + \frac{27}{32\,r_1^3}\left(\frac{r}{r_1}\right)^2 + \cdots\cdot$$
$$+ \left[\frac{9}{8\,.\,r_1^3}\left(\frac{r}{r_1}\right) + \cdots\cdot\right]\cos(v - v_1) \text{ u. s. w.}$$

Auf der rechten Seite der vorstehenden Ausdrücke hat man sich durchwegs $(r)$ statt $r$ geschrieben zu denken, doch liess ich der kürzeren Schreibweise wegen die Klammer weg.

Durch Differentiation des obigen Ausdrucks (2) für $\Omega$ nach $\varrho$ gewinnt man sofort:

$$\frac{\partial\,\Omega}{\partial\,r} = \Omega_1 + 2\,\varrho\,\Omega_2$$

und nach $v$ differenzirt, wird:

$$\frac{\partial\,\Omega}{\partial\,v} = \left[\frac{\partial\,\Omega_0}{\partial\,v}\right] + \varrho\left[\frac{\partial\,\Omega_1}{\partial\,v}\right]$$

wenn man sich bloss auf die Mitnahme der Glieder erster Ordnung in Bezug auf $\varrho$ beschränkt.

$\Omega_0$ und $\Omega_1$ haben die Form:

$$\Omega_i = f_0\left(\frac{r}{r_1}\right) + f_1\left(\frac{r}{r_1}\right)\cos(v - v_1) + \cdots$$

Die $f_i\left(\frac{r}{r_1}\right)$ enthalten ebenfalls die $(v - v_1)$. Die hierin vorkommenden $v$ sind aber bekanntlich bei der Differentiation als constant anzusehen, wir haben daher:

$$\left[\frac{\partial\Omega_0}{\partial v}\right] = -\varphi_1\left(\frac{r}{r_1}\right)\sin(v - v_1) - 2\,\varphi_2\left(\frac{r}{r_1}\right)\sin 2\,(v - v_1) - \cdots$$

$$\varrho\left[\frac{\partial\Omega_1}{\partial v}\right] = \left[-\psi_1\left(\frac{r}{r_1}\right)\sin(v - v_1) - 2\,\psi_2\left(\frac{r}{r_1}\right)\sin 2\,(v - v_1) - \cdots\right]\varrho$$

wo:

$$\varphi_1\left(\frac{r}{r_1}\right) = \frac{9}{8\,r_1^2}\left(\frac{r}{r_1}\right)^2 + \frac{75}{64\,.\,r_1^2}\left(\frac{r}{r_1}\right)^4 + \cdots$$

$$\psi_1\left(\frac{r}{r_1}\right) = \frac{9}{8\,r_1^3}\left(\frac{r}{r_1}\right) + \frac{75}{32\,r_1^3}\left(\frac{r}{r_1}\right)^3 + \cdots \quad \text{u. s. w.}$$

Die Entwicklung der auf der rechten Seite der Differentialgleichungen (1) vorkommenden Grössen erscheint hiemit erledigt und durch Substitution des Werthes von $r_1 = 2$ und der numerischen Beträge von $\left[\frac{(r)}{r_1}\right]^i$ ergaben sich sofort auch die numerischen Beträge der Coefficienten in der Entwicklung der partiellen Ableitungen der Störungsfunction.

$\frac{\mu_1}{r^2}(1 + F)$ ist für unseren Fall und wenn wir uns auf die Mitnahme der Glieder erster Ordnung in Bezug auf $\varrho$ beschränken, unmittelbar hinzuschreiben:

$$\frac{\mu_1}{r^2}(1 + F) = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{(r^2)} + \frac{2\varrho}{(r)^3}$$

und erforderte dessen Berechnung nur die negativen Potenzen von $(r)$, welche sich durch mechanische Quadratur leicht berechnen liessen.

Durch Differentiation von $(v) = \alpha_0 t + \alpha_1 \sin(v - v_1) + \alpha_2 \sin 2\,(v - v_1) + \cdots$ wo: $v_1 = v_{01} + n_1 t$, $v = (v) + \chi$ ist, überzeugt man sich leicht, dass:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\chi}{dt} + \frac{d(v)}{dt} = \frac{-\alpha_0 + n_1 I}{-1 + I} - \frac{1}{-1 + I}\,\frac{d\chi}{dt}$$

wird, wo $I = \alpha_1 \cos(v - v_1) + 2\,\alpha_2 \cos 2\,(v - v_1) + \cdots$ geschrieben wurde.

Einige sehr einfache Entwicklungen lassen sofort auch erkennen, dass mit Vernachlässigung aller Glieder zweiter oder höherer Ordnung in Bezug auf $\varrho$ und $\chi$, so wie deren Producte die folgende Form für $\frac{d^2 v}{dt^2}$, $\frac{dr}{dt}$ wie $\frac{d^2 r}{dt^2}$ resultirt:

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = \Sigma h_i \sin i(v - v_1) + \Sigma j_i \sin i(v - v_1) \frac{d\chi}{dt} + \Sigma k_i \cos i(v - v_1) \frac{d^2\chi}{dt^2}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d\varrho}{dt} + \Sigma m_i \sin i(v - v_1) + \Sigma n_i \sin i(v - v_1) \frac{d\chi}{dt}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d^2\varrho}{dt^2} + \Sigma o_i \cos i(v - v_1) + \Sigma p_i \cos i(v - v_1) \frac{d\chi}{dt} + \Sigma q_i \cos i(v - v_1) \frac{d^2\chi}{dt^2}$$

Substituirt man nun diese entsprechenden Werthe in die zwei obigen Differentialgleichungen, so resultirt folgende Schlussform für die zweite derselben:

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} + \Sigma C_i \cos i(v - v_1)\varrho + \Sigma D_i \sin i(v - v_1) \frac{d^2\chi}{dt^2} + \Sigma E_i \cos i(v - v_1) \frac{d\chi}{dt}$$
$$= \Sigma F_i \cos i(v - v_1)$$

während die erste übergeht in:

$$\Sigma G_i \cos i(v - v_1) \frac{d^2\chi}{dt^2} + \Sigma H_i \sin i(v - v_1) \frac{d\chi}{dt} + \Sigma J_i \cos i(v - v_1) \frac{d\varrho}{dt}$$
$$+ \Sigma K_i \sin i(v - v_1)\varrho = \Sigma L_i \sin i(v - v_1)$$

Aus den vorliegenden kurzen Bemerkungen erhellt die Bedeutung der Coefficienten $C_i$ $D_i$ etc. Für dieselbe ergab eine näherungsweise geführte Rechnung folgende Werthe (in Theilen des Radius):

| | | | |
|---|---|---|---|
| $C_0 = -30.98..$ | $D_1 = +0.43..$ | $E_0 = +1.10..$ | $F_0 = -4.46..$ |
| $C_1 = -41.00..$ | $D_2 = -0.17..$ | $E_1 = -2.13..$ | $F_1 = -7.21..$ |
| $C_2 = -15.00..$ | $D_3 = -0.14..$ | $E_2 = +1.12..$ | $F_2 = -0.78..$ |

und durchwegs zeigte sich bei den Coefficienten mit höheren Indices eine so ausserordentlich langsame Convergenz, dass man bis $i = 20$ gehen müsste, um die erforderliche Genauigkeit in der Entwicklung zu erreichen.

Schon hieraus erhellt, dass eine genauere Entwicklung ganz bedeutende Zeit und Mühe erfordern würde. Nicht dieser Umstand war es aber, der mich bewog, in der Fortsetzung der Rechnungen einzuhalten, sondern die Erwägung, dass mir auf keinem Weg eine, wenn auch

nur näherungsweise Integration der so beschaffenen Differentialgleichungen erreichbar scheint. Von der Erwägung geleitet, dass vielleicht die Methode der unbestimmten Coefficienten uns dem Ziel näher brächte, bin ich von dem Versuch der Berechnung allgemeiner Störungen jedoch noch nicht abgestanden und habe die Differentialgleichung nochmals mit Zugrundelegung von $(r)$ und $(v)$ als Reihen nach Vielfachen der mittleren Anomalien entwickelt.

Die Methode der unbestimmten Coefficienten lässt sich hier schon aus dem Grund nicht anwenden, da sich wegen der auftretenden Factoren $\left(\frac{dv}{dt}\right)$ und $\left(\frac{d^2v}{dt^2}\right)$ die linke Seite übermässig complicirt.

Den Ausgangspunkt für die weiteren Rechnungen bilden demnach die obigen Reihen von $(r)$ und $(v)$ nach Vielfachen von $(n-n_1)t$ wo: $n = 71^0 6412217$; $n_1 = 28^0 6478900$, und wir setzen wieder:

$$r = (r) + \varrho; \qquad v = (v) + \chi.$$

Die Entwicklung der Differentialgleichungen für $\varrho$ und $\chi$ gestaltet sich hier viel kürzer und einfacher wie früher, da sich die auftretenden Ableitungen von $(r)$ und $(v)$ nach $t$ unmittelbar durch Differentiation obiger Reihen ergeben.

Legen wir wieder die obigen Differentialgleichungen zu Grunde und berücksichtigen wir, dass:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d^2 (r)}{dt^2} + \frac{d^2 \varrho}{dt^2}$$

$$r\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = (r)\left[\frac{d(v)}{dt}\right]^2 + \varrho\left[\frac{d(v)}{dt}\right]^2 + 2(r)\frac{d(v)}{dt}\frac{d\chi}{dt}$$

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(r)^2} + \frac{2}{(r)^3}\varrho$$

so sieht man sofort, dass sich die numerische Entwicklung der linken Seite der ersten Differentialgleichung ohne nennenswerthe Mühe ergibt.

Da: $$\frac{d\left(r^2\frac{dv}{dt}\right)}{dt} = \left[\frac{d(r)}{dt}\frac{d(v)}{dt} + \tfrac{1}{2}(r)\frac{d^2v}{dt^2}\right]2(r) + \left[\frac{d(r)}{dt}\frac{d(v)}{dt} + (r)\frac{d^2(v)}{dt^2}\right]2\varrho$$
$$+ 2(r)\frac{d(v)}{dt}\frac{d\varrho}{dt} + 2(r)\frac{d(r)}{dt}\frac{d\chi}{dt} + (r)^2\frac{d^2\chi}{dt^2}$$

gilt dasselbe auch für die linke Seite der zweiten Differentialgleichung.

Es erübrigte demnach nur mehr die Berechnung der partiellen Ableitungen der Störungsfunction.

Eine analytische Entwicklung der Störungsfunction gestaltet sich hier ziemlich weitläufig, ich habe es daher vorgezogen, die partiellen Ableitungen derselben direct durch mechanische Quadratur zu berechnen.

Es ist bekanntlich:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial v} = -\left[\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r_1^3}\right] r r_1 \sin(v - v_1)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial r} = \left[\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r_1^3}\right] r_1 \cos(v - v_1) - \frac{r}{\Delta^3}$$

und mit Beschränkung auf die ersten Potenzen von $\varrho$ und $\chi$ weiter:

$$r r_1 \sin(v - v_1) = (r) r_1 \sin[(v) - v_1] + \varrho \,.\, r_1 \sin[(v) - v_1] + \chi (r) \,.\, r_1 \cos[(v) - v_1]$$

$$r_1 \cos(v - v_1) = r_1 \cos[(v) - v_1] - \chi r_1 \sin[(v) - v_1)$$

endlich:

$$\frac{1}{\Delta^3} = \Delta_0^{-3} - 3\left((r) - r_1 \cos[(v) - v_1]\right) \varrho \,.\, \Delta_1^{-5} - 3\,(r) r_1 \sin[(v) - v_1]\, \chi\, \Delta_0^{-5}$$

wo:

$$\Delta_0^2 = (r) + r_1^2 - 2\,(r) r_1 \cos[(v) - v_1].$$

Substituiren wir diese Werthe in (2) und schreiben der Kürze halber für:

$$r_1 \sin[(v) - v_1] = 2 \sin[(v) - v_1] = i$$

$$r_1 \cos[(v) - v_1] = 2 \cos[(v) - v_1] = j$$

ferner:

$$J = \frac{1}{8} - \frac{1}{\Delta_0^3}$$

$$K = J \,.\, i + \frac{3_i}{\Delta_0^5}\,[(r)^2 - (r) j]$$

$$L = J \,.\, j \,.\, (r) + \frac{3_i^2}{\Delta_6^5}\,(r)^2$$

$$M = \frac{2}{\Delta_0^3} - \frac{3_i^2}{\Delta_0^5}$$

so gehen die obigen Ausdrücke über in:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial v} = J \,.\, i (r) + \varrho K + \chi L$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial r} = -\left[J \,.\, j + \frac{(r)}{\Delta_0^3}\right] + \varrho M + \chi K$$

Nachdem für aequidistanze Werthe von $(n-n_1)t$ erst $(v)$ und $(r)$ mit Hülfe der obigen Reihen berechnet worden war, wurden hiemit weiter für jedes Intervall die zugehörigen $i$, $j$, $J$, $K$, $L$ und $M$ bestimmt. Die Anwendung der mechanischen Quadratur auf diese speciellen Werthe lieferte schliesslich die nöthigen numerischen Coefficienten der $\varrho$ und $\chi$ freien, wie der mit $\varrho$ und $\chi$ multiplicirten Posten in den partiellen Ableitungen der Störungsfunction.

Die Entwicklung der einzelnen Posten der obigen Differentialgleichungen erschien hiemit vollendet und resultirten aus deren zeichengemässen Zusammenfassung die folgenden zwei Differentialgleichungen für $\varrho$ und $\chi$, in welchen ich nur der Kürze halber statt $(n-n_1)t$ durchwegs $N$ schreibe:

$$
\begin{array}{lll}
\frac{d^2\varrho}{dt^2} - 9.64945\cdot\varrho & -1.88780\,\frac{d\chi}{dt} & \\
\quad +14.05545 \cos N.\,\varrho & +0.24663 \cos N\,\frac{d\chi}{dt} & +0.18565 \sin N\cdot\chi \\
\quad -13.75896 \cos 2N\cdot\varrho & -0.55587 \cos 2N \;,, & -0.03257 \sin 2N \;,, \\
\quad +12.06121 \cos 3N \;,, & +0.33447 \cos 3N \;,, & +0.01903 \sin 3N \;,, \\
\quad -11.42242 \cos 4N \;,, & -0.29355 \cos 4N \;,, & +0.00216 \sin 4N \;,, \\
\quad +9.51468 \cos 5N \;,, & +0.20586 \cos 5N \;,, & -0.01150 \sin 5N \;,, \\
\quad -8.27227 \cos 6N \;,, & -0.14005 \cos 6N \;,, & +0.01869 \sin 6N \;,, \\
\quad +7.00402 \cos 7N \;,, & -0.03083 \cos 7N \;,, & -0.02139 \sin 7N \;,, \\
\quad -5.72964 \cos 8N \;,, & +0.28534 \cos 8N \;,, & +0.02032 \sin 8N \;,, \\
\quad +4.83951 \cos 9N \;,, & -0.16904 \cos 9N \;,, & -0.02246 \sin 9N \;,, \\
\quad -4.10690 \cos 10N \;,, & +0.09861 \cos 10N \;,, & +0.02138 \sin 10N \;,, \\
\quad +3.52423 \cos 11N \;,, & -0.05945 \cos 11N \;,, & -0.01909 \sin 11N \;,, \\
\quad -2.83496 \cos 12N \;,, & +0.03501 \cos 12N \;,, & +0.01590 \sin 12N \;,, \\
\quad +2.73417 \cos 13N \;,, & -0.01910 \cos 13N \;,, & -0.01226 \sin 13N \;,, \\
\quad -2.50539 \cos 14N \;,, & +0.00848 \cos 14N \;,, & +0.00834 \sin 14N \;,, \\
\quad +2.37805 \cos 15N \;,, & -0.00224 \cos 15N \;,, & -0.00424 \sin 15N \;,, \\
\quad -1.17063 \cos 16N \;,, & & 
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
= +0.38220 \\
\quad -0.80031 \cos N \\
\quad +0.71255 \cos 2N \\
\quad -0.46877 \cos 3N \\
\quad +0.28023 \cos 4N \\
\quad -0.07189 \cos 5N \\
\quad -0.20821 \cos 6N
\end{array}
$$

$$\begin{aligned}
= &+ 0.49252 \cos 7N \\
&- 0.58193 \cos 8N \\
&+ 0.13299 \cos 9N \\
&- 0.15318 \cos 10N \\
&+ 0.15018 \cos 11N \\
&- 0.14261 \cos 12N \\
&+ 0.12697 \cos 13N \\
&- 0.10594 \cos 14N \\
&+ 0.07798 \cos 15N \\
&- 0.04191 \cos 16N
\end{aligned}$$

| | | |
|---|---|---|
| $+ 0.94710 \frac{d^2\chi}{dt^2}$ | $- 0.24161 \sin N \frac{d\chi}{dt}$ | $+ 0.08969\, \chi$ |
| $+ 0.32199 \cos N \frac{d^2\chi}{dt^2}$ | $+ 0.49230 \sin 2N$ „ | $- 0.10243 \cos N \cdot \chi$ |
| $- 0.32803 \cos 2N$ „ | $- 0.23279 \sin 3N$ „ | $- 0.02378 \cos 2N$ „ |
| $+ 0.10341 \cos 3N$ „ | $+ 0.16663 \sin 4N$ „ | $+ 0.00758 \cos 3N$ „ |
| $- 0.05552 \cos 4N$ „ | $- 0.10834 \sin 5N$ „ | $+ 0.00361 \cos 4N$ „ |
| $+ 0.02888 \cos 5N$ „ | $+ 0.11951 \sin 6N$ „ | $- 0.00659 \cos 5N$ „ |
| $- 0.02655 \cos 6N$ „ | $- 0.12023 \sin 7N$ „ | $+ 0.00591 \cos 6N$ „ |
| $+ 0.02289 \cos 7N$ „ | $+ 0.04013 \sin 8N$ „ | $- 0.00441 \cos 7N$ „ |
| $- 0.00669 \cos 8N$ „ | $+ 0.08296 \sin 9N$ „ | $+ 0.00850 \cos 8N$ „ |
| $- 0.01229 \cos 9N$ „ | $- 0.05329 \sin 10N$ „ | $- 0.01297 \cos 9N$ „ |
| $+ 0.00710 \cos 10N$ „ | $+ 0.02998 \sin 11N$ „ | $+ 0.01099 \cos 10N$ „ |
| $- 0.00363 \cos 11N$ „ | $- 0.01866 \sin 12N$ „ | $- 0.00905 \cos 11N$ „ |
| $+ 0.00207 \cos 12N$ „ | $+ 0.01148 \sin 13N$ „ | $+ 0.00720 \cos 12N$ „ |
| $- 0.00118 \cos 13N$ „ | $- 0.00680 \sin 14N$ „ | $- 0.00571 \cos 13N$ „ |
| $+ 0.00065 \cos 14N$ „ | $+ 0.00321 \sin 15N$ „ | $+ 0.00461 \cos 14N$ „ |
| $- 0.00029 \cos 15N$ „ | $- 0.00088 \sin 16N$ „ | $- 0.00395 \cos 15N$ „ |
| $+ 0.00007 \cos 16N$ „ | | $+ 0.00187 \cos 16N$ „ |

| | | |
|---|---|---|
| $+ 1.88780 \frac{d\varrho}{dt}$ | $+ 0.37071 \sin N \cdot \varrho$ | $= - 0.00146 \sin N$ |
| $- 0.24663 \cos N \frac{d\varrho}{dt}$ | $- 0.86679 \sin 2N$ „ | $+ 0.01085 \sin 2N$ |
| $+ 0.55587 \cos 2N$ „ | $+ 0.77197 \sin 3N$ „ | $+ 0.01098 \sin 3N$ |
| $- 0.33447 \cos 3N$ „ | $- 0.87901 \sin 4N$ „ | $+ 0.03264 \sin 4N$ |
| $+ 0.29355 \cos 4N$ „ | $+ 0.76085 \sin 5N$ „ | $- 0.03936 \sin 5N$ |
| $- 0.20586 \cos 5N$ „ | $- 0.61184 \sin 6N$ „ | $+ 0.05167 \sin 6N$ |
| $+ 0.14005 \cos 6N$ „ | $- 0.18334 \sin 7N$ „ | $+ 0.25490 \sin 7N$ |
| $+ 0.03083 \cos 7N$ „ | $+ 1.73320 \sin 8N$ „ | $- 0.93139 \sin 8N$ |
| $- 0.28534 \cos 8N$ „ | $- 1.16407 \sin 9N$ „ | $+ 0.47927 \sin 9N$ |

| | | |
|---|---|---|
| $+ 0.16904 \cos 9N \frac{d\varrho}{dt}$ | $+ 0.76136 \sin 10 N \cdot \varrho$ | $= - 0.20897 \sin 10 N$ |
| $- 0.09861 \cos 10 N$ „ | $- 0.50979 \sin 11 N$ „ | $+ 0.08805 \sin 11 N$ |
| $+ 0.05945 \cos 11 N$ „ | $+ 0.33116 \sin 12 N$ „ | $- 0.01976 \sin 12 N$ |
| $- 0.03501 \cos 12 N$ „ | $- 0.19862 \sin 13 N$ „ | $- 0.02277 \sin 13 N$ |
| $+ 0.01910 \cos 13 N$ „ | $+ 0.09744 \sin 14 N$ „ | $+ 0.05327 \sin 14 N$ |
| $- 0.00848 \cos 14 N$ „ | $- 0.02951 \sin 15 N$ „ | $- 0.06698 \sin 15 N$ |
| $+ 0.00224 \cos 15 N$ „ | | $+ 0.05605 \sin 16 N$ |

Eine erste Näherung der vorliegenden Differentialgleichungen als bekannt voraussetzend, ist es nicht schwer ein geeignetes Näherungsverfahren für die Integration anzugeben, das uns dem Ziel näher brächte. Gerade in der Gewinnung einer ersten Näherung liegt aber die grosse Schwierigkeit. Und ist es mir nicht gelungen, dieselbe zu überwinden, denn wenngleich einige Versuche einer genäherten Integration, welche ich mit Vernachlässigung der mit kleineren Coefficienten behafteten Glieder, also unter Annahme vereinfachter Gestalt der obigen Differentialgleichungen versuchte, auch zu numerischen Resultaten führten, so erkannte ich jedesmal das Unzulängliche derselben.

Dass die hier als Ausgangspunkt dienenden Reihen für $(r)$ und $(v)$ rein interpolatorischen Charakter haben, habe ich bereits früher bemerkt. Da wir aber sahen, dass die Sinusglieder in $(r)$ gleichwie die Cosinusglieder in $(v)$ im Vergleich zu den übrigen sehr klein sind und die Möglichkeit nicht ausgeschlossen erschien, dass dieselben vielleicht bloss ihren Bestand der Unsicherheit der zu Grunde gelegten, aus der speciellen Störungsrechnung resultirenden, Zahlen verdankten, hiezu aber noch ferner das Moment kommt, dass unter Annahme von $(r)$ und $(v)$ in der Form: $(r) = \Sigma C_i \cos i(n - n_1)t$, $(v) = \Sigma S_i \sin i(n - n_1)t$, also als Reihen nach Vielfachen von nur einem Argument, die Darstellung der Bewegung eine sehr befriedigende wird, habe ich unter der selbstverständlich nur beschränkt zulässigen Annahme derselben Form auch für $\varrho$ und $\chi$ versucht, ob sich nicht etwa doch aus den obigen Gleichungen irgend ein Nutzen ziehen lässt.

Unter dieser Annahme über die Form von $\varrho$ und $\chi$, durch deren directe Differentiation man sofort $\frac{d\varrho}{dt}$, $\frac{d^2\varrho}{dt^2}$, $\frac{d\chi}{dt}$ wie $\frac{d^2\chi}{dt^2}$ gewinnt, wird ja die Methode der unbestimmten Coefficienten anwendbar. Bezeichnen

wir mit $C_i$ die gesuchten Coefficienten in $\varrho$, mit $S_i$ jene in $\chi$, so erhält man bekanntlich $\varrho$ und $\chi$, wie deren Ableitungen als Function von $C_i$ und $S_i$ in obige Differentialgleichungen substituirend, hierauf die Coefficienten derselben Cos- und Sin-Functionen rechts und links gleichsetzend, so viel Bedingungsgleichungen als gesuchte Coefficienten, aus deren Auflösung sich schliesslich die $C_i$ und $S_i$ ergeben.

Denken wir uns für einen Augenblick, dass die $C_i$ mit Hülfe von $i$ Gleichungen eliminirt wären. Mit Hülfe der restirenden Gleichungen kann man sich dann jeden $S$ Coefficienten als Function aller übrigen dargestellt denken, also wäre z. B.:

$$S_1 = \alpha_1 + \alpha_2 S_2 + \alpha_3 S_3 + \quad \cdots \alpha_i S_i$$

Nun ist sofort klar, dass wenn die Bestimmung von $S_1$ überhaupt einen Sinn haben soll, die Producte $\alpha_n S_n$ mit wachsendem $n$ abnehmen müssen und der letzt mitgenommene Posten so klein sein müsste, dass wir ihn gegen die ersteren vernachlässigen dürfen, denn ist das nicht der Fall, so wird jedesmal bei Hinzunahme eines weiteren Postens (z. B. $\alpha_{n+1} S_{n+1}$) der Werth von $S_1$ ein anderer. Die Zahl der anfänglich zu Grunde gelegten unbestimmten Coefficienten darf also nicht nach Belieben angenommen werden, sondern muss mindestens so gross gewählt werden, dass die Vernachlässigung der nicht mehr mitgenommenen die letzt erhaltenen Resultate nur mehr um Bruchtheile ihrer Werthe anders ergeben würde.

Die Rechnung hat mir nun gezeigt, dass man für $i$ [$i = 10$, welche Annahme bereits eine Auflösung von 21 Gleichungen mit 21 Unbekannten erforderlich machen würde, ist noch zu klein] eine so grosse Zahl nehmen müsste, dass die numerischen Operationen die Grenze der Ausführbarkeit übersteigen.

4.

Neben der Beantwortung der Frage über die Bewegung des Körpers $C$ in unserem Problem wurde von der k. dänischen Gesellschaft der Wissenschaften auch gefordert, dass für den Anfangs- und Schlussmoment eine intermediäre Bahn mit einem Contact dritter oder höherer Ordnung gegeben werde.

Obwohl durch die im Vorausgehenden wiedergegebenen Versuche einer allgemeineren Lösung mehr Zeit in Anspruch genommen worden war, als ich erwartet hatte, so hätte die mir noch zu Gebot stehende Frist doch ausgereicht, um wenigstens dieser Forderung zu genügen, denn die Berechnung einer intermediären Bahn auf dem gewöhnlichen Weg ist eine Arbeit, die sich in wenigen Stunden erledigen lässt. Wie wir aber gleich sehen werden, tritt uns hier eine Schwierigkeit entgegen, die es erforderlich macht, einen von dem gewöhnlichen wesentlich verschiedenen und weitläufigeren Weg einzuschlagen.

Die Bestimmung einer intermediären Bahn mit einem Contact dritter Ordnung für irgend einen Moment besteht bekanntlich darin, dass man von einer Gleichung, deren Integration vollständig gelingt, ausgehend, den in dieser Gleichung auftretenden Parametern solche Werthe gibt, dass sich sowohl die resultirende Bahn der wirklichen möglichst nahe anschliesst, als auch der Bedingung genügt wird, dass in dem bestimmten Punkt die Coordinaten, wie die Geschwindigkeiten als auch die nachfolgenden Ableitungen mit jenen, welche in der wahren Bahn Geltung haben, zusammenfallen.

Denkt man sich die Störungsfunction in zwei Theile zerlegt:

$$\Omega = (\Omega) + f(r)$$

wo $f(r)$ eine Function bloss von $r$ darstellt und berücksichtigt, dass das Verhältniss $\frac{r}{r_1}$ hier stets kleiner als die Einheit bleibt, mithin die Entwicklung gilt:

$$\frac{1}{\mu_1}(\Omega) = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{4}\frac{r^2}{r_1^2} + \frac{3}{4}\frac{r^2}{r_1^3}\cos 2(v - v_1) + \cdots$$

so ergibt sich sofort die Zulässigkeit, die Function $f(r)$ proportional mit $r^2$ anzunehmen. Wir wollen aber vorderhand über $F(v)$ und $f(r)$ noch keine bestimmte Festsetzung treffen, sondern nur annehmen, dass sie zwei ganz beliebige Functionen seien, die erstere bloss abhängig von $v$, die zweite bloss von $r$ und dass sie den Gleichungen genügen:

$$\frac{d}{dt}\left\{r^2\frac{dv}{dt}\right\} = \frac{1}{r^2}F'(v)$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{\mu_1}{r^2} = -\frac{2}{r^3}F(v) + f'(r)$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass die vorliegenden Gleichungen auf Quadraturen zurückgeführt werden können. Führt man nämlich statt der Zeit eine neue unabhängige Variable $w$ ein, welche durch die Gleichung:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\sqrt{c}}{r^2}$$

definirt sein soll, wobei $\sqrt{c}$ eine Constante bedeutet, so wird mit $dv$ multiplicirt:

$$r^2 \frac{dv}{dt} = \sqrt{c} \frac{dv}{dw}$$

ferner: $$\frac{d}{dt}\left\{r^2 \frac{dv}{dt}\right\} = \sqrt{c} \frac{d^2 v}{dv^2} \frac{dw}{dt} = \frac{c}{r^2} \frac{d^2 v}{dw^2} = \frac{1}{r^2} F'(v)$$

und mit $r^2$ gekürzt und integrirt, hat man schliesslich:

$$\left(\frac{dv}{dw}\right)^2 = C + \frac{2}{c} F(v)$$

wo $C$ die Integrationsconstante bedeutet.

Ebenso lässt sich auch für die zweite Gleichung das Integral sofort geben. Die letzte Gleichung geht nämlich in Verbindung mit:

$$r^2 \frac{dv}{dt} = \sqrt{c} \frac{dv}{dw}$$

über in: $$\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = \frac{c}{r^4}\left(\frac{dv}{dw}\right)^2 = \frac{cC}{r^4} + \frac{2}{r^4} F(v)$$

und durch Substitution in die zweite der obigen Differentialgleichungen wird:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{cC}{r^3} + \frac{\mu_1}{r^2} = f'(r)$$

Bezeichnet man mit $-h$ die Integrationsconstante, so überzeugt man sich durch Differentiation sofort, dass die folgende Gleichung:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = -\frac{cC}{r^2} + \frac{2\mu_1}{r} + 2f(r) - h$$

gerade das Integral der obigen ist.

Schreiben wir die obigen Ausdrücke etwas anders:

$$dt^2 = \frac{dr^2}{\frac{-cC}{r^2} + \frac{2\mu_1}{r} + 2f(r) - h}$$

$$dw^2 = \frac{dv^2}{C + \frac{2}{c} F(v)} = \frac{c}{r^4} \cdot \frac{dr^2}{\frac{-cC}{r^2} + \frac{2\mu_1}{r} + 2f(r) - h}$$

so wird integrirt:

$$t - t_0 = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{-cC}{r^2} + \frac{2\mu_1}{r} + 2f(r) - h}}$$

$$w - w_0 = \int \frac{dv}{C + \frac{2}{c} F(v)} = - \int \frac{\sqrt{c}\, d\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{\frac{-cC}{r^2} + \frac{2\mu_1}{r} + 2f(r) - h}}$$

und hiemit erscheint die Integration vollständig durchgeführt.

In den „Undersökningar af Theorien“ etc. I geht Gyldèn bekanntlich von den beiden folgenden einfachen Annahmen aus:

$$F(v) = -\alpha \sin(\lambda \nu - L)^2$$

$$f(r) = \tfrac{1}{2} \mu_2 r^2$$

wobei die 4 Grössen $\alpha$, $\lambda$, $L$ und $\mu_2$ Constante bezeichnen, welche so bestimmt werden müssen, dass die zweiten und dritten Differentialquotienten in der wirklichen und scheinbaren Bahn dieselben werden, und die weitere Entwicklung der Quadraturen gestaltet sich sehr einfach, da man durch geeignete Substitution die obige Gleichung für $r$ auf die Normalform der elliptischen Integrale zurückführen kann. Da sich in der eben erwähnten Abhandlung auch das hier einzuschlagende Verfahren eingehend dargelegt findet, glaube ich mich auf einen Hinweis darauf beschränken zu können.

Für unsern Fall reicht man aber, wie mir die einschlägigen Rechnungen gezeigt haben, mit der Annahme der obigen einfachen Formen nicht aus, denn die berechnete Bahn gab nicht nur die charakteristische Form der wirklichen Bahn kaum näherungsweise wieder, sondern es resultirt auch ein völlig anderer Werth für die Periode.

Durch eine andere Annahme über $f(r)$, insbesondere durch Mitnahme noch eines weiteren Gliedes mit $r^3$, wodurch man allerdings schon auf hyperelliptische Functionen geführt würde, zweifle ich nicht, dass man dem Ziel näher kommen könnte, doch complicirt sich nicht nur die fernere Entwicklung der Quadraturen sehr, sondern ich halte es für wahrscheinlich, dass auch dann noch die Uebereinstimmung keine befriedigende werden wird.

Die einzig sicher zum Ziel führende Methode scheint darin zu bestehen, dass man die Zeit durch eine partielle Anomalie ausdrückt und zwar so, dass die Substitution während nur eines kurzen Zeitraumes gültig bleibt. Setzt man z. B.:

$$\sin(n-n_1)t = k \operatorname{sn} \frac{2K}{\pi} \omega$$

wo $k$ beliebig ist, so kann dieses Modul so gewählt werden, dass die Substitution gültig bleibt, während $(n-n_1)t$ sich von $-30^0$ bis $+30^0$ ändert und dass sämmtliche Entwicklungen äusserst convergent werden. Man hätte so:

$$\cos(n-n_1)t = \operatorname{dn} \frac{2K}{\pi} \omega$$

$$-(n-n_1)\sin(n-n_1)t\,d\,t = -k^2 \frac{2K}{\pi} \operatorname{sn} \frac{2K}{\pi} \omega \cdot \operatorname{cn} \frac{2K}{\pi} \omega\, d\,\omega$$

also:

$$(n-n_1)\,d\,t = k \frac{2K}{\pi} \operatorname{cn} \frac{2K}{\pi} \omega\, d\,\omega$$

$$k = \tfrac{1}{2}$$

Es wäre nun leicht, die $\sin r(n-n_1)t$ und $\cos r(n-n_1)t$, wo $r$ eine ganze Zahl bedeutet, zu bilden und nachher die Entwicklungen von $(r)$ und $(v)$ nach Vielfachen von $\omega$ herzustellen. Durch ähnliche Reihen müssten auch $\frac{\partial \Omega}{\partial r}$ und $\frac{\partial \Omega}{\partial v}$ dargestellt werden und man würde schliesslich also auch $\chi$ und $\varrho$ durch entsprechende Reihen erhalten, wobei man sich wieder auf die Mitnahme der ersten Potenzen derselben wird beschränken können.

Wiederholte Annäherungen zu machen, wäre übrigens hier leicht und so zu bewerkstelligen, dass $\frac{d^2 r}{d t^2}$, $\frac{d^3 r}{d t^3}$ $\frac{d^2 v}{d t^2}$ und $\frac{d^3 v}{d t^3}$ genau für den Zeitpunkt $t = 0$ dargestellt würden.

## 5.

Wie ich bereits früher erwähnte, steht uns noch ein zweiter Weg zur Verfügung, um die Frage nach der Periodicität zur Entscheidung bringen zu können und zwar besteht er in der Wiederholung der speciellen Störungsrechnung. Da ich zu Beginn der vorliegenden Arbeit

hauptsächlich darauf Gewicht gelegt hatte, rasch zu einem, wenn auch nur beiläufigen Bild der Bewegung zu gelangen, was das erst eingeschlagene Verfahren wegen seiner grossen Einfachheit auch in der kürzesten Zeit hatte erreichen lassen, hier in erster Linie es aber auf eine grössere Genauigkeit ankommt, habe ich von einer Wiederholung der speciellen Störungsrechnung nach obigem Verfahren abgesehen.

Indem ich nun die zur Anwendung gebrachten Formeln hier wiedergebe, will ich gleich vorausschicken, dass dieselben sich auf ein fixes rechtwinkliges Coordinatensystem beziehen, dessen Ursprung jedoch mit dem Schwerpunkt des Systems zusammenfällt.

Bezeichnet man mit $r_2\, r_1\, r$ die Distanzen des gestörten Körpers $C$ ($m_0 = 0$) beziehungsweise von dem Körper $B$ (Masse $m^1$), $A$ (Masse $m$) und dem Schwerpunkt $S$ des Systems $AB$, ferner mit $x_0\, y_0$ die rechtwinkligen Coordinaten von $C$, mit $x_0^1\, y_0^1$ jene von $B$ und zwar bezogen auf jenes Coordinatensystem, dessen wir eben erwähnten, so gelten bekanntlich für die Bewegung von $C$ um $S$ die folgenden Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2 x_0}{d\tau^2} = m^1 k^2 \left(\frac{x_0^1 - x_0}{r_2^3}\right) - k^2 \left(\frac{m^1 x_0^1 + m x_0}{r_1^3}\right)$$

$$\frac{d^2 y_0}{d\tau^2} = m^1 k^2 \left(\frac{y_0^1 - y_0}{r_2^3}\right) - k^2 \left(\frac{m^1 y_0^1 + m y_0}{r_1^3}\right)$$

Führt man die polaren Coordinaten ein durch die Relationen:

$$x_0 = r \cos v \qquad x_0^1 = r^1 \cos v^1$$

$$y_0 = r \sin v \qquad y_0^1 = r^1 \sin v^1$$

und ersetzt, nachdem man die obigen Gleichungen mit $-y_0$ und $x_0$ oder beziehungsweise mit $x_0$ und $y_0$ multiplicirt und addirt hat, die rechtwinkligen Differentiale durch die polaren, so erhält man:

$$\frac{d}{d\tau}\left\{ r^2 \frac{dv}{d\tau} \right\} = - m^1 k^2 r r^1 \sin(v - v^1) \left\{ \frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3} \right\}$$

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} - r\left(\frac{dv}{d\tau}\right)^2 = m^1 k^2 r^1 \cos(v - v^1) \left\{ \frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3} \right\} - k^2 r \left\{ \frac{m^1}{r_2^3} + \frac{m}{r_1^3} \right\}$$

Trifft man hier dieselbe Wahl über die Einheiten wie früher, so ist ja:

$$m k^2 = m^1 k^2 = 1$$
$$AS = SB = r^1 = 1$$
$$v^1 = v_0^1 + n^1 \tau = 180 + \tfrac{1}{2} \tau$$

und indem wir zugleich für $\tau$ und $r$ die neuen Variablen $t$ und $q$ einführen, welche den folgenden Relationen genügen sollen:

$$t = \frac{\tau}{2}$$
$$q = r^2$$

so gehen die obigen Differentialgleichungen in Polar-Coordinaten für unsern Fall über in:

$$\frac{d}{dt}\left\{q\frac{dv}{dt}\right\} = +4\sqrt{q}\sin(v-t)\left\{\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3}\right\}$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} - \frac{1}{2q}\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 - 2q\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = -8\left[\sqrt{q}\cos(v-t)\left\{\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3}\right\}\right.$$
$$\left. + q\left\{\frac{1}{r_2^3} + \frac{1}{r_1^3}\right\}\right]$$

Aus den Dreiecken $B\,S\,C$ und $C\,S\,A$ findet sich aber leicht:

$$r_1^2 = 1 + r^2 + 2r\cos(v - v_1) = 1 + q - 2\sqrt{q}\cos(v-t)$$
$$r_2^2 = 1 + r^2 - 2r\cos(v - v_1) = 1 + q + 2\sqrt{q}\cos(v-t)$$

mithin wird:

$$\cos(v-t) = \frac{r_2^2 - r_1^2}{4\sqrt{q}}$$

welchen Werth wir in die zweite der obigen Differentialgleichungen substituiren wollen. Es resultirt hienach:

$$\frac{d^2q}{dt^2} - \frac{1}{2q}\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 - 2q\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = -2(r_2^2 - r_1^2)(r_2^{-3} - r_1^{-3}) - 8q(r_2^{-3} + r_1^{-3})$$

Die rechte Seite lässt sich noch etwas vereinfachen, wie man sofort erkennt, wenn man dieselbe so schreibt:

$$-2(r_2^2 - r_1^2)(r_2^{-3} - r_1^{-3}) - 8q(r_2^{-3} + r_1^{-3})$$
$$= 2(r_2^2 + r_1^2)(r_2^{-3} + r_1^{-3}) - 4(r_2^{-1} + r_1^{-1}) - 8q(r_2^{-3} + r_1^{-3})$$
$$= -4\left\{(r_2^{-1} + r_1^{-1}) - (1-q)(r_2^{-3} + r_1^{-3})\right\}$$

Schreiben wir endlich der Kürze halber noch:

$$p = r^2 \frac{dv}{dt} = q v'$$

$$p' = \frac{dp}{dt}$$

so gehen die obigen Differentialgleichungen über in:

$$p' = + 4 \sqrt{q} \sin (v - t) [r_2^{-3} - r_1^{-3}]$$

$$q'' - \frac{1}{2q} q'^2 - \frac{2}{q} p^2 = - 4 \{(r_2^{-1} + r_1^{-1}) - (1 - q)(r_2^{-3} + r_1^{-3})\}$$

Letztere Gleichung lässt sich aber integriren. Bezeichnen wir mit $c$ die Integrationsconstante, so repräsentirt der folgende Ausdruck das exacte Integral unseres Problems.

$$\frac{1}{8q} q'^2 + \frac{1}{2q} p^2 - p - 4 (r_2^{-1} + r_1^{-1}) = c$$

Die anfängliche Winkelgeschwindigkeit von $C$ um den Schwerpunkt $S$ beträgt in unserm Fall: $v_0' = 1.5$, ferner ist $\frac{dr_0}{dt} = 0$, $r_0 = 2$, mithin wird: $p_0 = 4 v_0' = 6$ und:

$$c = 2 (v_0' - 1)^2 - \frac{22}{3} = - 6.833333$$

Mit Hilfe der mechanischen Quadratur lässt sich aus der vorhergehenden Gleichung:

$$q'^2 = 8 q \{4 (r_1^{-1} + r_2^{-1}) + p + c\} - 4 p^2$$

$q$ zwar durch einfache Integration erhalten, doch entspringt hieraus für die Rechnung kein Vortheil, da sich hiebei, namentlich zu Beginn der Rechnung, wo die $q'$ noch klein sind, diese nicht mit der erforderlichen Genauigkeit ergeben.

Man kann die Integralgleichung — abgesehen von ihrer Verwendung als Controllformel — aber dazu verwerthen, um in der zweiten der obigen Differentialgleichungen $q'$ zu eliminiren und erhält so:

$$q'' = 4 \{(1 - q)(r_2^{-3} + r_1^{-3}) + 3 (r_1^{-1} + r_2^{-1}) + p + c\}$$

Die Bestimmung der Anfangsconstanten für die summirten Reihen

unterliegt keiner Schwierigkeit, wenn man beachtet, dass für $t = 0$ die Relationen erfüllt sein müssen:

$$p_0 = 6 \qquad q_0' = 0 \qquad q_0 = 4.$$

Sobald nun $p$ und $q$ mit Hülfe obiger Gleichungen bestimmt erscheinen, resultirt $v'$ nach:

$$v' = \frac{p}{q}$$

und ist hiebei die Integration so zu bewerkstelligen, dass für $t = 0$, $v_0 = 0$ wird.

Die folgende Tafel gibt die Resultate der in solcher Weise (7stellig) geführten Rechnung, doch setze ich gleich statt der polaren Coordinaten, die mit ihnen nach:

$$x_0 = r \cos v$$
$$y_0 = r \sin v$$

berechneten rechtwinkligen an und beschränke mich ferner auf die Wiedergabe der Werthe für das Intervall $t = 5^0$.

Die mit $x$ und $y$ überschriebenen Verticalreihen enthalten die rechtwinkligen Coordinaten von $C$, jedoch bezogen auf das Coordinatensystem, dessen Ursprung in $A$ liegt, sind mithin direct mit den oben gegebenen Werthen vergleichbar, während endlich $\Delta x$ und $\Delta y$ in Einheiten der fünften Decimale die Differenzen der neuen Werthe gegen die erst erhaltenen darstellen:

| $t$ | $v_0$ | $x_0$ | $y_0$ | $x$ | $\Delta x$ | $y$ | $\Delta y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° | 0 | + 2.000 0000 | 0.000 0000 | + 1.000 0000 | 0 | + 0.000 0000 | 0 |
| 5 | 10 | + 1.983 1281 | + 0.260 8504 | + 0.986 9334 | — 1 | + 0.173 6947 | + 1 |
| 10 | 20 | + 1.933 1143 | + 0.516 0796 | + 0.948 3063 | — 5 | + 0.342 4316 | + 5 |
| 15 | 30 | + 1.851 6976 | + 0.760 4042 | + 0.885 7719 | — 6 | + 0.501 5851 | + 7 |
| 20 | 40 | + 1.741 5672 | + 0.989 1552 | + 0.801 8746 | — 10 | + 0.647 1350 | + 7 |
| 25 | 50 | + 1.606 1005 | + 1.198 4483 | + 0.699 7929 | — 14 | + 0.775 8300 | + 9 |
| 30 | 60 | + 1.449 0951 | + 1.385 2406 | + 0.583 0697 | — 15 | + 0.885 2406 | + 8 |
| 35 | 70 | + 1.274 5265 | + 1.547 2937 | + 0.455 3745 | — 18 | + 0.973 7173 | + 5 |
| 40 | 80 | + 1.086 3703 | + 1.683 0741 | + 0.320 3258 | — 17 | + 1.040 2865 | + 5 |
| 45 | 90 | + 0.888 4865 | + 1.791 6240 | + 0.181 3797 | — 19 | + 1.084 5172 | + 1 |
| 50 | 100 | + 0.684 5667 | + 1.872 4310 | + 0.041 7791 | — 19 | + 1.106 3865 | — 4 |

| $t$ | $v_0$ | $x_0$ | $y_0$ | $x$ | $\Delta x$ | $y$ | $\Delta y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 55 | 110 | + 0.478 1278 | + 1.925 3041 | — 0.095 4486 | — 18 | + 1.106 1521 | — 8 |
| 60 | 120 | + 0.272 5447 | + 1.950 2761 | — 0.227 4553 | — 16 | + 1.084 2507 | — 13 |
| 65 | 130 | + 0.071 1130 | + 1.947 5193 | — 0.351 5053 | — 13 | + 1.041 2117 | — 16 |
| 70 | 140 | — 0.122 8590 | + 1.917 2894 | — 0.464 8792 | — 10 | + 0.977 5968 | — 21 |
| 75 | 150 | — 0.305 9260 | + 1.859 8861 | — 0.564 7451 | — 6 | + 0.893 9604 | — 24 |
| 80 | 160 | — 0.474 3336 | + 1.775 6409 | — 0.647 9818 | — 4 | + 0.790 8329 | — 30 |
| 85 | 170 | — 0.623 7678 | + 1.664 9364 | — 0.710 9235 | — 3 | + 0.668 7417 | — 35 |
| 90 | 180 | — 0.748 9653 | + 1.528 2990 | — 0.748 9653 | — 1 | + 0.528 2990 | — 40 |
| 95 | 190 | — 0.843 0672 | + 1.366 6334 | — 0.755 9115 | + 6 | + 0.370 4387 | — 45 |
| 100 | 200 | — 0.896 4391 | + 1.181 8576 | — 0.722 7909 | + 14 | + 0.197 0496 | — 54 |
| 105 | 210 | — 0.894 3730 | + 0.978 7413 | — 0.635 5539 | + 34 | + 0.012 8156 | — 66 |
| 110 | 220 | — 0.812 4686 | + 0.771 1961 | — 0.470 4484 | + 61 | — 0.168 4965 | — 76 |
| 115 | 230 | — 0.611 9725 | + 0.608 3794 | — 0.189 3542 | + 101 | — 0.297 9282 | — 60 |
| 120 | 240 | — 0.315 0910 | + 0.650 1424 | + 0.184 9090 | + 87 | — 0.215 8830 | — 27 |

Wie man sich durch einen Blick auf die $\Delta x$ und $\Delta y$ überzeugt, findet hiemit die oben ausgesprochene Vermuthung, dass die Resultate der ersten Rechnung möglicherweise ungenauere seien, allerdings ihre Bestätigung, doch erreichte die Ungenauigkeit lange nicht jenen Betrag, um welchen die Coordinaten zu corrigiren wären, damit das Perihel symmetrisch zu liegen komme. Da letzteres schon bei $v_0 = 238^0 45'$ stattfindet, bestätigen beide Rechnungen in gleicher Weise die **Nicht-Periodicität** der Bewegung.

Es scheint mir sehr wahrscheinlich, dass man durch eine, von der hier gemachten, nur äusserst wenig abweichende Annahme über die Anfangsgeschwindigkeit es erreichen könnte, dass die nahezu periodische Bewegung zu einer rein periodischen wird, und dass man dann mit mehr Erfolg auf dem erst eingeschlagenen Weg wird weiterschreiten können, der uns das Ziel hier schon wegen der Unzulänglichkeit der Ausgangswerthe für $r$ und $\dot{v}$ nicht hat erreichen lassen.

Dass bei äusserst geringer Modification, wie dem Einwirken eines weiteren Körpers sich die Bewegung unseres Körpers sofort wesentlich anders gestalte, was sich aus den obigen Differentialgleichungen erkennen lässt, war aber a priori nicht zu ersehen.

# Anhang.

Im Anschluss an die obigen Rechnungen erlaube ich mir hier noch eine Reihe von Resultaten mitzutheilen, welche sich auf einen ähnlichen speciellen Fall des Problems der Drei Körper beziehen, wie dem im Vorangehenden behandelten. Die hier mitgetheilten Rechnungen wurden gleichzeitig mit der Berechnung der speciellen Störungen für unser obiges Problem geführt. Mir vorbehaltend, gelegentlich darauf näher zurückzukommen, theile ich die Arbeiten jedoch auch bereits heute mit, da dieser zweite Fall, wenngleich er zu keiner so auffälligen Bewegung wie die erste führte, mir doch nicht ohne Interesse erscheint und unsere Vorstellung über die Bewegung eines dritten Körpers in einem, dem obigen analogen System nicht unwesentlich erweitert, also sich enge an das Vorausgehende anschliesst.

Die folgenden Rechnungen beziehen sich auf das nachfolgende Problem:

„In einem Doppelsternsystem, bestehend aus zwei gleichnamigen Körpern $A$ und $B$, sind die beschriebenen Bahnen Kreise. Ein dritter Punkt $C$, mit unendlich kleiner Masse, bewegt sich so in der Bahnebene der $A$ und $B$, dass er zu Beginn der Bewegung auf der Verbindungslinie $AB$ steht und zwar in gleichem Abstand von $A$ und $B$ und ferner, dass er um $A$ eine Kreisbahn beschreiben würde, sofern $B$ nicht vorhanden wäre. Bei Beginn sind alle Bewegungen nach derselben Seite gerichtet."

Dieses Problem unterscheidet sich also, wie man hieraus ersieht, nur in Bezug auf den Anfangszustand von dem obigen.

Was die Art der Berechnung und die Genauigkeit der Schluss-Resultate betrifft, glaube ich mich hier mit einem Hinweis auf die diesbezüglichen Bemerkungen zu dem ersten Fall beschränken zu können.

Bezieht man die Coordinaten auf ein fixes rechtwinkliges Axensystem, dessen Ursprung in $A$ liegt und dessen $X$ Axe mit der Verbindungslinie der drei Körper im Moment des Beginns der Bewegung zusammenfällt und bezeichnet mit $x\,y$ die rechtwinkligen gestörten Coordinaten des massenlosen Körpers $C$, mit $x^1\,y^1$ die Coordinaten des störenden Körpers $B$, nimmt ferner $A\,C = 1$, so wird $A\,B = 2 = r^1$. Indem ich noch ergänze, dass auch hier die Massen so gewählt wurden, dass $m\,k^2 = 1$ wurde, erübrigt wohl zum Verständniss der nachfolgenden Tafelwerthe in den ersten Verticalcolumnen nichts mehr.

Wie man sich leicht durch einen Blick auf die nachfolgenden Werthe von $\varrho$ überzeugt, nähert sich hier der gestörte Körper beträchtlich dem störenden. Aus diesem Grund wurde es nothwendig, das der Störungsrechnung zu Grunde liegende Intervall im Laufe der Rechnung mehrmals abzuändern. Das grösste Intervall, das zur Anwendung kam, entspricht einer Bewegung des störenden Körpers von $1^0 25$, das kleinste von $0^0 0521$.

Die in den letzten Verticalcolumnen angesetzten Werthe ($x_1$, $y_1$) haben die Bedeutung:

$$x_1 = x - x^1$$
$$y_1 = y - y^1$$

und die Construction derselben liefert uns demnach ein Bild von der relativen Bewegung des Körpers $C$ um $B$.

| $v_0$ | $v^1$ | $x$ | Diff. | $y$ | Diff. | $\varrho$ | Diff. | $x_1$ | Diff. | $y_1$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0° | 0.00° | + 1.00000 | — 23 | 0.00000 | + 4362 | + 1.0000 | — 2 | — 1.00000 | + 24 | — 0.00000 | — 1 |
| 2.5 | 1.25 | + 0.99977 | — 71 | + 0.04362 | + 4353 | + 0.9998 | — 7 | — 0.99976 | + 72 | — 0.00001 | — 8 |
| 5.0 | 2.50 | + 0.99906 | — 116 | + 0.08715 | + 4334 | + 0.9991 | — 13 | — 0 99904 | + 122 | — 0.00009 | — 23 |
| 7.5 | 3.75 | + 0.99790 | — 158 | + 0.13049 | + 4306 | + 0.9978 | — 18 | — 0.99782 | + 175 | — 0.00032 | — 44 |
| 10.0 | 5.00 | + 0.99632 | — 196 | + 0.17355 | + 4270 | + 0.9960 | — 23 | — 0.99607 | + 232 | — 0.00076 | — 72 |
| 12.5 | 6.25 | + 0.99436 | — 231 | + 0.21625 | + 4226 | + 0.9937 | — 29 | — 0.99375 | + 292 | — 0.00148 | — 106 |
| 15.0 | 7.50 | + 0.99205 | — 260 | + 0.25851 | + 4175 | + 0.9908 | — 36 | — 0.99083 | + 357 | — 0.00254 | — 145 |
| 17.5 | 8.75 | + 0.98945 | — 282 | + 0.30026 | + 4116 | + 0.9872 | — 43 | — 0.98726 | + 428 | — 0.00399 | — 189 |
| 20.0 | 10.00 | + 0.98663 | — 297 | + 0.34142 | + 4052 | + 0.9829 | — 50 | — 0.98298 | + 507 | — 0.00588 | — 236 |
| 22.5 | 11.25 | + 0.98366 | — 304 | + 0.38194 | + 3983 | + 0.9779 | — 59 | — 0.97791 | + 593 | — 0.00824 | — 287 |
| 25.0 | 12.50 | + 0.98062 | — 302 | + 0.42177 | + 3909 | + 0.9720 | — 68 | — 0.97198 | + 689 | — 0.01111 | — 340 |
| 27.5 | 13.75 | + 0.97760 | — 291 | + 0.46086 | + 3830 | + 0.9652 | — 79 | — 0.96509 | + 793 | — 0.01451 | — 396 |
| 30.0 | 15.00 | + 0.97469 | — 271 | + 0.49916 | + 3749 | + 0.9573 | — 90 | — 0.95716 | + 904 | — 0.01847 | — 453 |
| 32.5 | 16.25 | + 0.97198 | — 241 | + 0.53665 | + 3667 | + 0.9483 | — 101 | — 0.94812 | + 1025 | — 0.02300 | — 509 |

| $c_0$ | $v^1$ | $x$ | Diff. | $y$ | Diff. | $\varrho$ | Diff. | $x_1$ | Diff. | $y_1$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 35.0° | 17.50° | + 0.96957 | − 199 | + 0.57332 | + 3582 | + 0.9382 | − 113 | − 0.93787 | + 1158 | − 0.02809 | − 565 |
| 37.5 | 18.75 | + 0.96758 | − 145 | + 0.60914 | + 3497 | + 0.9269 | − 128 | − 0.92629 | + 1303 | − 0.03374 | − 618 |
| 40.0 | 20.00 | + 0.96613 | − 79 | + 0.64411 | + 3413 | + 0.9141 | − 143 | − 0.91326 | + 1458 | − 0.03992 | − 670 |
| 42.5 | 21.25 | + 0.96534 | − 1 | + 0.67824 | + 3330 | + 0.8998 | − 158 | − 0.89868 | + 1625 | − 0.04662 | − 720 |
| 45.0 | 22.50 | + 0.96533 | + 91 | + 0.71154 | + 3247 | + 0.8840 | − 175 | − 0.88243 | + 1805 | − 0.05382 | − 766 |
| 47.5 | 23.75 | + 0.96624 | + 200 | + 0.74401 | + 3168 | + 0.8665 | − 193 | − 0.86438 | + 2000 | − 0.06148 | − 807 |
| 50.0 | 25.00 | + 0.96824 | + 324 | + 0.77569 | + 3093 | + 0.8472 | − 212 | − 0.84438 | + 2211 | − 0.06955 | − 841 |
| 52.5 | 26.25 | + 0.97148 | + 467 | + 0.80662 | + 3022 | + 0.8260 | − 234 | − 0.82227 | + 2440 | − 0.07796 | − 870 |
| 55.0 | 27.50 | + 0.97615 | + 632 | + 0.83684 | + 2957 | + 0.8026 | − 257 | − 0.79787 | + 2689 | − 0.08666 | − 891 |
| 57.5 | 28.75 | + 0.98247 | + 821 | + 0.86641 | + 2900 | + 0.7769 | − 282 | − 0.77098 | + 2961 | − 0.09557 | − 902 |
| 60.0 | 30.00 | + 0.99068 | + 1036 | + 0.89541 | + 2852 | + 0.7487 | − 309 | − 0.74137 | + 3259 | − 0.10459 | − 903 |
| 62.5 | 31.25 | + 1.00104 | + 1285 | + 0.92393 | + 2816 | + 0.7178 | − 339 | − 0.70878 | + 3589 | − 0.11362 | − 889 |
| 65.0 | 32.50 | + 1.01389 | + 1574 | + 0.95209 | + 2796 | + 0.6839 | − 372 | − 0.67289 | + 3958 | − 0.12251 | − 858 |
| 67.5 | 33.75 | + 1.02963 | + 1914 | + 0.98005 | + 2797 | + 0.6467 | − 410 | − 0.63331 | + 4377 | − 0.13109 | − 804 |
| 70.0 | 35.00 | + 1.04877 | + 2317 | + 1.00802 | + 2828 | + 0.6057 | − 453 | − 0.58954 | + 4859 | − 0.13913 | − 719 |
| 72.5 | 36.25 | + 1.07194 | + 2805 | + 1.03630 | + 2901 | + 0.5604 | − 504 | − 0.54095 | + 5423 | − 0.14632 | − 589 |
| 75.0 | 37.50 | + 1.09999 | + 3413 | + 1.06531 | + 3038 | + 0.5100 | − 566 | − 0.48672 | + 6107 | − 0.15221 | − 395 |
| 77.5 | 38.75 | + 1.13412 | + 4199 | + 1.09569 | + 3279 | + 0.4534 | − 643 | − 0.42565 | + 6969 | − 0.15616 | − 96 |
| 80.0 | 40.00 | + 1.17611 | + 1203 | + 1.12848 | + 878 | + 0.3891 | − 175 | − 0.35596 | + 1905 | − 0.15712 | + 47 |
| 80.625 | 40.3125 | + 1.18814 | + 1275 | + 1.13726 | + 909 | + 0.3716 | − 183 | − 0.33691 | + 1983 | − 0.15665 | + 79 |
| 81.250 | 40.6250 | + 1.20089 | + 1356 | + 1.14635 | + 947 | + 0.3533 | − 190 | − 0.31708 | + 2068 | − 0.15586 | + 121 |
| 81.875 | 40.9375 | + 1.21445 | + 1446 | + 1.15582 | + 992 | + 0.3343 | − 198 | − 0.29640 | + 2163 | − 0.15465 | + 170 |
| 82 500 | 41.2500 | + 1.22891 | + 1544 | + 1.16574 | + 1045 | + 0.3145 | − 208 | − 0.27477 | + 2265 | − 0.15295 | + 227 |
| 83.125 | 41.5625 | + 1.24435 | + 1658 | + 1.17619 | + 1112 | + 0.2937 | − 218 | − 0.25212 | + 2384 | − 0.15068 | + 297 |
| 83.750 | 41.8750 | + 1.26093 | + 1788 | + 1.18731 | + 1195 | + 0.2719 | − 230 | − 0.22828 | + 2519 | − 0.14771 | + 385 |
| 84.375 | 42.1875 | + 1.27881 | + 1940 | + 1.19926 | + 1304 | + 0.2489 | − 244 | − 0.20309 | + 2674 | − 0.14386 | + 498 |
| 85.000 | 42.5000 | + 1.29821 | + 2121 | + 1.21230 | + 1447 | + 0.2245 | − 261 | − 0.17635 | + 2860 | − 0.13888 | + 645 |
| 85.625 | 42.8125 | + 1.31942 | + 2344 | + 1.22677 | + 1647 | + 0.1984 | − 280 | − 0.14775 | + 3088 | − 0.13243 | + 849 |
| 86.250 | 43.1250 | + 1.34286 | + 416 | + 1.24324 | + 299 | + 0.1704 | − 49 | − 0.11687 | + 540 | − 0.12394 | + 166 |
| 86.3542 | 43.1771 | + 1.34702 | + 423 | + 1.24623 | + 307 | + 0.1655 | − 50 | − 0.11147 | + 548 | − 0.12228 | + 174 |
| 86.4583 | 43.2291 | + 1.35125 | + 432 | + 1.24930 | + 317 | + 0.1605 | − 50 | − 0.10599 | + 557 | 0.12054 | + 185 |
| 86.5625 | 43.2812 | + 1.35557 | + 440 | + 1.25247 | + 328 | + 0.1555 | − 51 | − 0.10042 | + 564 | − 0.11869 | + 196 |
| 86.6666 | 43.3333 | + 1.35997 | + 449 | + 1.25575 | + 339 | + 0.1504 | − 52 | − 0.09478 | + 574 | − 0.11673 | + 207 |
| 86.7708 | 43.3854 | + 1.36446 | + 459 | + 1.25914 | + 352 | + 0.1452 | − 53 | − 0.08904 | + 584 | − 0.11466 | + 219 |
| 86.8749 | 43.4374 | + 1.36905 | + 468 | + 1.26266 | + 366 | + 0.1399 | − 54 | − 0.08320 | + 593 | − 0.11247 | + 234 |
| 86.9791 | 43.4895 | + 1.37373 | + 479 | + 1.26632 | + 381 | + 0.1345 | − 54 | − 0.07727 | + 604 | − 0.11013 | + 249 |
| 87.0832 | 43.5416 | + 1.37852 | + 490 | + 1.27013 | + 397 | + 0.1291 | − 56 | − 0.07123 | + 616 | − 0.10764 | + 266 |
| 87.1874 | 43.5937 | + 1.38342 | + 501 | + 1.27410 | + 416 | + 0.1235 | − 56 | − 0.06507 | + 626 | − 0.10498 | + 284 |
| 87.2916 | 43.6458 | + 1.38843 | + 512 | + 1.27826 | + 437 | + 0.1179 | − 58 | − 0.05881 | + 637 | − 0.10214 | + 306 |
| 87.3958 | 43.6979 | + 1.39355 | + 524 | + 1.28263 | + 460 | + 0.1121 | − 59 | − 0.05244 | + 650 | − 0.09908 | + 329 |
| 87.5000 | 43.7500 | + 1.39879 | + 537 | + 1.28723 | + 486 | + 0.1062 | − 59 | − 0.04594 | + 663 | − 0.09579 | + 354 |
| 87.6041 | 43.8020 | + 1.40416 | + 551 | + 1.29209 | + 515 | + 0.1003 | − 61 | − 0.03931 | + 677 | − 0.09225 | + 384 |
| 87.7083 | 43.8541 | + 1.40967 | + 563 | + 1.29724 | + 551 | + 0.0942 | − 62 | − 0.03254 | + 689 | − 0.08841 | + 420 |
| 87.8125 | 43.9062 | + 1.41530 | + 575 | + 1.30275 | + 593 | + 0.0880 | − 63 | − 0.02565 | + 701 | − 0.08421 | + 462 |
| 87.9167 | 43.9583 | + 1.42105 | + 586 | + 1.30868 | + 641 | + 0.0817 | − 63 | − 0.01864 | + 712 | − 0.07959 | + 510 |
| 88.0208 | 44.0104 | + 1.42691 | + 595 | + 1.31509 | + 698 | + 0.0754 | − 64 | − 0.01152 | + 722 | − 0.07449 | + 568 |
| 88.1250 | 44.0625 | + 1.43286 | + 599 | + 1.32207 | + 768 | + 0.0690 | − 65 | − 0.00430 | + 725 | − 0.06881 | + 637 |
| 88.2292 | 44.1146 | + 1.43885 | + 593 | + 1.32975 | + 853 | + 0.0625 | − 64 | + 0.00295 | + 720 | − 0.06244 | + 723 |
| 88.3333 | 44.1666 | + 1.44478 | + 575 | + 1.33828 | + 956 | + 0.0561 | − 61 | + 0.01015 | + 701 | − 0.05521 | + 825 |
| 88.4375 | 44.2187 | + 1.45053 | + 526 | + 1.34784 | + 1079 | + 0.0500 | − 57 | + 0.01716 | + 653 | − 0.04696 | + 949 |
| 88.5417 | 44.2708 | + 1.45579 | + 434 | + 1.35863 | + 1220 | + 0.0444 | − 48 | + 0.02369 | + 561 | − 0.03747 | + 1090 |
| 88.6459 | 44.3229 | + 1.46013 | + 276 | + 1.37083 | + 1357 | + 0.0396 | − 33 | + 0.02930 | + 404 | − 0.02657 | + 1227 |
| 88.7500 | 44.3750 | + 1.46289 | + 49 | + 1.38440 | + 1453 | + 0.0363 | − 12 | + 0.03334 | + 176 | − 0.01430 | + 1323 |
| 88.8542 | 44.4271 | + 1.46338 | − 215 | + 1.39893 | + 1459 | + 0.0351 | + 12 | + 0.03510 | − 88 | − 0.00107 | + 1329 |
| 88.9584 | 44.4792 | + 1.46123 | − 447 | + 1.41352 | + 1382 | + 0.0363 | + 34 | + 0.03422 | − 320 | + 0.01222 | + 1253 |

| $v_0$ | $v^1$ | $x$ | Diff. | $y$ | Diff. | $\varrho$ | Diff. | $x_1$ | Diff. | $y^1$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 89°.0625 | 44°.5312 | + 1.45676 | − 611 | + 1.42734 | + 1253 | + 0.0397 | + 48 | + 0.03102 | − 486 | + 0.02475 | + 1123 |
| 89.1666 | 44.5833 | + 1.45065 | − 710 | + 1.43987 | + 1121 | + 0.0445 | + 57 | + 0.02616 | − 579 | + 0.03598 | + 991 |
| 89.2708 | 44.6354 | + 1.44355 | − 766 | + 1.45108 | + 1001 | + 0.0502 | + 62 | + 0.02037 | − 639 | + 0.04589 | + 872 |
| 89.3750 | 44.6875 | + 1.43589 | − 793 | + 1.46109 | + 901 | + 0.0564 | + 64 | + 0.01398 | − 665 | + 0.05461 | + 772 |
| 89.4791 | 44.7395 | + 1.42796 | − 803 | + 1.47010 | + 818 | + 0.0628 | + 64 | + 0.00733 | − 675 | + 0.06233 | + 689 |
| 89.5832 | 44.7916 | + 1.41993 | − 805 | + 1.47828 | + 748 | + 0.0692 | + 65 | + 0.00058 | − 676 | + 0.06922 | + 619 |
| 89.6874 | 44.8437 | + 1.41188 | − 800 | + 1.48576 | + 691 | + 0.0757 | + 64 | − 0.00618 | − 672 | + 0.07541 | + 562 |
| 89.7916 | 44.8958 | + 1.40398 | − 793 | + 1.49267 | + 643 | + 0.0821 | + 63 | − 0.01290 | − 665 | + 0.08103 | + 514 |
| 89.8958 | 44.9479 | + 1.39595 | − 785 | + 1.49916 | + 601 | + 0.0884 | + 62 | − 0.01955 | − 656 | + 0.08617 | + 473 |
| 90.0000 | 45.0000 | + 1.38810 | − 775 | + 1.50511 | + 565 | + 0.0946 | + 61 | − 0.02611 | − 647 | + 0.09090 | + 436 |
| 90.1042 | 45.0521 | + 1.38035 | − 765 | + 1.51076 | + 534 | + 0.1007 | + 60 | − 0.03258 | − 636 | + 0.09526 | + 406 |
| 90.2084 | 45.1042 | + 1.37270 | − 754 | + 1.51610 | + 507 | + 0.1067 | + 59 | − 0.03894 | − 625 | + 0.09932 | + 378 |
| 90.3125 | 45.1562 | + 1.36516 | − 744 | + 1.52117 | + 483 | + 0.1126 | + 58 | − 0.04519 | − 615 | + 0.10310 | + 355 |
| 90.4167 | 45.2083 | + 1.35772 | − 735 | + 1.52600 | + 462 | + 0.1184 | + 57 | − 0.05134 | − 606 | + 0.10665 | + 334 |
| 90.5208 | 45.2604 | + 1.35037 | − 725 | + 1.53062 | + 443 | + 0.1241 | + 56 | − 0.05740 | − 596 | + 0.10999 | + 315 |
| 90.6250 | 45.3125 | + 1.34312 | − 716 | + 1.53505 | + 425 | + 0.1297 | + 55 | − 0.06336 | − 587 | + 0.11314 | + 298 |
| 90.7292 | 45.3646 | + 1.33596 | − 706 | + 1.53930 | + 409 | + 0.1352 | + 54 | − 0.06923 | − 576 | + 0.11612 | + 281 |
| 90.8334 | 45.4167 | + 1.32890 | − 696 | + 1.54339 | + 395 | + 0.1406 | + 53 | − 0.07499 | − 566 | + 0.11893 | + 267 |
| 90.9375 | 45.4687 | + 1.32194 | − 688 | + 1.54734 | + 382 | + 0.1459 | + 53 | − 0.08065 | − 559 | + 0.12160 | + 255 |
| 91.0417 | 45.5208 | + 1.31506 | − 680 | + 1.55116 | + 370 | + 0.1512 | + 51 | − 0.08624 | − 550 | + 0.12415 | + 243 |
| 91.1458 | 45.5729 | + 1.30826 | − 672 | + 1.55486 | + 358 | + 0.1563 | + 51 | − 0.09174 | − 542 | + 0.12658 | + 231 |
| 91.2500 | 45.6250 | + 1.30154 | − 664 | + 1.55844 | + 348 | + 0.1614 | + 50 | − 0.09716 | − 534 | + 0.12889 | + 220 |
| 91.3542 | 45.6771 | + 1.29490 | − 657 | + 1.56192 | + 338 | + 0.1664 | + 49 | − 0.10250 | − 527 | + 0.131[illegible]9 | + 211 |
| 91.4584 | 45.7292 | + 1.28833 | − 651 | + 1.56530 | + 330 | + 0.1713 | + 49 | − 0.10777 | − 521 | + 0.13320 | + 203 |
| 91.5625 | 45.7812 | + 1.28182 | − 644 | + 1.56860 | + 321 | + 0.1762 | + 49 | − 0.11298 | − 513 | + 0.13523 | + 195 |
| 91.6667 | 45.8333 | + 1.27538 | − 638 | + 1.57181 | + 313 | + 0.1810 | + 48 | − 0.11811 | − 508 | + 0.13718 | + 186 |
| 91.7709 | 45.8854 | + 1.26900 | − 632 | + 1.57494 | + 306 | + 0.1858 | + 47 | − 0.12319 | − 501 | + 0.13904 | + 180 |
| 91.8751 | 45.9375 | + 1.26268 | − 626 | + 1.57800 | + 299 | + 0.1905 | + 46 | − 0.12820 | − 496 | + 0.14084 | + 173 |
| 91.9792 | 45.9896 | + 1.25642 | − 620 | + 1.58099 | + 293 | + 0.1951 | + 46 | − 0.13316 | − 489 | + 0.14257 | + 166 |
| 92.0834 | 46.0417 | + 1.25022 | − 614 | + 1.58392 | + 287 | + 0.1997 | + 45 | − 0.13805 | − 483 | + 0.14423 | + 161 |
| 92.1876 | 46.0938 | + 1.24408 | − 609 | + 1.58679 | + 281 | + 0.2042 | + 44 | − 0.14288 | − 478 | + 0.14584 | + 155 |
| 92.2917 | 46.1458 | + 1.23799 | − 603 | + 1.58960 | + 275 | + 0.2086 | + 44 | − 0.14766 | − 472 | + 0.14739 | + 149 |
| 92.3958 | 46.1979 | + 1.23196 | − 599 | + 1.59235 | + 271 | + 0.2130 | + 44 | − 0.15238 | − 467 | + 0.14888 | + 145 |
| 92.5000 | 46.2500 | + 1.22597 | − 3493 | + 1.59506 | + 1525 | + 0.2174 | + 252 | − 0.15705 | − 2704 | + 0.15033 | + 773 |
| 93.125 | 46.5625 | + 1.19104 | − 3342 | + 1.61031 | + 1386 | + 0.2426 | + 238 | − 0.18409 | − 2547 | + 0.15806 | + 638 |
| 93.750 | 46.8750 | + 1.15762 | − 3214 | + 1.62417 | + 1279 | + 0.2664 | + 225 | − 0.20956 | − 2417 | + 0.16444 | + 536 |
| 94.375 | 47.1875 | + 1.12548 | − 3102 | + 1.63696 | + 1189 | + 0.2889 | + 214 | − 0.23373 | − 2299 | + 0.16980 | + 449 |
| 95.000 | 47.5000 | + 1.09446 | − 3002 | + 1.64885 | + 1114 | + 0.3103 | + 204 | − 0.25672 | − 2196 | + 0.17429 | + 380 |
| 95.625 | 47.8125 | + 1.06444 | − 2914 | + 1.65999 | + 1052 | + 0.3307 | + 196 | − 0.27868 | − 2104 | + 0.17809 | + 321 |
| 96.250 | 48.1250 | + 1.03530 | − 2834 | + 1.67051 | + 997 | + 0.3503 | + 188 | − 0.29972 | − 2020 | + 0.18130 | + 272 |
| 96.875 | 48.4375 | + 1.00696 | − 2762 | + 1.68048 | + 949 | + 0.3691 | + 180 | − 0.31992 | − 1943 | + 0.18402 | + 226 |
| 97.500 | 48.7500 | + 0.97934 | − 2695 | + 1.68996 | + 905 | + 0.3871 | + 174 | − 0.33935 | − 1873 | + 0.18628 | + 188 |
| 98.125 | 49.0625 | + 0.95239 | − 2634 | + 1.69901 | + 866 | + 0.4045 | + 168 | − 0.35808 | − 1808 | + 0.18816 | + 154 |
| 98.750 | 49.3750 | + 0.92605 | − 2577 | + 1.70767 | + 830 | + 0.4213 | + 162 | − 0.37616 | − 1747 | + 0.18970 | + 122 |
| 99.375 | 49.6875 | + 0.90028 | − 2524 | + 2.71597 | + 798 | + 0.4375 | + 156 | − 0.39363 | − 1690 | + 0.19092 | + 94 |
| 100.000 | 50.0000 | + 0.87504 | − 2476 | + 1.72395 | + 768 | + 0.4531 | + 152 | − 0.41053 | − 1639 | + 0.19186 | + 70 |
| 100.625 | 50.3125 | + 0.85028 | − 2430 | + 1.73163 | + 741 | + 0.4683 | + 148 | − 0.42692 | − 1589 | + 0.19256 | + 46 |
| 101.250 | 50.6250 | + 0.82598 | − 2386 | + 1.73904 | + 715 | + 0.4831 | + 142 | − 0.44281 | − 1541 | + 0.19302 | + 26 |
| 101.875 | 50.9375 | + 0.80212 | − 2344 | + 1.74619 | + 690 | + 0.4973 | + 138 | − 0.45822 | − 1497 | + 0.19328 | + 4 |
| 102.500 | 51.2500 | + 0.77868 | − 2305 | + 1.75309 | + 668 | + 0.5111 | + 134 | − 0.47319 | − 1451 | + 0.19332 | − 12 |
| 103.125 | 51.5625 | + 0.75562 | − 2269 | + 1.75977 | + 646 | + 0.5245 | + 131 | − 0.48770 | 1413 | + 0.19320 | − 30 |
| 103.750 | 51.8750 | + 0.73293 | − 2234 | + 1.76623 | + 626 | + 0.5376 | + 127 | − 0.50183 | − 1374 | + 0.19290 | − 45 |
| 104.375 | 52.1875 | + 0.71059 | − 2201 | + 1.77249 | + 607 | + 0.5503 | + 123 | − 0.51557 | − 1337 | + 0.19245 | − 60 |
| 105.000 | 52.5000 | + 0.68858 | − 2168 | + 1.77856 | + 588 | + 0.5626 | + 120 | − 0.52894 | − 1301 | + 0.19185 | − 73 |
| 105.625 | 52.8125 | + 0.66690 | − 2137 | + 1.78444 | + 571 | + 0.5746 | + 117 | − 0.54195 | − 1266 | + 0.19112 | − 86 |

| $v_0$ | $v^1$ | $x$ | Diff. | $y$ | Diff. | $\varrho$ | Diff. | $x_1$ | Diff. | $y_1$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ° | ° | | | | | | | | | | |
| 106.250 | 53.1250 | + 0.64553 | − 2107 | + 1.79015 | + 554 | + 0.5863 | + 114 | − 0.55461 | − 1233 | + 0.19026 | − 99 |
| 106.875 | 53.4375 | + 0.62446 | − 2080 | + 1.79569 | + 539 | + 0.5977 | + 111 | − 0.56694 | − 1202 | + 0.18927 | − 108 |
| 107.500 | 53.7500 | + 0.60376 | − 8045 | + 1.80108 | + 2002 | + 0.6088 | + 414 | − 0.57896 | − 4498 | + 0.18819 | − 540 |
| 110.0 | 55.00 | + 0.52321 | − 7654 | + 1.82110 | + 1786 | + 0.6502 | + 372 | − 0.62394 | − 4053 | + 0.18279 | − 677 |
| 112.5 | 56.25 | + 0.44667 | − 7303 | + 1.83896 | + 1590 | + 0.6874 | + 334 | − 0.66447 | − 3349 | + 0.17602 | − 794 |
| 115.0 | 57.50 | + 0.37364 | − 6982 | + 1.85486 | + 1411 | + 0.7208 | + 300 | − 0.70096 | − 3277 | + 0.16808 | − 893 |
| 117.5 | 58.75 | + 0.30382 | − 6684 | + 1.86897 | + 1246 | + 0.7508 | + 267 | − 0.73373 | − 2929 | + 0.15915 | − 977 |
| 120.0 | 60.00 | + 0.23698 | − 6406 | + 1.88143 | + 1091 | + 0.7775 | + 237 | − 0.76302 | − 2604 | + 0.14938 | − 1049 |
| 122.5 | 61.25 | + 0.17292 | − 6141 | + 1.89234 | + 946 | + 0.8012 | + 208 | − 0.78906 | − 2293 | + 0.13889 | − 1111 |
| 125.0 | 62.50 | + 0.11151 | − 5887 | + 1.90180 | + 808 | + 0.8220 | + 180 | − 0.81199 | − 1995 | + 0.12778 | − 1165 |
| 127.5 | 63.75 | + 0.05264 | − 5642 | + 1.90988 | + 676 | + 0.8400 | + 154 | − 0.83194 | − 1708 | + 0.11613 | − 1211 |
| 130.0 | 65.00 | − 0.00378 | − 5404 | + 1.91664 | + 549 | + 0.8554 | + 128 | − 0.84902 | − 1428 | + 0.10402 | − 1251 |
| 132.5 | 66.25 | − 0.05782 | − 5171 | + 1.92213 | + 427 | + 0.8682 | + 103 | − 0.86330 | − 1160 | + 0.09151 | − 1281 |
| 135.0 | 67.50 | − 0.10953 | − 4940 | + 1.92640 | + 311 | + 0.8785 | + 73 | − 0.87490 | − 890 | + 0.07864 | − 1315 |
| 137.5 | 68.75 | − 0.15893 | − 4711 | + 1.92951 | + 199 | + 0.8863 | + 53 | − 0.88380 | − 627 | + 0.06549 | − 1338 |
| 140.0 | 70.00 | − 0.20604 | − 4483 | + 1.93150 | + 90 | + 0.8916 | + 30 | − 0.89007 | − 368 | + 0.05211 | − 1357 |
| 142.5 | 71.25 | − 0.25087 | − 4254 | + 1.93240 | − 15 | + 0.8946 | + 6 | − 0.89375 | − 107 | + 0.03854 | − 1373 |
| 145.0 | 72.50 | − 0.29341 | − 4024 | + 1.93225 | − 116 | + 0.8952 | − 19 | − 0.89482 | + 152 | + 0.02481 | − 1382 |
| 147.5 | 73.75 | − 0.33365 | − 3790 | + 1.93109 | − 213 | + 0.8933 | − 42 | − 0.89330 | + 411 | + 0.01099 | − 1388 |
| 150.0 | 75.00 | − 0.37155 | − 3551 | + 1.92896 | − 307 | + 0.8891 | − 65 | − 0.88919 | + 676 | − 0.00289 | − 1390 |
| 152.5 | 76.25 | − 0.40706 | − 3307 | + 1.92589 | − 397 | + 0.8826 | − 90 | − 0.88243 | + 942 | − 0.01679 | − 1389 |
| 155.0 | 77.50 | − 0.44013 | − 3057 | + 1.92192 | − 483 | + 0.8736 | − 115 | − 0.87301 | + 1213 | − 0.03068 | − 1380 |
| 157.5 | 78.75 | − 0.47070 | − 2798 | + 1.91709 | − 564 | + 0.8621 | − 141 | − 0.86088 | + 1490 | − 0.04448 | 1368 |
| 160.0 | 80.00 | − 0.49868 | − 2530 | + 1.91144 | − 640 | + 0.8480 | − 167 | − 0.84598 | + 1775 | − 0.05816 | − 1351 |
| 162.5 | 81.25 | − 0.52398 | − 2250 | + 1.90505 | − 709 | + 0.8313 | − 193 | − 0.82823 | + 2070 | − 0.07167 | − 1326 |
| 165.0 | 82.50 | − 0.54648 | − 1955 | + 1.89796 | − 773 | + 0.8120 | − 221 | − 0.80753 | + 2377 | − 0.08493 | − 1295 |
| 167.5 | 83.75 | − 0.56603 | − 1643 | + 1.89023 | − 829 | + 0.7899 | − 251 | − 0.78376 | + 2699 | − 0.09788 | − 1257 |
| 170.0 | 85.00 | − 0.58246 | − 1311 | + 1.88194 | − 876 | + 0.7648 | − 282 | − 0.75677 | + 3039 | − 0.11045 | − 1209 |
| 172.5 | 86.25 | − 0.59557 | − 952 | + 1.87318 | − 912 | + 0.7366 | − 315 | − 0.72638 | + 3405 | − 0.12254 | − 1149 |
| 175.0 | 87.50 | − 0.69509 | 563 | + 1.86406 | − 933 | + 0.7051 | − 350 | − 0.69233 | + 3798 | − 0.13403 | − 1077 |
| 177.5 | 88.75 | − 0.61072 | − 132 | + 1.85473 | − 935 | + 0.6701 | − 389 | − 0.65435 | + 4231 | − 0.14480 | − 982 |
| 180.0 | 90.00 | − 0.61204 | + 348 | + 1.84538 | − 913 | + 0.6312 | − 432 | − 0.61204 | + 4711 | − 0.15462 | − 866 |
| 182.5 | 91.25 | − 0.60856 | + 898 | + 1.83625 | − 854 | + 0.5880 | − 480 | − 0.56493 | + 5259 | − 0.16328 | − 710 |
| 185.0 | 92.50 | − 0.59958 | + 1538 | + 1.82771 | − 742 | + 0.5400 | − 538 | − 0.51234 | + 5895 | − 0.17038 | − 505 |
| 187.5 | 93.75 | − 0.58420 | + 499 | + 1.82029 | − 158 | + 0.4862 | − 145 | − 0.45339 | + 1587 | − 0.17543 | − 84 |
| 188.125 | 94.0625 | − 0.57921 | + 550 | + 1.81871 | − 145 | + 0.4717 | − 149 | − 0.43752 | + 1638 | − 0.17627 | − 64 |
| 188.750 | 94.3750 | − 0.57371 | + 604 | + 1.81726 | − 130 | + 0.4568 | − 154 | − 0.42114 | + 1691 | − 0.17691 | − 44 |
| 189.375 | 94.6875 | − 0.59767 | + 661 | + 1.81596 | − 110 | + 0.4414 | − 159 | − 0.40423 | + 1748 | − 0.17735 | − 18 |
| 190.000 | 95.0000 | − 0.56106 | + 722 | + 1.81486 | − 90 | + 0.4255 | − 164 | − 0.38675 | + 1809 | − 0.17753 | + 8 |
| 190.625 | 95.3125 | − 0.55384 | + 788 | + 1.81396 | − 65 | + 0.4091 | − 169 | − 0.36866 | + 1873 | − 0.17745 | + 39 |
| 191.250 | 95.6250 | − 0.54596 | + 858 | + 1.81331 | − 36 | + 0.3922 | − 176 | − 0.34993 | + 1944 | − 0.17706 | + 74 |
| 191.875 | 95.9375 | − 0.53738 | + 933 | + 1.81295 | − 3 | + 0.3746 | − 183 | − 0.33049 | + 2017 | − 0.17632 | + 113 |
| 192.500 | 96.2500 | − 0.52805 | + 1016 | + 1.81292 | + 37 | + 0.3563 | − 189 | − 0.31032 | + 2100 | − 0.17519 | + 158 |
| 193.125 | 96.5625 | − 0.51789 | + 1108 | + 1.81329 | + 85 | + 0.3374 | − 197 | − 0.28932 | + 2192 | − 0.17361 | + 213 |
| 193.750 | 56.8750 | − 0.50681 | + 1208 | + 1.81414 | + 143 | + 0.3177 | − 206 | − 0.26740 | + 2290 | − 0.17148 | + 276 |
| 194.375 | 97.1875 | − 0.49473 | + 1321 | + 1.81557 | + 213 | + 0.2971 | − 216 | − 0.24450 | + 2403 | − 0.16872 | + 353 |
| 195.000 | 97.5000 | − 0.48152 | + 1448 | + 1.81770 | + 302 | + 0.2755 | − 226 | − 0.22047 | + 2529 | − 0.16519 | + 447 |
| 195.625 | 97.8125 | − 0.46704 | + 1592 | + 1.82072 | + 415 | + 0.2529 | − 239 | − 0.19518 | + 2673 | − 0.16072 | + 566 |
| 196.250 | 98.1250 | − 0.45112 | + 1761 | + 1.82487 | + 565 | + 0.2290 | − 255 | − 0.16845 | + 2829 | − 0.15506 | + 723 |
| 196.875 | 98.4375 | − 0.43351 | + 1959 | + 1.83052 | + 768 | + 0.2037 | − 270 | − 0.14016 | + 3049 | − 0.14783 | + 931 |
| 197.500 | 98.7500 | − 0.41392 | + 2199 | + 1.83820 | + 1069 | + 0.1767 | − 289 | − 0.10967 | + 3276 | − 0.13852 | + 1237 |
| 198.125 | 99.0625 | − 0.39193 | + 2482 | + 1.84889 | + 1540 | + 0.1478 | − 312 | − 0.07691 | + 3559 | − 0.12615 | + 1715 |
| 198.750 | 99.3750 | − 0.36711 | + 444 | + 1.86429 | + 322 | + 0.1166 | − 54 | − 0.04132 | + 633 | − 0.10900 | + 352 |
| 198.8542 | 99.4271 | − 0.36267 | + 453 | + 1.86751 | + 347 | + 0.1112 | − 55 | − 0.03509 | + 641 | − 0.10548 | + 377 |
| 198.9584 | 99.4792 | − 0.35814 | + 461 | + 1.87098 | + 375 | + 0.1057 | − 55 | − 0.02876 | + 640 | − 0.10171 | + 405 |

| $v_0$ | $v^1$ | $x$ | Diff. | $y$ | Diff. | $\varrho$ | Diff. | $x_1$ | Diff. | $y_1$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 199°.0625 | 99°.5312 | − 0.35353 | + 468 | + 1.87473 | + 408 | + 0.1002 | − 56 | − 0.02236 | + 647 | − 0.09766 | + 438 |
| 199.1696 | 99.5833 | − 0.34885 | + 475 | + 1.87881 | + 444 | + 0.0946 | − 56 | − 0.01589 | + 655 | − 0.09328 | + 474 |
| 199.2708 | 99.6354 | − 0.34410 | + 479 | + 1.88325 | + 485 | + 0.0890 | − 56 | − 0.00934 | + 658 | − 0.08854 | + 516 |
| 199.3750 | 99.6875 | − 0.33931 | + 481 | + 1.88810 | + 532 | + 0.0834 | − 56 | − 0.00276 | + 660 | − 0.08338 | + 563 |
| 199.4791 | 99.7395 | − 0.33450 | + 478 | + 1.89342 | + 587 | + 0.0778 | − 55 | + 0.00384 | + 637 | − 0.07775 | + 618 |
| 199.5832 | 99.7916 | − 0.32972 | + 468 | + 1.89929 | + 649 | + 0.0723 | − 53 | + 0.01041 | + 645 | − 0.07157 | + 679 |
| 199.6874 | 99.8437 | − 0.32504 | + 448 | + 1.90578 | + 719 | + 0.0670 | − 52 | + 0.01686 | + 629 | − 0.06478 | + 750 |
| 199.7916 | 99.8958 | − 0.32056 | + 416 | + 1.91297 | + 799 | + 0.0618 | − 49 | + 0.02315 | + 596 | − 0.05728 | + 831 |
| 199.8958 | 99.9479 | − 0.31640 | + 364 | + 1.92096 | + 887 | + 0.0569 | − 43 | + 0.02911 | + 543 | − 0.04897 | + 919 |
| 200.0000 | 100.000 | − 0.31276 | + 285 | + 1.92983 | + 975 | + 0.0526 | − 34 | + 0.03454 | + 464 | − 0.03978 | + 1006 |
| 200.1042 | 100.0521 | − 0.30991 | + 176 | + 1.93958 | + 1056 | + 0.0492 | − 25 | + 0.03918 | + 354 | − 0.02972 | + 1088 |
| 200.2084 | 100.1042 | − 0.30815 | + 39 | + 1.95014 | + 1117 | + 0.0467 | − 12 | + 0.04272 | + 219 | − 0.01884 | + 1149 |
| 200.3125 | 100.1562 | − 0.30776 | − 118 | + 1.96131 | + 1143 | + 0.0455 | + 2 | + 0.04491 | − 61 | − 0.00735 | + 1175 |
| 200.4167 | 100.2083 | − 0.30894 | − 275 | + 1.97274 | + 1126 | + 0.0457 | + 16 | + 0.04552 | − 97 | + 0.00440 | + 1158 |
| 200.5208 | 100.2604 | − 0.31169 | − 411 | + 1.98400 | + 1078 | + 0.0473 | + 29 | + 0.04455 | − 232 | + 0.01598 | + 1111 |
| 200.6250 | 100.3125 | − 0.31580 | − 521 | + 1.99478 | + 1008 | + 0.0502 | + 38 | + 0.04223 | − 342 | + 0.02709 | + 1041 |
| 200.7292 | 100.3646 | − 0.32101 | − 603 | + 2.00486 | + 930 | + 0.0540 | + 44 | + 0.03881 | − 424 | + 0.03750 | + 962 |
| 200.8334 | 100.4167 | − 0.32704 | − 662 | + 2.01416 | + 853 | + 0.0584 | + 50 | + 0.03457 | − 483 | + 0.04712 | + 886 |
| 200.9375 | 100.4687 | − 0.33366 | − 701 | + 2.02269 | + 780 | + 0.0634 | + 53 | + 0.02974 | − 522 | + 0.05598 | + 813 |
| 201.0417 | 100.5208 | − 0.34067 | − 726 | + 2.03049 | + 714 | + 0.0687 | + 54 | + 0.02452 | − 548 | + 0.06411 | + 748 |
| 201.1458 | 100.5729 | − 0.34793 | − 742 | + 2.03763 | + 655 | + 0.0741 | + 55 | + 0.01904 | − 563 | + 0.07159 | + 688 |
| 201.2500 | 100.6250 | − 0.35535 | − 750 | + 2.04418 | + 603 | + 0.0796 | + 56 | + 0.01341 | − 571 | + 0.07847 | + 637 |
| 201.3542 | 100.6771 | − 0.36285 | − 754 | + 2.05021 | + 557 | + 0.0852 | + 56 | + 0.00770 | − 576 | + 0.08484 | + 590 |
| 201.4584 | 100.7292 | − 0.37039 | − 754 | + 2.05578 | + 517 | + 0.0908 | + 56 | + 0.00194 | − 575 | + 0.09074 | + 551 |
| 201.5625 | 100.7812 | − 0.37793 | − 752 | + 2.06095 | + 482 | + 0.0964 | + 55 | − 0.00381 | − 573 | + 0.09625 | + 517 |
| 201.6667 | 100.8333 | − 0.38545 | − 749 | + 2.06577 | + 450 | + 0.1019 | + 54 | − 0.00954 | − 571 | + 0.10142 | + 484 |
| 201.7709 | 100.8854 | − 0.39294 | − 745 | + 2.07027 | + 420 | + 0.1073 | + 54 | − 0.01525 | − 566 | + 0.10626 | + 454 |
| 201.8751 | 100.9375 | − 0.40039 | − 739 | + 2.07447 | + 394 | + 0.1127 | + 53 | − 0.02091 | − 561 | + 0.11080 | + 429 |
| 201.9792 | 100.9896 | − 0.40778 | − 734 | + 2.07841 | + 371 | + 0.1180 | + 54 | − 0.02652 | − 555 | + 0.11509 | + 405 |
| 202.0834 | 101.0417 | − 0.41512 | − 728 | + 2.08212 | + 351 | + 0.1234 | + 54 | − 0.03207 | − 550 | + 0.11914 | + 386 |
| 202.1876 | 101.0938 | − 0.42240 | − 723 | + 2.08563 | + 332 | + 0.1286 | + 52 | − 0.03757 | − 545 | + 0.12300 | + 367 |
| 202.2917 | 101.1458 | − 0.42963 | − 717 | + 2.08895 | + 315 | + 0.1338 | + 51 | − 0.04302 | − 540 | + 0.12667 | + 350 |
| 202.3958 | 101.1979 | − 0.43680 | − 711 | + 2.09210 | + 298 | + 0.1389 | + 50 | − 0.04842 | − 535 | + 0.13017 | + 334 |
| 202.5000 | 101.2500 | − 0.44391 | − 4140 | + 2.09508 | + 1509 | + 0.1439 | + 288 | − 0.05377 | − 3067 | + 0.13351 | + 1725 |
| 203.125 | 101.5625 | − 0.48531 | − 3944 | + 2.11017 | + 1149 | + 0.1727 | + 269 | − 0.08444 | − 2876 | + 0.15076 | + 1370 |
| 203.750 | 101.8750 | − 0.52475 | − 3774 | + 2.12166 | + 894 | + 0.1996 | + 252 | − 0.11320 | − 2707 | + 0.16446 | + 1122 |
| 204.375 | 102.1875 | − 0.56249 | − 3626 | + 2.13060 | + 703 | + 0.2248 | + 237 | − 0.14027 | − 2560 | + 0.17568 | + 936 |
| 205.000 | 102.5000 | − 0.59875 | − 3195 | + 2.13763 | + 553 | + 0.2485 | + 224 | − 0.16587 | − 2431 | + 0.18504 | + 792 |
| 205.625 | 102.8125 | − 0.63370 | − 3381 | + 2.14316 | + 432 | + 0.2709 | + 213 | − 0.19018 | − 2318 | + 0.19296 | + 677 |
| 206.250 | 103.1250 | − 0.66751 | − 3278 | + 2.14748 | + 332 | + 0.2922 | + 204 | − 0.21336 | − 2216 | + 0.19973 | + 582 |
| 206.875 | 103.4375 | − 0.70029 | − 3186 | + 2.15080 | + 246 | + 0.3126 | + 195 | − 0.23552 | − 2126 | + 0.20555 | + 503 |
| 207.500 | 103.7500 | − 0.73215 | − 3101 | + 2.15326 | + 173 | + 0.3321 | + 187 | − 0.25678 | − 2042 | + 0.21058 | + 435 |
| 208.125 | 104.0625 | − 0.76316 | − 3023 | + 2.15499 | + 109 | + 0.3508 | + 179 | − 0.27720 | − 1966 | + 0.21493 | + 376 |
| 208.750 | 104.3750 | − 0.79339 | − 2952 | + 2.15608 | + 52 | + 0.3687 | + 173 | − 0.29686 | − 1896 | + 0.21869 | + 326 |
| 209.375 | 104.6875 | − 0.82291 | − 2885 | + 2.15660 | + 1 | + 0.3860 | + 167 | − 0.31582 | − 1830 | + 0.22195 | + 281 |
| 210.000 | 105.0000 | − 0.85176 | − 2822 | + 2.15661 | − 44 | + 0.4027 | + 161 | − 0.33412 | − 1769 | + 0.22476 | + 241 |
| 210.625 | 105.3125 | − 0.87998 | − 2764 | + 2.15617 | − 86 | + 0.4188 | + 156 | − 0.35181 | − 1713 | + 0.22717 | + 205 |
| 211.250 | 105.6250 | − 0.90762 | − 2709 | + 2.15531 | − 124 | + 0.4344 | + 150 | − 0.36894 | − 1659 | + 0.22922 | + 173 |
| 211.875 | 105.9375 | − 0.93471 | − 2658 | + 2.15407 | − 159 | + 0.4494 | + 146 | − 0.38553 | − 1610 | + 0.23095 | + 143 |
| 212.500 | 106.2500 | − 0.96129 | − 2608 | + 2.15248 | − 192 | + 0.4640 | + 142 | − 0.40163 | − 1562 | + 0.23238 | + 116 |
| 213.125 | 106.5625 | − 0.98737 | − 2561 | + 2.15056 | − 222 | + 0.4782 | + 137 | − 0.41725 | − 1516 | + 0.23354 | + 92 |
| 213.750 | 106.8750 | − 1.01298 | − 2516 | + 2.14834 | − 251 | + 0.4919 | + 133 | − 0.43241 | − 1473 | + 0.23446 | + 68 |
| 214.375 | 107.1875 | − 1.03814 | − 2473 | + 2.14583 | − 277 | + 0.5052 | + 129 | − 0.44714 | − 1432 | + 0.23514 | + 49 |
| 215.000 | 107.5000 | − 1.06287 | − 2432 | + 2.14306 | − 301 | + 0.5181 | + 126 | − 0.46146 | − 1392 | + 0.23563 | + 30 |
| 215.625 | 107.8125 | − 1.08719 | − 2392 | + 2.14005 | − 325 | + 0.5307 | + 122 | − 0.47538 | − 1355 | + 0.23593 | + 11 |

| $r_0$ | $v^1$ | $x$ | Diff. | $y$ | Diff. | $\varrho$ | Diff. | $x_1$ | Diff. | $y_1$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ° | ° | | | | | | | | | | |
| 216.250 | 108.1250 | — 1.11111 | — 2354 | + 2.13680 | — 347 | + 0.5429 | + 119 | — 0.48893 | — 1318 | + 0.23604 | — 5 |
| 216.875 | 108.4375 | — 1.13165 | — 2316 | + 2.13333 | — 368 | + 0.5548 | + 115 | — 0.50211 | — 1282 | + 0.23599 | — 20 |
| 217.500 | 108.7500 | — 1.15781 | — 2281 | + 2.12965 | — 388 | + 0.5663 | + 112 | — 0.51493 | — 1249 | + 0.23579 | — 34 |
| 218.125 | 109.0625 | — 1.18062 | — 2247 | + 2.12577 | — 406 | + 0.5776 | + 109 | — 0.52742 | — 1217 | + 0.23545 | — 47 |
| 218.750 | 109.3750 | — 1.20309 | — 2214 | + 2.12171 | — 425 | + 0.5885 | + 107 | — 0.53959 | — 1186 | + 0.23498 | — 61 |
| 219.375 | 109.6875 | — 1.22523 | — 2181 | + 2.11746 | — 443 | + 0.5992 | + 105 | — 0.55145 | — 1159 | + 0 23437 | — 73 |
| 220.000 | 110.0000 | — 1.24704 | — 8420 | + 2.11303 | — 1929 | + 0.6097 | + 388 | — 0.56300 | — 4337 | + 0.23364 | — 392 |
| 222.5 | 111.25 | — 1.33124 | — 7960 | + 2.09374 | — 2161 | + 0.6485 | + 349 | — 0.60637 | — 3910 | + 0.22972 | — 535 |
| 225.0 | 112.50 | — 1.41084 | — 7534 | + 2.07213 | — 2366 | + 0.6834 | + 314 | — 0.64547 | — 3528 | + 0.22437 | — 652 |
| 227.5 | 113.75 | — 1.48623 | — 7147 | + 2.04847 | — 2547 | + 0.7148 | + 281 | — 0.68075 | 3171 | + 0.21785 | — 747 |
| 230.0 | 115.00 | — 1.55770 | — 6778 | + 2.02300 | — 2712 | + 0.7429 | + 251 | — 0.71246 | — 2844 | + 0.21038 | — 825 |
| 232.5 | 116.25 | — 1.62548 | — 6428 | + 1.99588 | — 2862 | + 0.7680 | + 223 | — 0.74090 | — 2536 | + 0.20213 | — 889 |
| 235.0 | 117.50 | — 1.68976 | — 6091 | + 1.96726 | — 3001 | + 0.7903 | + 195 | — 0.76626 | — 2243 | + 0.19324 | — 944 |
| 237.5 | 118.75 | — 1.75067 | — 5766 | + 1.93725 | — 3130 | + 0.8093 | + 170 | — 0.78869 | — 1964 | + 0.18380 | — 990 |
| 240.0 | 120.00 | — 1.80833 | — 5451 | + 1.90595 | — 3249 | + 0.8268 | + 145 | — 0.80833 | — 1696 | + 0.17390 | — 1026 |
| 242.5 | 121.25 | — 1.86284 | — 5143 | + 1.87346 | — 3361 | + 0.8413 | + 12 | — 0.82529 | — 1438 | + 0.16364 | — 1057 |
| 245.0 | 122.50 | — 1.91427 | — 4840 | + 1.83985 | — 3467 | + 0.8535 | + 99 | — 0.83967 | — 1186 | + 0.15307 | — 1083 |
| 247.5 | 123.75 | — 1.96267 | — 4542 | + 1.80518 | — 3567 | + 0.8634 | + 75 | — 0.85153 | — 941 | + 0.14221 | — 1104 |
| 250.0 | 125.00 | — 2.00809 | — 4247 | + 1.76951 | — 3662 | + 0.8709 | + 53 | — 0.86094 | — 700 | + 0.13120 | — 1120 |
| 252.5 | 126.25 | — 2.05056 | — 3954 | + 1.73289 | — 3751 | + 0.8762 | + 31 | — 0.86794 | — 464 | + 0.12000 | — 1133 |
| 255.0 | 127.50 | — 2.09010 | — 3660 | + 1.69538 | — 3835 | + 0.8793 | + 9 | — 0.87258 | — 227 | + 0.10867 | — 1141 |
| 257.5 | 128.75 | — 2.12670 | — 3366 | + 1.65703 | — 3916 | + 0.8802 | — 13 | — 0.87485 | + 6 | + 0.09726 | — 1148 |
| 260.0 | 130.00 | — 2.16039 | — 3070 | + 1.61787 | — 3992 | + 0.8789 | — 35 | — 0.87479 | + 242 | + 0.08578 | — 1151 |
| 262.5 | 131.25 | — 2.19106 | — 2770 | + 1.57795 | — 4065 | + 0.8754 | — 56 | — 0.87237 | + 479 | + 0.07427 | — 1153 |
| 265.0 | 132.50 | — 2.21876 | — 2465 | + 1.53730 | — 4133 | + 0.8698 | — 79 | — 0.86758 | + 719 | + 0.06274 | — 1150 |
| 267.5 | 133.75 | — 2.24341 | — 2155 | + 1.49597 | — 4197 | + 0.8619 | — 102 | — 0.86039 | + 964 | + 0.05124 | — 1145 |
| 270.0 | 135.00 | — 2.26496 | — 1836 | + 1.45400 | — 4256 | + 0.8517 | — 126 | — 0.85075 | + 1216 | + 0.03979 | — 1137 |
| 272.5 | 136.25 | — 2.28332 | — 1509 | + 1.41144 | — 4312 | + 0.8391 | — 151 | — 0.83859 | + 1474 | + 0.02842 | — 1128 |
| 275.0 | 137.50 | — 2.29841 | — 1172 | + 1.36832 | — 4364 | + 0.8240 | — 176 | — 0.82385 | + 1740 | + 0.01714 | — 1115 |
| 277.5 | 138.75 | — 2.31013 | — 819 | + 1.32468 | — 4411 | + 0.8064 | — 202 | — 0.80645 | + 2022 | + 0.00599 | — 1099 |
| 280.0 | 140.00 | — 2.31832 | — 450 | + 1.28057 | — 4453 | + 0.7862 | — 230 | — 0.78623 | + 2318 | — 0.00500 | — 1081 |
| 282.5 | 141.25 | 2.32282 | — 62 | + 1.23604 | — 4488 | + 0.7632 | — 260 | — 0.76305 | + 2632 | — 0.01581 | — 1055 |
| 285.0 | 142.50 | — 2.32344 | + 351 | + 1.19116 | — 4517 | + 0.7372 | — 292 | — 0.73673 | + 2969 | — 0.02636 | — 1027 |
| 287.5 | 143.75 | — 2.31993 | + 794 | + 1.14599 | — 4538 | + 0.7080 | — 327 | — 0.70704 | + 3336 | — 0.03663 | — 991 |
| 290.0 | 145.00 | — 2.31199 | + 1276 | + 1.10061 | 4550 | + 0.6753 | — 366 | 0.67368 | + 3739 | — 0.04654 | — 949 |
| 292.5 | 146.25 | — 2.29923 | + 1810 | + 1.05511 | — 4547 | + 0.6387 | — 409 | — 0.63629 | + 4194 | — 0.05603 | — 893 |
| 295.0 | 147.50 | — 2.28113 | + 2410 | + 1.00964 | — 4526 | + 0.5979 | — 458 | — 0.59435 | + 4714 | — 0.06496 | — 821 |
| 297.5 | 148.75 | — 2.25703 | + 3101 | + 0.96438 | — 4481 | + 0.5521 | — 516 | — 0.54721 | + 5324 | — 0.07317 | — 726 |
| 300.0 | 150.00 | — 2.22602 | + 3929 | + 0.91957 | — 4391 | + 0.5005 | — 587 | — 0.49397 | + 6069 | — 0.08043 | — 589 |
| 302.5 | 151.25 | — 2.18673 | + 4972 | + 0.87566 | — 4231 | + 0.4418 | 678 | — 0.43328 | + 7029 | — 0.08632 | — 383 |
| 305.0 | 152.50 | — 2.13701 | + 1445 | + 0.83335 | — 1019 | + 0.3740 | — 187 | — 0.36299 | + 1946 | — 0.09015 | — 50 |
| 305.625 | 152.8125 | — 2.12256 | + 1541 | + 0.82316 | — 997 | + 0.3553 | — 196 | — 0.34353 | + 2037 | — 0.09065 | — 25 |
| 306.250 | 153.1250 | — 2.10715 | + 1648 | + 0.81319 | — 969 | + 0.3357 | — 205 | — 0.32316 | + 2138 | — 0.09090 | + 5 |
| 306.875 | 153.4375 | — 2.09067 | + 1768 | + 0.80350 | — 936 | + 0.3152 | — 216 | — 0.30178 | + 2254 | — 0.09085 | + 41 |
| 307.500 | 153.7500 | — 2.07299 | + 1905 | + 0.79414 | — 896 | + 0.2936 | — 229 | — 0.27924 | + 2384 | — 0.09044 | + 84 |
| 308.125 | 154.0625 | — 2.05394 | + 2065 | + 0.78518 | — 845 | + 0.2707 | — 244 | — 0.25540 | + 2536 | — 0.08960 | + 137 |
| 308.750 | 154.3750 | — 2.03329 | + 2255 | + 0.77673 | — 776 | + 0.2463 | — 260 | — 0.23004 | + 2728 | — 0.08823 | + 209 |
| 309.375 | 154.6875 | — 2.01074 | + 2487 | + 0.76897 | — 680 | + 0.2203 | — 281 | — 0.20276 | + 2951 | — 0.08614 | + 307 |
| 310.000 | 154.0000 | — 1.98587 | + 2785 | + 0.76217 | — 541 | + 0.1922 | — 309 | — 0.17325 | + 3242 | — 0.08307 | + 452 |
| 310.625 | 155.3125 | — 1.95802 | + 3199 | + 0.75676 | — 312 | + 0.1613 | — 347 | — 0.04083 | + 3652 | — 0.07855 | + 678 |
| 311.250 | 155.6250 | — 1.92603 | + 586 | + 0.75364 | — 19 | + 0.1266 | — 62 | — 0.10431 | + 661 | — 0.07177 | + 146 |
| 311.3542 | 155.6771 | — 1.92017 | + 604 | + 0.75345 | — 5 | + 0.1204 | — 64 | — 0.09770 | + 679 | — 0.07031 | + 161 |
| 311.4584 | 155.7292 | — 1.91413 | + 626 | + 0.75340 | + 10 | + 0.1140 | — 66 | — 0.09091 | + 701 | — 0.06870 | + 176 |
| 311.5625 | 155.7812 | — 1.90787 | + 648 | + 0.75350 | + 28 | + 0.1074 | — 68 | — 0.08390 | + 723 | — 0.06694 | + 194 |
| 311.6667 | 155.8333 | — 1.90139 | + 672 | + 0.75378 | + 49 | + 0.1006 | — 71 | — 0.07667 | + 746 | — 0.06500 | + 214 |

| $v_0$ | $v^1$ | $x$ | Diff. | $y$ | Diff. | $\varrho$ | Diff. | $x_1$ | Diff. | $y_1$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | | | | | | | | | | |
| 311.7709 | 155.8854 | — 1.89467 | + 701 | + 0.75427 | + 75 | + 0.0935 | — 73 | — 0.06921 | + 775 | — 0.06286 | + 241 |
| 311.8751 | 155.9375 | — 1.88766 | + 733 | + 0.75502 | + 105 | + 0.0862 | — 76 | — 0.06146 | + 807 | — 0.06045 | + 272 |
| 311.9792 | 155 9896 | — 1.88033 | + 770 | + 0.75607 | + 146 | + 0.0786 | — 79 | — 0.05339 | + 844 | — 0.05773 | + 312 |
| 312.0834 | 156.0417 | — 1.87263 | + 811 | + 0.75753 | + 198 | + 0.0707 | — 82 | — 0.04495 | + 885 | — 0.05461 | + 364 |
| 312.1876 | 156.0938 | — 1.86452 | + 860 | + 0.75951 | + 267 | + 0.0625 | — 87 | — 0.03610 | + 933 | — 0.05097 | + 433 |
| 312.2917 | 156.1458 | — 1.85592 | + 917 | + 0.76218 | + 370 | + 0.0538 | — 92 | — 0.02677 | + 991 | — 0.04664 | + 536 |
| 312.3958 | 156.1979 | — 1.84675 | + 978 | + 0.76588 | + 527 | + 0.0446 | — 97 | — 0.01686 | + 1051 | — 0.04128 | + 694 |
| 312.5000 | 156.2500 | — 183.697 | + 253 | + 0.77115 | + 169 | + 0.0349 | — 25 | — 0.00635 | + 271 | — 0.03434 | + 210 |
| 312.526 | 156.263 | — 1.83444 | + 255 | + 0.77284 | + 188 | + 0.0324 | — 24 | — 0.00364 | + 274 | — 0.03224 | + 230 |
| 312.552 | 156.276 | — 1.83189 | + 255 | + 0.77472 | + 211 | + 0.0300 | — 24 | — 0.00090 | + 273 | — 0.02994 | + 253 |
| 312.578 | 156.289 | — 1.82934 | + 252 | + 0.77683 | + 238 | + 0.0276 | — 24 | + 0.00283 | + 270 | — 0.02741 | + 279 |
| 312.604 | 146.302 | 1.82682 | + 246 | + 0.77921 | + 270 | + 0.0252 | — 24 | + 0.00453 | + 265 | — 0.02462 | + 312 |
| 212.630 | 156.315 | — 1.82436 | + 233 | + 0.78191 | + 309 | + 0.0228 | — 23 | + 0.00718 | + 251 | — 0.02150 | + 350 |
| 312.656 | 156.328 | — 1.82203 | + 209 | + 0.78500 | + 352 | + 0.0205 | — 20 | + 0.00969 | + 227 | — 0.01800 | + 394 |
| 312.682 | 156.341 | — 1.81994 | + 170 | + 0.78852 | + 396 | + 0.0185 | — 16 | + 0.01196 | + 188 | — 0.01406 | + 438 |
| 312.708 | 156.354 | — 1.81824 | + 111 | + 0.79248 | + 439 | + 0.0169 | — 10 | + 0.01384 | + 130 | — 0.00968 | + 480 |
| 312.734 | 156.367 | — 1.81713 | + 33 | + 0.79687 | + 463 | + 0.0159 | — 3 | + 0.01514 | — 51 | — 0.00488 | + 505 |
| 312.760 | 156.380 | — 1.81680 | — 48 | + 0.80150 | + 462 | + 0.0156 | + 6 | + 0.01565 | — 30 | + 0.00017 | + 504 |
| 312.786 | 156.393 | — 1.81728 | — 123 | + 0.80612 | + 438 | + 0.0162 | + 12 | + 0.01535 | — 105 | + 0.00521 | + 479 |
| 312.812 | 156.406 | — 1.81851 | — 178 | + 0.81050 | + 400 | + 0.0174 | + 18 | + 0.01430 | — 159 | + 0.01000 | + 442 |
| 312.838 | 156.419 | — 1.82029 | — 215 | + 0.81450 | + 358 | + 0.0192 | + 21 | + 0.01271 | — 197 | + 0.01442 | + 400 |
| 312.864 | 156.432 | — 1.82244 | — 239 | + 0.81608 | + 319 | + 0.0213 | + 23 | + 0.01074 | — 221 | + 0.01842 | + 360 |
| 312'890 | 156.445 | — 1.82483 | — 253 | + 0.82127 | + 285 | + 0.0236 | + 24 | + 0.00853 | — 235 | + 0.02202 | + 327 |
| 312.916 | 126.458 | — 1.82736 | — 259 | + 0.82412 | + 254 | + 0.0260 | + 25 | + 0.00618 | — 241 | + 0.02529 | + 295 |
| 312.942 | 156.471 | — 1.82995 | — 262 | + 0.82666 | + 228 | + 0.0285 | + 25 | + 0.00377 | — 244 | + 0.02824 | + 270 |
| 312.968 | 156.484 | — 1.83257 | — 263 | + 0.82894 | + 208 | + 0.0310 | + 25 | + 0.00133 | — 244 | + 0.03094 | + 250 |
| 312.994 | 156.497 | — 1.83520 | — 264 | + 0.83102 | + 192 | + 0.0335 | + 25 | + 0.00111 | — 246 | + 0.03344 | + 234 |
| 313.021 | 156.510 | — 1.83784 | — 1026 | + 0.83294 | + 621 | + 0.0360 | + 96 | — 0.00357 | — 954 | + 0.03578 | + 787 |
| 313.1250 | 156.5625 | — 1.84810 | — 981 | + 0.83915 | + 465 | + 0.0456 | + 91 | — 0.01311 | — 909 | + 0.04365 | + 632 |
| 313.2292 | 156.6146 | — 1.85791 | — 937 | + 0.84380 | + 362 | + 0.0547 | + 86 | — 0.02220 | — 865 | + 0.04997 | + 529 |
| 313.3333 | 156.6666 | — 1.86728 | — 896 | + 0.84742 | + 289 | + 0.0633 | + 82 | — 0.03085 | — 824 | + 0.05526 | + 456 |
| 313.4375 | 156.7187 | — 1.87624 | — 860 | + 0.81031 | + 234 | + 0.0715 | + 78 | — 0.03909 | — 788 | + 0.05982 | + 401 |
| 313.5417 | 156.7708 | — 1.88484 | — 829 | + 0.85265 | + 191 | + 0.0793 | + 75 | — 0.04697 | — 757 | + 0.06383 | + 358 |
| 313.6459 | 156.8229 | — 1.89313 | — 801 | + 0.85456 | + 157 | + 0 0868 | + 71 | — 0.05454 | — 730 | + 0.06741 | + 324 |
| 313.7500 | 156.8750 | — 1.90114 | — 776 | + 0.85613 | + 127 | + 0.0939 | + 69 | — 0.06184 | — 705 | + 0 07065 | + 295 |
| 813 8542 | 156.9271 | — 1.90890 | — 753 | + 0.85740 | + 103 | + 0.1008 | + 67 | — 0.06889 | — 682 | + 0.07360 | + 270 |
| 313.9584 | 156.9792 | — 1.91643 | — 732 | + 0.85843 | + 12 | + 0.1075 | + 64 | — 0.07571 | — 661 | + 0.07630 | + 249 |
| 314.0625 | 157.0312 | — 1.92375 | — 714 | + 0.85925 | + 65 | + 0.1139 | + 63 | — 0.08232 | — 642 | + 0.07879 | + 233 |
| 314.1666 | 157.0833 | — 1.93089 | — 697 | + 0.85990 | + 49 | + 0.1202 | + 61 | — 0.08874 | — 627 | + 0.08112 | + 216 |
| 314.2708 | 157.1354 | — 1.93786 | — 681 | + 0.86039 | + 35 | + 0.1263 | + 60 | — 0.09501 | — 611 | + 0.08328 | + 203 |
| 314.3750 | 157.1875 | — 1.94467 | — 3814 | + 0.86074 | — 0 | + 0.1323 | + 330 | — 0.10112 | — 3393 | + 0.08531 | + 1006 |
| 315.000 | 157.5000 | — 1.98281 | — 3449 | + 0.86074 | — 260 | + 0.1653 | + 294 | — 0.13505 | — 3035 | + 0.09537 | + 749 |
| 315.625 | 157.8125 | — 2.01730 | — 3174 | + 0.85814 | — 431 | + 0.1947 | + 268 | — 0.16540 | — 2764 | + 0.10286 | + 580 |
| 316.250 | 158.1250 | — 2.04904 | — 2956 | + 0.85383 | — 553 | + 0.2215 | + 247 | — 0.19304 | — 2553 | + 0 10866 | + 461 |
| 316.875 | 158.4375 | — 2.07860 | — 2776 | + 0.84830 | — 617 | + 0.2462 | + 229 | — 0.21857 | — 2377 | + 0.11327 | + 368 |
| 317.500 | 158.7500 | — 2.10636 | — 2622 | + 0.84183 | — 720 | + 0.2691 | + 214 | — 0.24234 | — 2230 | + 0.11695 | + 300 |
| 318.125 | 159.0625 | — 2.13258 | — 2488 | + 0.83463 | — 780 | + 0.2905 | + 202 | — 0.26464 | — 2101 | + 0 11995 | + 238 |
| 318.750 | 159.3750 | — 2.15746 | — 2370 | + 0.82683 | — 829 | + 0.3107 | + 191 | — 0.28565 | — 1988 | + 0.12233 | + 193 |
| 319.375 | 159.6875 | — 2.18116 | — 2264 | + 0.81854 | — 873 | + 0.3298 | + 181 | — 0.30553 | — 1888 | + 0.12426 | + 151 |
| 320.000 | 160.000 | — 2.20380 | — 2167 | + 0.80981 | — 910 | + 0.3479 | + 172 | — 0 32441 | — 1797 | + 0.12577 | + 116 |
| 320.625 | 160.3125 | — 2.22547 | — 2072 | + 0.80071 | — 943 | + 0.3651 | + 164 | — 0.34238 | — 1715 | + 0.12693 | + 85 |
| 321.250 | 160.6250 | — 2.24626 | — 1997 | + 0.79128 | — 972 | + 0.3815 | + 157 | — 0.35953 | — 1638 | + 0.12778 | + 58 |
| 321.875 | 160.9375 | — 2.26623 | — 1920 | + 0.78156 | — 997 | + 0.3972 | + 150 | — 0.37591 | — 1566 | + 0.12836 | + 35 |
| 322.500 | 161.2500 | — 2.28543 | — 1847 | + 0.77159 | — 1019 | + 0.4122 | + 143 | — 0.39157 | — 1500 | + 0.12871 | + 15 |
| 323.125 | 161.5625 | — 2.30390 | — 1780 | + 0.76140 | — 1041 | + 0.4265 | + 137 | — 0.40657 | — 1437 | + 0.12886 | — 5 |

| $v_0$ | $v^1$ | $x$ | Diff. | $y$ | Diff. | $\varrho$ | Diff. | $x_1$ | Diff. | $y_1$ | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ° | ° | | | | | | | | | | |
| 323.750 | 161.8750 | − 2.32170 | − 1717 | + 0.75099 | − 1060 | + 0.4402 | + 132 | − 0.42094 | − 1381 | + 0.12881 | − 23 |
| 324.375 | 162.1875 | − 2.33887 | − 1657 | + 0.74039 | − 1078 | + 0.4534 | + 126 | − 0.43475 | − 1326 | + 0.12858 | − 39 |
| 325.000 | 162.5000 | − 2.35544 | − 1600 | + 0.72961 | − 1094 | + 0.4660 | + 121 | − 0.44801 | − 1275 | + 0.12819 | − 53 |
| 325.625 | 162.8125 | − 2.37144 | − 1544 | + 0.71867 | − 1109 | + 0.4781 | + 116 | − 0.46076 | − 1224 | + 0.12766 | − 65 |
| 326.250 | 163.1250 | - 2.38688 | − 1492 | + 0.70758 | − 1124 | + 0.4897 | + 112 | − 0.47300 | − 1178 | + 0.12701 | − 79 |
| 326.875 | 163.4375 | − 2.40180 | − 1442 | + 0.69634 | − 1137 | + 0.5009 | + 108 | − 0.48478 | − 1134 | + 0.12622 | − 91 |
| 327.500 | 163 7500 | − 2.41622 | − 1393 | + 0.68497 | − 1149 | + 0.5117 | + 104 | − 0.49612 | − 1091 | + 0.12531 | − 101 |
| 328.125 | 164 0625 | − 2.43015 | − 1346 | + 0.67348 | − 1161 | + 0.5221 | + 99 | − 0.50703 | − 1049 | + 0.12430 | − 111 |
| 328.750 | 164.3750 | − 2.44361 | − 1300 | + 0.66187 | − 1172 | + 0.5320 | + 95 | − 0.51752 | − 1009 | + 0.12319 | − 121 |
| 329.375 | 164.6875 | − 2.45661 | − 1257 | + 0.65015 | − 1184 | + 0.5415 | + 92 | − 0.52761 | − 972 | + 0.12198 | − 131 |
| 330.000 | 165.0000 | − 2.46918 | − 4604 | + 0.63831 | − 4827 | + 0.5507 | + 333 | − 0.53733 | − 5326 | + 0.12067 | − 600 |
| 332.5 | 166.25 | − 2.51527 | − 3986 | + 0.59004 | − 4954 | + 0.5840 | + 281 | − 0.57259 | − 2994 | + 0.11467 | − 705 |
| 335.0 | 167.50 | − 2.55513 | − 3411 | + 0.54050 | − 5060 | + 0.6121 | + 235 | − 0.60253 | − 2514 | + 0.10762 | − 790 |
| 337.5 | 168.75 | − 2.58924 | − 2872 | + 0.48990 | − 5149 | + 0.6356 | + 192 | − 0.62767 | − 2068 | + 0.09972 | − 861 |
| 340.0 | 170.00 | − 2.61796 | − 2357 | + 0.43841 | − 5225 | + 0.6548 | + 151 | − 0.64835 | − 1646 | + 0.09111 | − 920 |
| 342.5 | 171.25 | − 2.64153 | − 1863 | + 0.38616 | − 5288 | + 0.6699 | + 112 | − 0.66481 | − 1246 | + 0.08191 | − 968 |
| 345.0 | 172.50 | − 2.66016 | − 1382 | + 0.33328 | − 5341 | + 0.6811 | + 76 | − 0.67727 | − 860 | + 0.07223 | − 1004 |
| 347.5 | 173.75 | − 2.67398 | − 908 | + 0.27987 | − 5387 | + 0.6887 | + 39 | − 0.68587 | − 480 | + 0.06214 | − 1045 |
| 350.0 | 175.00 | − 2.68306 | − 439 | + 0.22600 | − 5424 | + 0.6926 | + 3 | − 0.69067 | + 106 | + 0.05169 | − 1074 |
| 352.5 | 176.25 | − 2.68745 | + 31 | + 0.17176 | − 5452 | + 0.6929 | − 33 | − 0.69173 | + 268 | + 0.01095 | − 1095 |
| 350.0 | 177.50 | − 2.68714 | + 506 | + 0.11724 | − 5474 | + 0.6896 | − 69 | − 0.68905 | + 650 | + 0.03000 | − 1113 |
| 357.5 | 178.75 | − 2.68208 | + 988 | + 0.06250 | − 5487 | + 0.6827 | − 106 | − 0.68255 | + 1035 | + 0.01887 | − 1124 |
| 360.0 | 180.00 | − 2.67220 | | + 0.00763 | | + 0.6721 | | − 0.67220 | | + 0.00763 | |

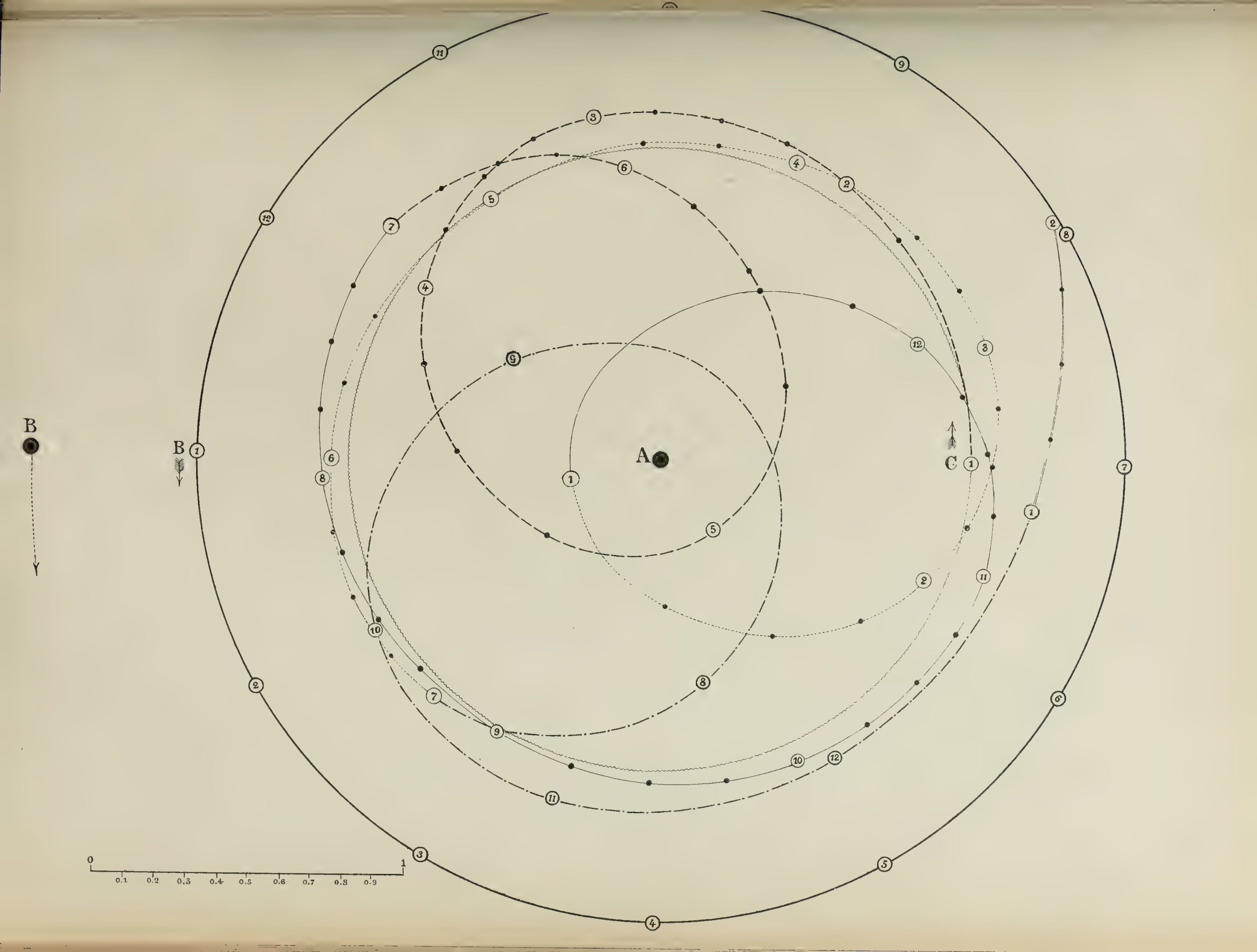
Damit man sich leichter ein Bild von der Bewegung des Körpers $C$ in dem vorliegenden Fall machen könne, habe ich wieder zur graphischen Darstellung gegriffen. Wirft der Leser einen Blick auf Tafel III. so bemerkt er im Centrum der zwei concentrischen Halbkreise einen Punct, welcher die Lage des Körpers $A$ angiebt. Der kleinere der zwei Halbkreise markirt die ungestörte Bahn des Körpers $C$, die anfänglich hackenförmig, dann epicyklisch gekrümmte Linie dessen wahre (gestörte) Bahn, während der grössere Halbkreis die Bahn des störenden Körpers $B$ versinnlicht. Die Richtung der Bewegung wurde auch hier durch Pfeile markirt und bezeichnen die fortlaufenden gleichen Nummern in der Bahn von $B$ und $C$ die jeweilige gleichzeitige Lage dieser zwei Körper in ihrer Bahn.

Während im früher behandelten Fall der gestörte Körper wenigstens für einen längeren Zeitraum bei dem Centralkörper, den er auch in der ungestörten Bahn hätte umkreisen sollen, blieb, entfernt sich hier der gestörte Körper sofort von demselben, um bald ganz zu dem störenden Körper überzugehen, den er schliesslich als Trabant und zwar in einer lang gestreckten und sehr excentrischen Ellipse umkreist.

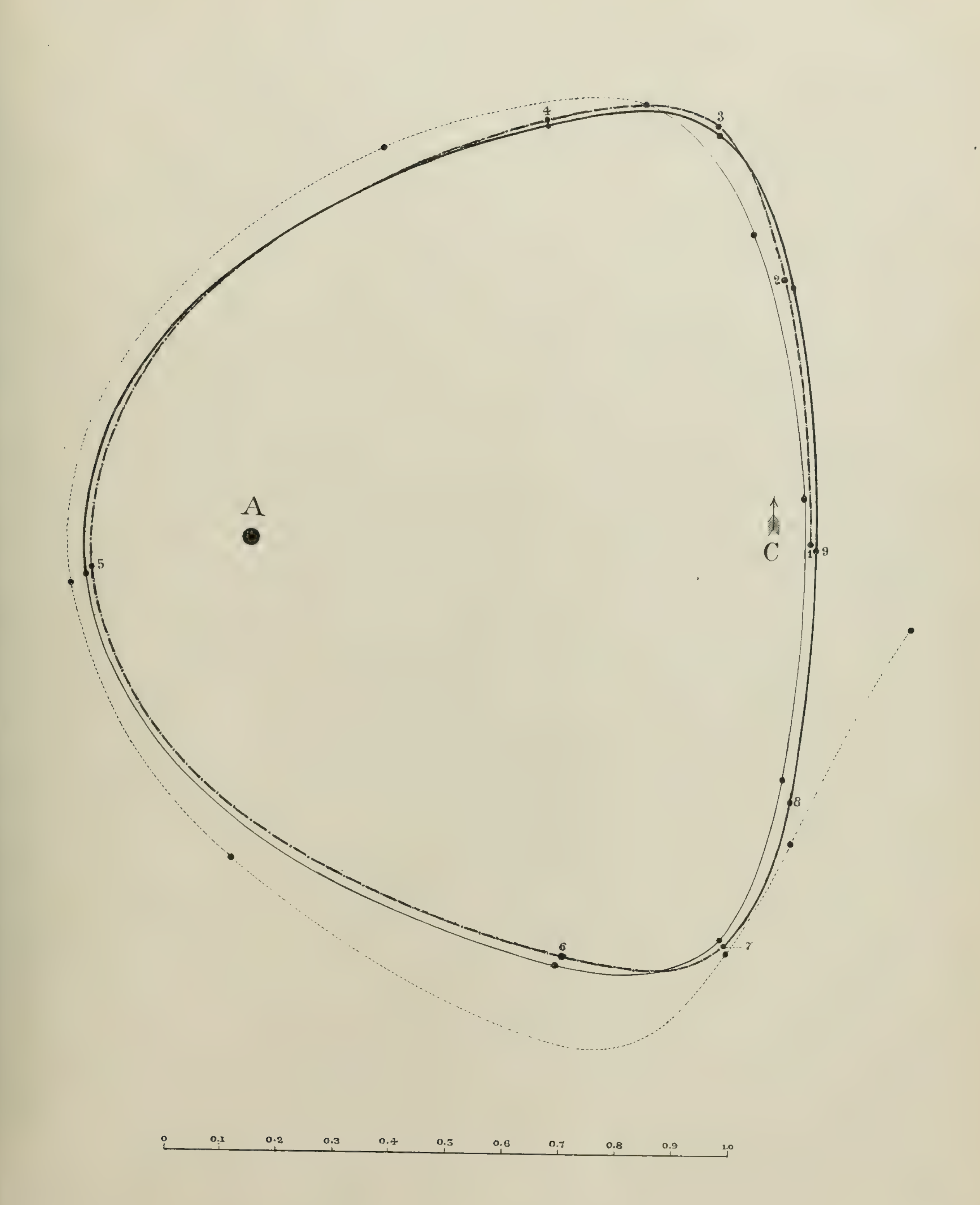
Die relative Bahn von $C$ um $B$ gibt Tafel IV wieder. Wie man bemerkt, fallen die ersten zwei Umläufe wieder weit näher zusammen als der dritte mit den vorhergehenden, doch berücksichtigt man auch die grosse Unsicherheit der obigen Werthe, welche hier schon durch die ausserordentliche Annäherung des gestörten an den störenden Körper bedingt wird, so erscheint doch die Möglichkeit ausgeschlossen, als ob wir es hier bloss mit einer scheinbaren Differenz zu thun hätten.

Grösseres Interesse bietet nur der erste Theil der Bahn bis zur Annäherung an den Körper $B$ dar. Die Anfangsgeschwindigkeit so zu ändern, dass die Körper $B$ und $C$ zusammenstossen, ist hier ein Leichtes.

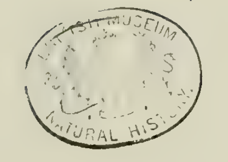
---


A
B
B
C
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

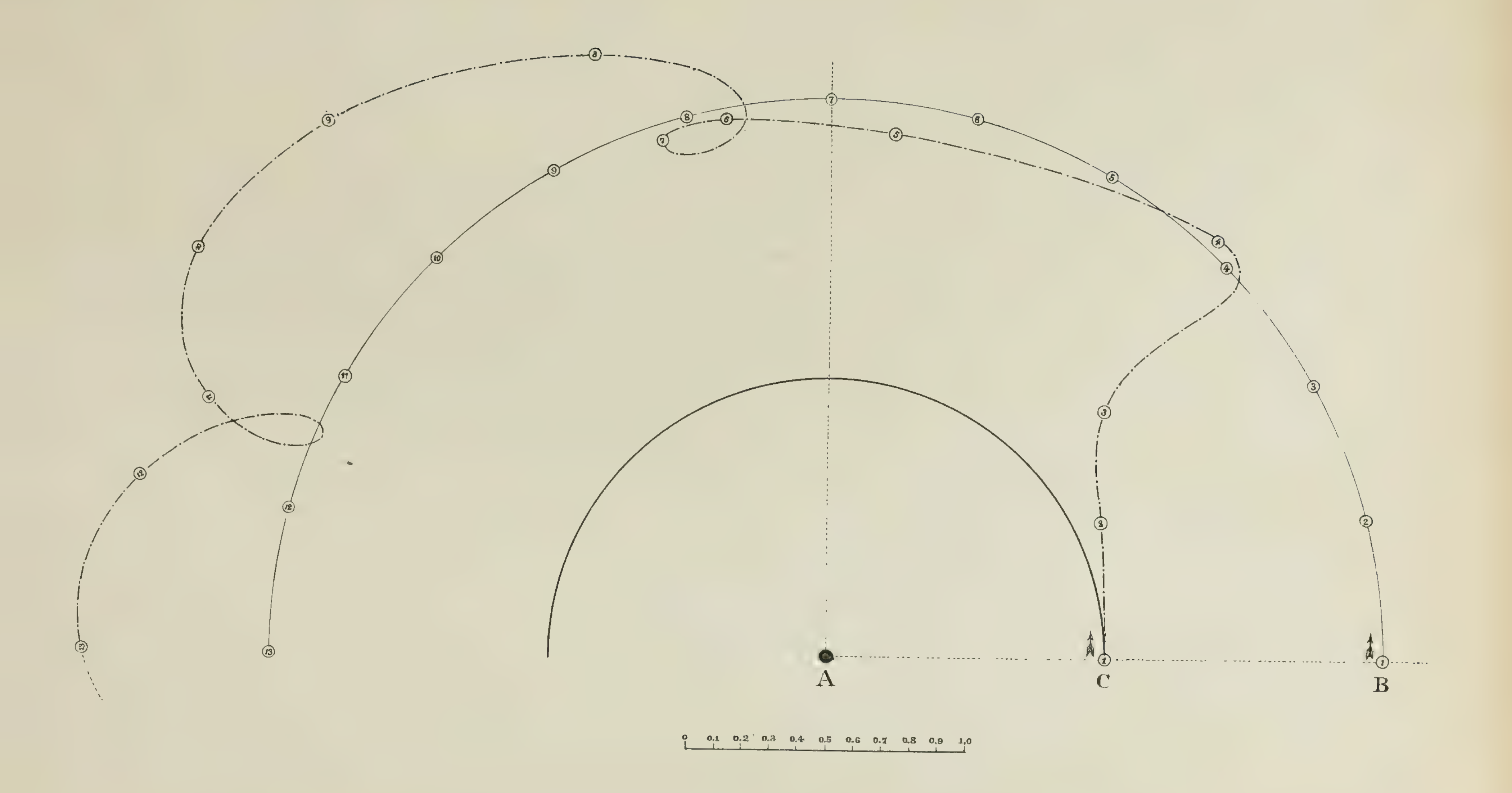




A
C
1
2
3
4
5
6
7
8
9
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0



III.





C
B
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5



# Untersuchungen

über die

# Organisation und systematische Stellung

der

# Receptaculitiden.

Von

**Hermann Rauff.**

(Mit 7 Tafeln.)



# Vorwort.

Das in den nachfolgenden Blättern bearbeitete Material gehört dem Kgl. Museum für Naturkunde in Berlin, der Sammlung der Kgl. Berg-Akademie und Geol. Land.-Anstalt dort, der Sammlung des Naturhistorischen Vereins für Rheinland und Westfalen in Bonn, dem Provinzial-Museum der physikal.-ökonom. Gesellschaft in Königsberg, der Kgl. Geolog. Sammlung in Göttingen, den Sammlungen des Staates in München, dem Museum in Reval, dem Reichsmuseum in Stockholm, der Privatsammlung des Herrn E. O. Ulrich in Newport, Kentucky, sowie mir selbst.

Ich kann nicht unterlassen, für die freundliche Unterstützung, die mir durch reichliche Zusendungen aus diesen Sammlungen zu Theil geworden ist und die Resultate dieser Arbeit allein ermöglicht hat, den Herren Beyrich, Dames, Hauchecorne, Jentzsch, von Koenen, von Zittel, F. von Schmidt in Petersburg, der mir die Revaler Stücke übergab, Lindström und Ulrich nochmals auch an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank abzustatten. Insbesondere aber fühle ich mich Herrn von Zittel tief verpflichtet, der mich zur Bearbeitung der fossilen Spongien veranlasst und damit auch die Anregung zu dieser Arbeit gegeben hat. Seine wohlwollende Theilnahme an dem Fortgang meiner Untersuchungen und unser Gedankenaustausch darüber befruchteten meine Studien und beeinflussten auch ihre Ergebnisse; denn ich muss hervorheben, dass Herr von Zittel die in den nachfolgenden Zeilen vertretene Anschauung Gümbels, wonach der Kalk in den einzelnen Elementen der Receptaculitenwand und seine fiedrige Structur nicht secundär, sondern primär sind, schon vor mir bestätigt und ver-

theidigt hat, während ich selbst anfänglich glaubte, die Hinde'sche Hypothese, dass die Receptaculitiden hexactinellide Spongien wären, stützen und weiter ausbauen zu können. Aber das erwies sich als völlig undurchführbar, und wie ich hoffe, wird die neue Reihe von Beobachtungen und meine Beurtheilung dieser davon überzeugen.

Hinsichtlich der wahren Natur der Receptaculitiden kommen meine Untersuchungen nur zu einem schmerzlichen Ergebnisse, wodurch die interessanten Körper aus dem Systeme wieder ausgestossen werden, um weiter obdachlos umher zu irren. Vielleicht gelingt es aber einem Glücklicheren, weil besser Unterrichteten, auf Grund der Einsicht, die wir nun von ihrem ganz eigenthümlichen Bau gewonnen haben, ihre wahren Beziehungen aufzufinden. Die Hoffnung auf eine solche Möglichkeit dürfte es rechtfertigen, dass ich diese Arbeit auch ohne ihren wichtigsten Abschluss veröffentliche. Möchte sie wenigstens als Grundlage für weitere Betrachtungen dienen können.

Das Thema ist hier im Wesentlichen nur so weit behandelt, als es die Erforschung der Organisation und der allgemeinen Charaktere erheischt, welche die Vertreter dieser Gruppe auszeichnen. Von einer neuen Revision aller Arten wurde Abstand genommen, weil das Material, das mir zur Verfügung stand, dazu doch nicht ausreichte; namentlich fehlten mir die amerikanischen Vorkommnisse. Einige Bemerkungen über ältere und mehrere neue Arten, die man in dieser Arbeit verzeichnet findet, behalte ich mir für einen Nachtrag an anderer Stelle vor.

---

# Einleitung.

Je weiter wir zurückblättern in der Urgeschichte des organischen Lebens auf unserm Planeten, um so fremdartiger wird der allgemeine Charakter der Lebewesen, die vor ausserordentlichen Zeiträumen die Erde bevölkerten, und um so mehr wächst die Anzahl derjenigen Organismen, die ihrer Deutung und systematischen Einreihung im Thier- oder Pflanzenreiche grosse Schwierigkeiten bereitet, oder selbst der Erkenntniss ihrer Beziehungen zu den voraufgegangenen oder nachfolgenden Verwandten bis jetzt unüberwindliche Hindernisse entgegengesetzt haben.

Zu diesen ganz problematischen Körpern gehört auch die Gruppe der Receptaculitiden, die ausser Receptaculites selbst noch die Gattungen Leptopoterion,[1]) Ischadites und Polygonosphaerites umfasst und auf die palaeolithischen Formationen vom Unter-Silur bis zum Kohlenkalke beschränkt ist.

Die nachstehenden Untersuchungen wurden durch die irrthümliche Annahme veranlasst, dass die Receptaculitiden hexactinellide Spongien wären, zu denen sie Hinde 1884 gestellt hat.[2]) Sie fielen damit in das Gebiet einer monographischen Arbeit über fossile Spongien, deren erste Abtheilung im Druck ist und den 40. Band der Palaeontographica bilden wird.

---

1) Leptopoterion E. O. Ulrich (1889). Eine andere von Ulrich aufgestellte untersilurische Gattung Lepidolites (1879) gehört zu Ischadites, wenigstens ihre typische Art, die ich untersuchen konnte: Lepidolites dickhauti Ulrich (ein wahrhaft barbarischer Name). Ich werde an anderm Orte in dem vorerwähnten Nachtrage darauf zurückkommen.

2) G. J. Hinde. On the structure and affinities of the family of the Receptaculitidae. Quart. Journ. Geol. Soc. London. vol. 40. 1884. p. 795 ff.

Welche Schwierigkeiten die Receptaculitiden ihrer Deutung entgegengesetzt haben, geht daraus hervor, dass man über ihre systematische Stellung die widersprechendsten Ansichten geäussert hat. Man hat sie mit Coniferenzapfen, mit Korallen, Crinoiden, Foraminiferen, Dactyloporiden, embryonalen Formen von Spongien (im phylogenetischen Sinne), eigenthümlich entwickelten Hexactinelliden und selbst mit Tunicaten verglichen.

Die Geschichte unserer Kenntniss der Receptaculitiden ist desshalb von nicht geringem Interesse, aber ich brauche hier nicht dabei zu verweilen, weil ich auf den Abriss bei Gümbel[1]) und die geschichtliche Einleitung in Hinde's Abhandlung[2]) verweisen kann.

(*Frühere Arbeiten.*) Nur dies sei kurz vorbemerkt: Defrance[3]) hat im Jahre 1827 die Gattung Receptaculites nach devonischen Versteinerungen von Chimay in Belgien aufgestellt. Aber erst im Jahre 1859 erfuhr der eigenthümliche Wandbau der Körper eine eingehendere Untersuchung durch Salter,[4]) der in Folge dessen die Receptaculiten zu der Foraminiferen-Gruppe der Orbitoliten stellte. Billings[5]) dagegen verglich sie mit den Gemmulae der Gattung Spongilla, der bekannten Süsswasserspongie. Dames[6]) erklärte sich wieder für ihre Foraminiferennatur, wobei er allerdings von einer wesentlich anderen Anschauung über ihren Erhaltungszustand ausging, als Salter. Zu einem ähnlichen Resultate wie Dames gelangte scheinbar auch Gümbel.[1]) Auch er theilte die Receptaculiten den Foraminiferen zu und zwar der Familie der Dactyloporiden. Aber dies Resultat war nur scheinbar ein ähnliches, weil die Dactyloporiden später als Kalkalgen erkannt wurden. Nächst Gümbel hat George Hinde[2]) unsere Kenntniss des Gegenstandes am meisten gefördert, und es schien, als ob er zu einem befriedigenden Ergebniss über die Natur dieser räthselhaften Versteinerungen gelangt wäre. Nach eingehender Darlegung seiner Untersuchungen versuchte er den Schluss

1) Gümbel. Organisat. u. syst. Stell. der Rec. Abhandl. der Bayer. Akad. Wiss. 1876. p. 169.
2) Hinde, a. a. O. p. 795—803.
3) Defrance. Dict. des Scienc. Nat. t. 45 p. 5.
4) Salter. Geological survey of Canada. Figures and Descriptions of Canad. organ. remains. Dec. I. 1859. p. 43. Taf. 10, Fig. 1—7.
5) Billings. Geological survey of Canada. Palaeozoic fossils. Vol. I. 1865. p. 378.
6) Dames. Devon. Ablag. bei Freiburg in Niederschlesien. Z. d. Geol. Ges. 20 Bd. 1868. p. 483—488. Taf. 10, Fig. 1.

zu rechtfertigen, dass die Receptaculitiden eine eigenthümliche Familie der Kieselspongien bildeten. Die Einzelelemente, die ihre Wand zusammensetzen, verglich er mit den Spiculen der Hexactinelliden und die einzelnen Theile jener Elemente mit den sechs z. Th. umgestalteten Strahlen eines differenzirt ausgebildeten Hexactines. Der Vergleich war überraschend, und obwohl man viel dagegen einwenden konnte, im allgemeinen befriedigte er, und viele Paläontologen haben Hinde's Anschauungen getheilt. Auch ich glaubte anfangs bei dem Kapitel Receptaculites und Verwandte für meine Spongien-Monographie nach Hinde's Arbeit kaum mehr thun zu können, als nochmals eine kritische Sichtung der Arten zu versuchen, namentlich der in Deutschland vorkommenden. Bei näherer Prüfung ergab sich jedoch, dass auch im Bau der merkwürdigen Körper noch vieles aufzuklären und zu ergänzen war, und vor allem ergab sich der, wie ich glaube zeigen zu können, sichere Nachweis, dass Gümbel Recht behält und dass die festen Theile der Receptaculitiden ursprünglich kalkig und nicht kieselig waren. Damit wird aber jeder Versuch, die Receptaculitiden mit den Hexactinelliden zusammenzustellen, von vornherein abgeschnitten.

---

## I. Ueber den Bau der Receptaculitiden-Skelete.

(*Diagnose zur ersten Orientirung. Terminologie.*) Indem ich nun zur Darlegung meiner Untersuchungen übergehe, bemerke ich für die erste Orientirung und zur Terminologie zunächst folgendes:

Die Receptaculitiden (Receptaculites, Leptopoterion, Ischadites, Polygonosphaerites) sind sphaerisch gestaltete, kuglige bis birnförmige, (nach meiner Auffassung sämmtlich) ringsum geschlossene Körper mit centralem Hohlraume. Ihre einzeilige Wand ist aus zahlreichen, gleichgestalteten, kalkigen Einzelelementen oder Meromen[1]) zusammengesetzt, die sämmtlich im Quincunx zu einander stehen und spirale Reihen bilden. Die aus rhombischen oder hexagonalen Täfelchen zusammengefügte Oberfläche lässt einen Wachsthumsanfang von bestimmter Construction erkennen, den ich unteren Pol oder Nucleus (Hinde, Billings) nenne; der obere Pol oder Apex wird in ähnlicher Weise durch bestimmt geordneten Zusammenschluss der Täfelchen markirt.

Die von den Täfelchen gebildete Aussenseite werde ich ausschliesslich, auch bei den schüsselförmigen Receptaculiten, als solche oder als Aussenfläche[2]) bezeichnen; dementsprechend auch nur von einer Innenseite oder Innenfläche[3]) der Schalenwand reden, nicht aber zugleich wie Hinde von Unter- und Oberseite, weil ich der Ansicht bin, dass die schüsselförmigen Receptaculiten nur Bruchstücke von ursprünglich geschlossenen Formen sind, und dass das, was Hinde „Upper layer“ nennt,

---

1) *μέρος*, einzelner Theil.

2) Outer or under surface bei Hinde a. a. O. p. 822 erste Zeile; Aeussere Decke, Gümbel; External integument, Ectorhin Billings.

3) Inner or upper layer Hinde; Innere Hülle Gümbel; Internal integument, Endorhin Billings.

die Innenfläche der untern Hälfte, also der untere Theil der Innenseite des Organismus ist.

Jedes Einzelelement oder Merom besteht aus sechs Theilen: einem äusseren Täfelchen (Lamnul), dessen Grundform der Rhombus ist, und aus fünf darunter liegenden, sich unter nahezu rechten Winkeln treffenden Armen (Brachialen).

Die Täfelchen[1]) oder Lamnule legen sich mit ihren Rändern eng aneinander oder selbst übereinander und bilden die dicht gefügte Aussenfläche von sehr zierlicher Zeichnung. Die kürzere Diagonale der rhombischen Täfelchen ist in der Regel meridional gestellt; doch kommt auch der andere Fall vor, dass die so gerichtete Diagonale die längere ist.

An der Innenseite eines jeden Täfelchens liegen in der Richtung seiner Diagonalen vier sich unter annähernd rechten Winkeln kreuzende Arme, die Tangential-Arme[2]) oder Tangentiale. Zwei davon sind den beiden Polen zugewandt und sollen desshalb Meridional-Arme oder Meridionale heissen. Der dem untern Pole zugewandte Arm wird von mir distaler Arm[3]) oder das Distal, der davon abgewandte: proximaler Arm[4]) oder Proximal genannt. Die beiden andern Arme sind die Lateral-Arme[5]) oder Laterale.

Dementsprechend bezeichne ich nach Hinde's Vorgang die vier Ecken des rhombischen Täfelchens als meridionale (distale, proximale Ecken) und laterale Ecken.

Etwa senkrecht auf den vier Tangentialarmen, die unter dem Täfelchen liegen, steht ein fünfter nach innen gerichteter Arm (das Radial), der bei Receptaculites Säulchen (oder das Columell)[6]) genannt wird. Bei

---

1) Head-or summit plates Hinde; rhombische Plättchen Gümbel; rhomboidische Tafeln Dames; Rhomboidal plates of the ectorhin Billings.

2) Horizontal-rays Hinde; Epistyle, Stützarme Gümbel; Kanäle Dames; Stolons Billings.

3) Proximal-ray Hinde; Radial-centripetaler Ast Gümbel; Radial stolon Billings.

4) Distal-ray Hinde; Radial-centrifugaler Ast Gümbel; Radial stolon Billings. Die hier vorgenommene Vertauschung der Hinde'schen Benennung für die beiden Meridional-Arme wird in der Folge gerechtfertigt werden.

5) Lateral-rays Hinde; Concentrische Aestchen Gümbel; Cyclical stolons Billings.

6) Vorschläge zur Einführung einer allgemein gültigen internationalen Bezeichnung der Meromglieder.

Ischadites sei er schlechthin als Radialarm[1]) oder Radial bezeichnet, weil hier das Wort Säulchen auf seine Form nur wenig passt. Das Radial (Säulchen) ist an seinem innern Ende conisch verdickt; diese Anschwellung nenne ich den Fuss des Säulchens oder Radials (das Pedicul), während ich das rhombische Täfelchen mit den vier Tangentialarmen zusammenfassend als Köpfchen des Meroms (das Capitul) aufführen werde.

Bei Polygonosphaerites ist das Radial verkümmert.

Das Radial (Säulchen) ist der Länge nach von einem Kanale durchzogen. Die vier Tangentiale umschliessen je einen axialen Körper von hervorstechend spindelförmiger Gestalt. Ich werde diese viel zu besprechenden Axentheile kurz proximale, distale und laterale Spindeln nennen.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen wende ich mich den eigenen Beobachtungen zu und beginne mit der Darlegung der Verhältnisse bei

## Receptaculites, DEFRANCE.

(*Isolirtes Merom.*) Meine Untersuchungen gingen von theilweise oder ganz isolirten Einzelelementen der Wand aus, die aus geeigneten Eifler Exemplaren von Receptaculites Neptuni, *Defr.*, dem typischen Vertreter der Gattung mit der Nadel herauspräparirt waren.

Das Köpfchen eines solchen Meroms ist in Taf. 1, Fig. 4, 5, 6 in verschiedenen Ansichten abgebildet. Es zeigt, dass von den vier Tangentialarmen nur drei (*d*, *l*, *l*) fest mit dem rhombischen Täfelchen verwachsen sind, während der vierte, mit *pr* bezeichnete Arm stark aufwärts (Fig. 5), d. i. nach innen gerichtet ist und sich vollständig von dem mit *v* bezeichneten Theile des Köpfchens (Fig. 5) abhebt. Nicht nur *pr*, sondern auch die andern Arme erscheinen an diesem Köpfchen durch Abbruch zu kurz, was die Präparation verschuldet hat; sie ragen in Wahrheit über die Ecken des rhombischen Täfelchens hinaus.

(*Form der Tangentialarme.*) Was die Gestalt der Tangentialarme anbetrifft, so sind *d* und die beiden *l* (Taf. 1, Fig. 4) spindelförmig, da

---

1) Vertical ray Hinde; Säulchen Gümbel; Cylindrische Röhre Dames; Cylindrical tube or hollow spiculum, tubular skeleton Billings; Cells Hall, Meek; Trou rond Defrance.

sie an ihrem Vereinigungspunkte mit dem Säulchen zusammengezogen sind, und ihr grösster Durchmesser etwa in der Mitte zwischen dem Centrum und den Ecken des Täfelchens liegt. *pr* dagegen hat im allgemeinen eine conische Form (Fig. 4, 5); doch kommen auch leichte Abschnürungen an seinem centralen Theile vor. Die drei Arme *d*, *l*, *l*, die dem Täfelchen anliegen, sind nicht scharfwinklig davon abgesetzt, sondern wölben sich sanft an seine Unterfläche an.

(*Proximaler und distaler Arm.*) Aus allen Beobachtungen ergiebt sich nun, dass der so stark nach innen gerichtete Arm *pr* stets vom untern Pole abgewandt, der nach aussen strebende, mit dem Täfelchen verbundene *d* dagegen ausnahmslos dem untern Pole zugewandt ist. Hinde hat mit Beziehung auf den Nucleus oder Wachsthumsanfang jenen Arm *pr* den distalen, diesen *d* den proximalen genannt. Er hat damit dem Nucleus, offenbar in der Ansicht, dass die schüsselförmigen Exemplare die ursprüngliche Form der Receptaculiten darstellen, und diese also eines Apex überhaupt entbehren, eine bevorzugte Bedeutung vor dem andern Pole eingeräumt, die ihm, wie ich glaube, nicht zukommt. Der Apex ist bei Ischadites thatsächlich als ein Schlussstück des Körpers vorhanden und dürfte auch bei Polygonosphaerites und Receptaculites niemals gefehlt haben, wenn er hier auch noch nicht aufgefunden worden ist. (Ein Punkt, der weiterhin noch zu beleuchten sein wird.) Es scheint mir daher naturgemässer und eine Erleichterung für das Gedächtniss zu sein, nach Analogie der Knochenenden den nach dem Innern gerichteten Arm als den proximalen, den andern als den distalen Arm zu bezeichnen und also Hinde's Benennungen umzukehren.

(*Nabel zur Verzapfung der Meridionalarme.*) Der in Taf. 1, Fig. 5 mit *v* bezeichnete Theil umschliesst auf seiner nach innen zu (in der Abbildung nach oben) gelegenen Seite eine halbkreisförmige Rinne, eine Art Nabel (*n* in Fig. 6; in Fig. 4 die unter *pr* liegende und durch diesen Arm fast ganz verdeckte Einbuchtung), der dazu dient, die Spitze des distalen Armes des meridional anstossenden Täfelchens aufzunehmen (vergl. Taf. 2, Fig. 4). Die Abflachung der dem Nabel zugewandten Seite des proximalen Armes in Taf. 1, Fig. 6 ist wohl keine durch Bruch oder durch die Präparation entstandene Zufälligkeit, sondern eine Folge der Uebereinanderlagerung und gegenseitigen Berührung der hier zu-

sammenstossenden Arme, da ich sie auch an andern Köpfchen meiner präparirten Stücke mehr oder weniger deutlich wahrgenommen habe.

(*Winkelgesetz.*) Die Richtung der beiden lateralen Arme *l* ist in der Projection Taf. 1, Fig. 4 nicht genau senkrecht auf derjenigen der beiden meridionalen Arme *pr* und *d*, sondern schwach dagegen geneigt, und zwar so, dass der rechte distale Centriwinkel spitz, der linke stumpf ist, wenn man das Köpfchen von innen betrachtet (vergl. Fig. 4a, worin diese Schiefe etwas übertrieben dargestellt ist). Betrachtet man das Täfelchen von aussen, so kehren sich diese Verhältnisse natürlich um und der rechte distale, sowie der linke proximale Centriwinkel des Plättchens werden zu stumpfen Winkeln. Diese Regel erleidet oft dadurch eine Ausnahme, dass durch eine geringe Verschiebung des Täfelchenmittelpunktes (Kreuzungspunktes der Spindeln) die nach den Ecken strebenden lateralen Arme ihre gemeinsame Richtung verlieren und sich etwas winklig gegen einander stellen (vergl. besonders einige Täfelchen in Fig. 3 auf Taf. 6). Jedoch berühren solche Unregelmässigkeiten die Beziehungen der Laterale eines Meroms zu den Lateralen der seitlich benachbarten Merome niemals; vielmehr sind diese Beziehungen für die Aneinanderfügung der Merome stets und ausnahmslos solche, als ob jenes Winkelgesetz in jedem einzelnen Falle vorhanden und normal eingehalten worden wäre. Es wird davon noch die Rede sein.

(*Umriss der rhombischen Täfelchen.*) Die Täfelchen sind nicht genau von rhombischem Umrisse; sondern die gegenüberstehenden parallelen Begrenzungslinien sind leicht gebogen, und zwar sind die distalen, dem untern Pole zugewandten Ränder stets die concaven, die proximalen Ränder stets die convexen Seiten (Taf. 1, Fig. 2, 4, 10; Taf. 3, Fig. 1, 5, 7 u. a.). Oft freilich ist auch die Ausschweifung der Ränder nur sehr schwach, und die Rautenform tritt vollkommener hervor. An den meridionalen Ecken, seltener an einer oder der andern lateralen Ecke sind die Tafeln stets mehr oder weniger leicht abgestumpft, so dass eigentlich ein ungleichseitig-, aber symmetrisch-sechseckiger Umriss sie begrenzt (Taf. 1, Fig. 8, 10 u. a.). Da aber die beiden Abstumpfungskanten nur sehr kurz sind, so bleibt doch der Eindruck der Raute überwiegend, und wir werden desshalb die Plättchen auch weiterhin als rhombische bezeichnen, im Gegensatz zu denen von Polygono-

sphaerites, wo diese Abstumpfung breiter wird. Dass übrigens sowohl bei Receptaculites als namentlich auch bei Ischadites daneben ausgesprochen sechsseitige Täfelchen mit breiten Abstumpfungskanten vorkommen, kann vielfach beobachtet werden. (Vergl. in Taf. 3, Fig. 7 besonders die nach dem rechten Rande zu gelegenen Täfelchen).

(*Oberfläche der Täfelchen.*) Die Oberfläche gut erhaltener, durch Verwitterung nicht veränderter Täfelchen zeigt parallel den Rändern und meist diesen nahe, zuweilen aber auch mehr im centralen Theile eine stumpfe, gerundete Kante (Taf. 1, Fig. 10), von der die Fläche sowohl nach den Rändern wie gegen die Mitte hin leicht abfällt. Das Maass der centralen Einsenkung ist aber geringer als der Abfall nach den Seiten, so dass die Täfelchen doch im Ganzen flach aufgewölbt sind. In ihrem Mittelpunkte findet man zuweilen ein kleines knopfförmiges Gebilde (Taf. 1, Fig. 8, das Täfelchen links unten; Fig. 10 links), in andern Fällen ein nadelstichfeines Loch. Ob das letzte als eine Ausmündung des Centralkanals im Säulchen ursprünglich vorhanden war, oder als ein erstes Stadium eingetretener Verwitterung des Täfelchens zu betrachten ist, wodurch der Kanal geöffnet wurde, konnte ich nicht mit Sicherheit entscheiden. Doch ist es nach meinen Präparaten wahrscheinlicher, dass der Kanal ursprünglich nach aussen geschlossen war. Die distale Ecke des rhombischen Täfelchens ist meist etwas aufgetrieben (Taf. 1, Fig. 10). Diese Anschwellung verliert sich in der mittleren Einsenkung. Aehnliche, aber stets schwächere Auftreibungen zeigen auch vielfach die andern Ecken (sehr deutlich öfter bei Ischadites, vergl. Taf. 6, Fig. 3). Die unverletzten Täfelchen sind mit feinen concentrischen, den Rändern parallel laufenden Linien bedeckt, die gewöhnlich am Rande und auf der erwähnten stumpfen Kante am deutlichsten hervortreten, und sich hier selbst zu leichten Falten verstärken können (Taf. 1, Fig. 10; in Fig. 8 das linke, untere Täfelchen).

(*Selbstständigkeit der Täfelchen.*) Das eigentliche rhombische Täfelchen ist ganzrandig (Taf. 1, Fig. 10) und nur ein sehr dünnes Plättchen. Es wird von einer gleichflächigen, aber zickzackrandigen (Fig. 4, 8) Unterlage getragen, die aus den Armen *d*, *l*, *l* und aus flügelartigen Ausbreitungen zwischen ihnen (*f* in Fig. 4, Taf. 1) gebildet wird. Dass es in der That ein discretes Glied des Köpfchens ist, geht aus ver-

schiedenen Beobachtungen hervor: 1) Es ist concentrisch gebaut, und bei einer leichten Verwitterung treten die erwähnten seinen Rändern parallelen Linien als feine scharfe Leisten heraus. Der darunter liegende Träger dagegen, der auf seiner Unterseite mit randlichen, kleinen Falten bedeckt ist (Fig. 4), zeigt bei der Verwitterung radiale Structur (Fig. 8). Doch scheint auch in den Täfelchen neben der concentrischen Anordnung eine radiale Faserung vorhanden zu sein. — 2) An den herauspräparirten Köpfchen Taf. 1, Fig. 5, 6 ist dicht unter der Oberfläche eine Naht oder Nahtfurche mehr oder weniger deutlich wahrzunehmen; sie ist manchmal durch Auswitterung oder einsitzenden Mergel schärfer markirt. Eine dieser Naht entsprechende scharflinige untere Abgrenzung des Täfelchens findet man auch öfter in Dünnschliffen (Taf. 3, Fig. 2, 3). In einem Falle, in einem Eifler Specimen waren die Täfelchen durch Eisenocker des einbettenden Mergels ledergelb gefärbt, und diese ledergelbe Färbung, die durch opake Körnchen und Staubtheilchen bewirkt wurde, schnitt an jener untern Abgrenzung geradlinig ab. Diese Grenze ist also wohl ursprünglich und scheint zunächst ein Hinderniss für ein tieferes Eindringen der färbenden Partikelchen gewesen zu sein. — 3) Am meisten sprechen aber einige Dünnschliffe von Djupviker Ischaditen für die Selbstständigkeit des Täfelchens. Man sieht hier (Taf. 5, Fig. 2), wie die äussern Lagen der Köpfchen (die Täfelchen) von den zugehörigen Tangentialarmen durch dunkeln Mergel deutlich getrennt sind und wie abgehoben erscheinen. Man kann den Weg, auf dem diese Ablösung geschieht, verfolgen; sie nimmt an der Grenze zwischen distalem Arm und Täfelchen ihren Anfang, wahrscheinlich in der distalen Ecke. Das rechts liegende Merom in Taf. 5, Fig. 2 und andere gleichartige Präparate zeigen, dass die Täfelchen dabei in der proximalen Ecke am längsten mit ihrer Unterlage verbunden bleiben. Beginnende Ablösung wird vielleicht durch die erwähnten Nahtfurchen ausgedrückt.

(*Aetzungen der Täfelchen.*) Der scharfe Unterschied zwischen der gelben Aussenschicht und ihrer grauen Unterlage in dem eben angeführten Eifler Stück veranlassten mich, Aetzungen an den gelben Plättchen vorzunehmen, um über ihre Beziehungen zu den unterliegenden Armen noch weitern Aufschluss zu erhalten. Die Resultate dieser Aetzungen sind in Taf. 2, Fig. 1, 2, 3 dargestellt. Fig. 1 zeigt die am

leichtesten, Fig. 3 die am stärksten geätzte Stelle. Es ergiebt sich daraus, dass das Täfelchen, — ich setze nach dem mikroskopischen Befunde voraus, dass ihm die gelbe Lage entspricht — über dem distalen Arme und in der centralen Einsenkung seine geringste Dicke hat. Zunächst wird nämlich beim Aetzen die gelbe Lage um den Mittelpunkt herum weggenommen, und es tritt von ihm ausgehend eine dunkler gefärbte keulenförmige Figur hervor (Fig. 1), die ihre Spitze im Centrum, ihr gerundetes Ende in der distalen Ecke des Täfelchens hat; diese Käulen sind auch die Ursache der S. 657 erwähnten Auftreibung in der distalen Ecke (Taf. 1, Fig. 10; Taf. 2, Fig. 1 bei *a*). Bei fortschreitender Aetzung treten zwei weitere gleichgestaltete Figuren hervor, die nach den lateralen Ecken streben. Anfangs erreichen sie diese noch nicht, in dem Maasse aber, wie die Aetzung tiefer greift, wandern ihre gerundeten Enden diesen Ecken entgegen, während das distale Käulchen sein abgerundetes Ende über die untere Ecke fort in das nächste Täfelchen mehr und mehr hineinschiebt, um hier mit einer kurzen Spitze zu enden (Taf. 2, Fig. 2). Ist dies Stadium erreicht, so sind die centralen Spitzen aller drei Käulen schon wieder verschwunden. Treibt man die Aetzung noch weiter, so werden die Täfelchen und die Arme *d*, *l*, *l* mit ihren Spindeln, die in den keulenförmigen Figuren blossgelegt wurden, gänzlich weggelöst; dafür erscheinen die proximalen Arme mit ihren Spindeln und bleiben schliesslich allein zurück (Taf. 2, Fig. 3), mit den Umrissen, wie die isolirten Merome sie schon kennen gelehrt haben.

Diese Bilder lasssen schon klar erkennen, wie die Köpfchen in einander greifen und verbunden sind; sie haben mir den ersten Aufschluss über den wahren Sachverhalt gewährt. Aber einen noch müheloseren und überzeugenderen Einblick gestatten richtig angefertigte Dünnschliffe. Bevor ich jedoch zu diesen komme, muss ich nochmals zwei Punkte über die Beziehungen des Täfelchens zu den unterliegenden Armen und über seine Structur berühren. In dem besprochenen Eifler Stück war auch in dem proximalen Theile des Täfelchens die gelbe Schicht nicht dicker als an den andern Stellen. Nachdem diese Schicht abgeätzt war, kam die innere Lage des in Taf. 1, Fig. 5 mit *v* bezeichneten, verdickten Theiles ebenfalls als dunkler, (im Mikroskop klarer) Kalkspath heraus.

(*Seitliche Flügel der Tangentialarme.*) Wird nun aber durch die gelbe Schicht wirkich das Täfelchen bezeichnet, so wird man die nach innen gewandten Theile von *v* als seitliche Ausbreitungen der lateralen Arme aufzufassen haben (Taf. 1, Fig. 4), die sich gegen die Innenseite des Täfelchens legen und verschmelzen. In der That ist in dem isolirten Merom (Taf. 1, Fig. 5) über dem verdickten Theile *v* ebenfalls die oben (S. 658) erwähnte Nahtfurche deutlich markirt. In gleicher Weise wären nach dem Befunde von Taf. 2, Fig. 2 dann auch die lateralen Arme mit dem distalen Arme unter dem Täfelchen seitlich aus- und zusammengezogen, wie eine Haut zwischen gespreizten Fingern (vergl. Taf. 1, Fig. 4).

(*Secundäre Aussenzone der Meromglieder.*) Gümbel[1]) hat angegeben, dass die Oberflächenschicht (der Täfelchen) von einer besondern, sehr dünnen kohligen Substanzlage gebildet zu werden scheine, die eine zellige Structur wahrnehmen lasse. Ich kann nicht zweifeln, dass diese Substanzlage in den Oberkunzendorfer Stücken, worin sie Gümbel gefunden hat, mit unserer ledergelben Schicht identisch ist und nachträglich in derselben Weise, wie diese durch Ocker, durch kohligen Staub gefärbt wurde. Das einbettende Kunzendorfer Gestein ist reich daran, und die ganzen Merome, auch Arme und Säulchen sind dadurch gefärbt und erscheinen äusserlich oft tief schwarz. Eine besondere kohlige Schicht habe ich niemals nachweisen können, weder an der Aussen-, noch an der Innenseite der Körperwand, wo sie nach Gümbel[2]) auch vorhanden sein soll. Die zelligen Elemente aber, die diese Schicht zusammensetzen sollen, sind ebenfalls eine secundäre Erscheinung, ein Zerfall des ursprünglich fasrigen Kalkes in Körner, die gewöhnlich um einen rundlich-eckigen oder eckigen Kern einen wasserklaren Saum zeigen. Diese körnige Structur bleibt auch nicht auf das Täfelchen beschränkt. Ich fand sie als einen Randsaum auch an andern Theilen der Köpfchen; der Saum folgte den unregelmässigen Begrenzungslinien abgebrochener Arme, was für die Beurtheilung seiner Natur entscheidend ist (Taf. 3, Fig. 2, 3). Ebenso tritt er am Säulchen auf, wie am Füsschen (Taf. 3, Fig. 4); oder das ganze Säulchen zeigt diesen Zerfall (Fig. 3, 4). Wenn nicht zugleich

1) a. a. O. p. 185, 186, 187.
2) a. a. O. S. 197.

andere Umstände, die bereits aufgezählt worden sind, für die Selbständigkeit des Täfelchens sprächen, würde man also die scharfe Nahtlinie unter der Oberfläche der Köpfchen in Taf. 3, Fig. 2 und 3 kaum dafür anführen dürfen, wie es oben geschehen ist.

(*Gesetzmässige Zusammenfügung der Arme.*) Die eigenthümliche Tektonik der Wand wird am leichtesten an richtig angefertigten Dünnschliffen, besonders an Radialschnitten erkannt. Bei ihrer Herstellung ist nur zu beachten, dass der Radialschnitt genau in die meridionale Diagonale der Täfelchen fällt, oder vielmehr, dass diese Diagonale in dem Schliffe selbst liegt. Ein solcher Radialschnitt ist in Taf. 2, Fig. 4 abgebildet. Der Nucleus ist in der sich verschmälernden linken Fortsetzung des abgebildeten Wandstückes zu suchen. *t* ist das Täfelchen im Kopf eines jeden Meroms, *d* der mit dem Täfelchen verbundene distale Arm. *pr* der nach innen geneigte, vom Täfelchen isolirte proximale Arm. Zunächst wird hier ersichtlich, dass die in Taf. 1, Fig. 4—6 abgebildeten Arme nicht ihre ganze Länge zeigen, also in Wahrheit über die Ecken des Täfelchens herausragen. Der proximale Arm ist vielfach so weit verlängert, dass seine Spitze das nächste ihm zugewandte Säulchen fast berührt (vergl. auch Taf. 2, Fig. 3); zuweilen bohrt er sich sogar tief in dies Säulchen ein (Taf. 3, Fig. 3). Der distale Arm — oft ebenfalls weit gegen die Mittellinie des benachbarten Säulchens vordringend — ist in der beschriebenen Verdickung, die über dem proximalen Arme liegt (Nabel *n* Taf. 1, Fig. 5, 6), wie verzapft. Der distale Arm liegt ausnahmslos zu oberst (aussen), darunter folgt aber nicht sogleich der proximale Arm, sondern zwischen diesen und den distalen Arm schieben sich die Enden der lateralen Arme der seitlich anstossenden Täfelchen ein. Das sind in Fig. 4, Taf. 2 jedesmal die zwei hellen Flecke (*l*) zwischen den meridionalen Armen. So viele Stücke und Steinkerne ich untersucht habe, eine Ausnahme von dieser Regel habe ich in keinem Falle bisher beobachtet.

Auf ein Uebereinandergreifen der meridionalen Arme hat besonders Schlüter[1]) bei einigen Exemplaren von Polygonosphaerites bereits aufmerksam gemacht. Aber seine Angaben darüber sind unsicher und schwankend, desgleichen seine Abbildungen[2]), die die wahren Verhältnisse

1) Zeitschr. Deut. Geol. Ges. Bd. 39, 1887. S. 5, 18.
2) ibid. Taf. 1, Fig. 6; Taf. 2, Fig. 2.

noch an keinem einzigen Merom richtig und bestimmt zum Ausdrucke bringen. Dagegen giebt eine Figur bei Hinde[1]), die aber nicht erläutert ist, die Lage der Arme so genau wieder, dass man das Gesetz fast daraus ablesen könnte.

(*Lagerung der Lateral-Arme.*) Nicht minder gesetzmässig und constant als die gegenseitige Lage der meridionalen Arme ist die der beiden lateralen Arme. Es ergiebt sich aus Taf. 2, Fig. 2, 3, 5, 10, 11 und aus allen bisher untersuchten Stücken von Receptaculitiden, mit Ausnahme von zweien, dass von den beiden neben einander liegenden Armenden *l*, *l* das dem rechtslateralen Arme zugehörige stets höher als das andere (nach dem obern Rande der Zeichnung zu), dasjenige des linkslateralen Armes dagegen stets darunter liegt. Dabei ist es gleichgültig, ob man die Täfelchen in einer Richtung vom untern oder vom obern Pole aus betrachtet; man kann also die Zeichnungen, worin ich den distalen Arm stets nach unten gerichtet habe, auch auf den Kopf stellen, ohne die Regel zu ändern, weil sich die Benennungen der lateralen Arme dann vertauschen. Nur muss man die Täfelchen stets von aussen betrachten; blickt man von innen darauf, so kehren sich die Verhältnisse natürlich um, und das rechte Laterale kommt über dem linken zu liegen. Taf. 7, Fig. 8, 11, 12.

Durch diese Regel wird das oben (S. 656) ausgesprochene Winkelgesetz bei Receptaculites selbst, so viel mir bis jetzt bekannt ist, stets erfüllt. wenigstens in jedwedem Falle nach seinem constructiven Zwecke.

(*Dextracclive und sinistracclive Lagerung.*) Die erwähnten beiden Ausnahmen habe ich bei Ischadites gefunden. Die Lagerung der Lateralarme ist aber bei ihnen nicht etwa regellos geworden, sondern es ist eine vollständige Perversion eingetreten: die linkslateralen Arme liegen bei ihnen durchgängig über den rechtslateralen — immer die Köpfchen von aussen betrachtet. Es ist das eine Verschiedenheit, die man mit derjenigen der rechts- und linksgewundenen Schneckenschalen vergleichen könnte. Auch bei diesen bilden ja die dextrorsen Schalen die Regel, während die sinistrorsen nur vereinzelt vorkommen. Das Winkelgesetz der Lateralarme kann also in zwei Ausbildungsformen erscheinen.

---

1) Monogr. Brit. Foss. Spong. Part 1. 1887. Taf. 4, Fig. 2d.

Die allgemeine Form, wobei der rechte über dem linken Lateralarme liegt, und die Richtung dieser Arme von unten links nach oben rechts ansteigt (Taf. 2, Fig. 2, 3, 5, 10, 11), wollen wir die dextracclive Lagerung nennen, die andere, bei der das Gegentheil der Fall ist, die sinistracclive Lagerung (Taf. 7, Fig. 9; Textfiguren 8 und 9).

(*Länge der Lateral-Arme.*) Die lateralen Arme scheinen bei den typischen Vertretern von Receptaculites immer kürzer zu sein, als die meridionalen, und unter dem distalen Arme ihr Ende zu erreichen; denn ich habe auch bei tiefgreifender Verwitterung (Taf. 2, Fig. 10, 11) ihre Spindeln nie über die distalen Spindeln hinausragen sehen.

(*Lage der Spindeln.*) Die Dünnschliffe (Taf. 2, Fig. 4, 5) geben auch über Lage und Form der eigenthümlichen Spindeln Aufschluss. Die distale Spindel zieht sich hart unter dem Täfelchen hin; die proximale Spindel beginnt ebenfalls dicht unter der Oberfläche und ist mit dem proximalen Arme gleich stark nach innen geneigt. Die kleinen hellen Kreise *spl* einerseits (Fig. 4), welche die Querschnitte der lateralen Spindeln nahe am Centrum des Täfelchens sind, und die Lage der Enden der lateralen Arme oder ihrer Spindeln *l*, zwischen den beiden meridionalen Armen andererseits, lehren, dass auch die lateralen Spindeln nach unten, d. h. nach innen gerichtet sind und ebenfalls hart unter dem Täfelchen spitz anfangen. Die distalen Ecken der Täfelchen schieben sich mit den darunter liegenden distalen Spindeln unter die proximalen Ecken der anstossenden Täfelchen (bei *u* Fig. 4).

Der Tangentialschnitt Taf. 2, Fig. 5 lässt durch die Richtung der lateralen Spindeln deutlich das Winkelgesetz erkennen. Dass man in diesem Schliff die Unterschiebung der lateralen unter die distalen Spindeln nicht beobachten kann, erklärt sich durch die Lage des Schnittes, durch seinen Abstand von der Oberfläche, weil die Spindeln ja schräg von aussen nach innen verlaufen.

(*Form der Spindeln.*) Die Spindeln haben ihren grössten Durchmesser unter den Ecken der Täfelchen, oder selbst erst unter den anstossenden Plättchen (Taf. 2, Fig. 1, 2, 4, 5, 10, 11). Ihr grösster Durchmesser fällt also nicht mit demjenigen der sie umschliessenden Arme zusammen (vergl. Taf. 1, Fig. 4, 5, 6; Taf. 2, Fig. 3, 4).

(*Ansatz der Spindeln am Kanal des Säulchens.*) Die Spindeln liegen mit ihren centralen Spitzen unter dem Mittelpunkte des Täfelchens; aber sie setzen hier nicht in gleicher Höhe an, sondern ihre Spitzen liegen etwas übereinander. Die Spitze der distalen Spindel scheint stets zu oberst, dicht darunter die der proximalen, dann erst die der lateralen Spindeln zu liegen, weil bei geätzten Köpfchen, wie in Taf. 2, Fig. 9 die meridionalen Spindeln ein zusammenhängendes Leistchen bildeten, das über die Spitzen der lateralen Spindeln vorstand. Doch sind die Beobachtungen hierüber unzureichend. Aber das scheint sicher zu sein, dass die distale Spindel immer höher ansetzt als die andern.

(*Form der Säulchen.*) Die Köpfchen werden von den Radialen, bei Receptaculites Säulchen genannt, getragen. „Die äussere Form der „Säulchen unterliegt einer merkwürdigen Mannigfaltigkeit.[1]) Sehen wir „vorerst von ihren (centralen) Enden ab, so „ist der Schaft der Säulchen im allgemeinen „von cylindrischer Form, jedoch nur in sel„tenen Fällen einigermassen regelmässig, viel„mehr in der Mitte oder näher an der inneren „Fläche etwas ausgebaucht und gegen die „Enden zulaufend. Auf diese Weise gewinnen „die Säulchen oft eine mehr Spindel- als „Cylinder-ähnliche Form.“ (Siehe die nebenstehende Skizze). „Nicht selten ist die äussere „Wandung selbst etwas aus- und eingebogen, „wellig.“ (Taf. 1, Fig. 7; Taf. 2, Fig. 4). „Die „Verjüngung nach aussen und innen ist meist „eine allmähliche, zuweilen aber auch eine rasche, und an den Enden „stellt sich regelmässig eine Einschnürung ein, die nach innen minder „stark zu sein scheint, jedoch auch hier häufig beobachtet wurde.“ (Vorstehende Figur; Taf. 1, Fig. 5, 6, 7; Taf. 2, Fig. 4).



Fig. 1.

Säulchen von Receptaculites Neptuni *Defr.* mit starken Einschnürungen unter den Köpfchen und über den Füsschen. Eifel.

Skizze nach einem Dünnschliff in 3/1. Original in meiner Sammlung.

(*Concentrischer Aufbau der Säulchen.*) Länge und Dicke der Säulchen sind am untern Pole der Wand am geringsten und nehmen nach dem Rande der schüsselförmigen Stücke immer mehr zu. Die Beziehungen

1) Gümbel, a. a. O. p. 193.

ihrer Dimensionen, die mannigfachen Schwankungen unterworfen sind, zur Entfernung vom Nucleus, würden bei Besprechung der Arten näher darzulegen sein, worauf ich jedoch in dieser Schrift nicht eingehen werde. Durchschnittlich beträgt die Länge das 3—5 fache des Durchmessers, doch kommen Fälle vor, wo sie das 15—20 fache, ja selbst bis zum 45 fachen des Durchmessers beträgt. So sind also die Säulchen meist kurz und dick, zuweilen aber auch langgezogen schlank, „abgesehen [1]) von Deformationen, die sie durch Druck, Quetschungen und Verschiebungen reichlich erlitten haben. Sie finden sich mitten entzwei gebrochen, seitlich schief gedrückt, gewaltsam gekrümmt und gebogen, selbst zusammengequetscht. Sie [2]) lassen meist eine concentrische schalige Absonderung erkennen, welche sich im Querschnitte durch concentrische dunklere Kreise, im Längsschnitte (Taf. 2, Fig. 4) durch dunklere Längsstreifchen bemerkbar macht. Die Linien deuten auf eine schichtenweise Verdickung der Säulchen durch Anlage neuer krustenartiger Verdickungsmassen und auf eine mit dem Alter zunehmende Verstärkung der Säulchen. Gümbel konnte an einzelnen Exemplaren beobachten, dass an zerbrochenen Säulchen dergleichen Verdickungslagen sich rindenartig abblättern, und dass die dadurch blossgelegte Oberfläche einer tieferen Schichtenlage ebenso vollständig glatt ist, wie die der Aussenfläche."

(*Dicke und dünne Radialarme in demselben Specimen.*) Dass diese allmähliche Verdickung der Säulchen bei Lebzeiten des Organismus geschehen ist, wird durch ein interessantes Stück des Göttinger Museums (Taf. 3, Fig. 1) wohl zur Evidenz bewiesen. Darin sind neben den gewöhnlichen, dicken, unförmlichen Säulchen, wie sie Receptaculites im allgemeinen charakterisiren, ganz schlanke dünne Radialarme entwickelt, wie sie Ischadites auszeichnen. (Taf. 3, Fig. 2, 3, 4). Die Länge der schlanken Arme beträgt (und darauf bezieht sich die oben gemachte Angabe) das 40—45 fache ihres Durchmessers. Wenn sie auch besonders dem obern Theile des Stückes angehören (oberhalb *B C*), so kommen sie doch auch zwischen den dicken Säulchen vor. Uebergänge zwischen beiden Arten von Radialen von dem untern zum obern (ältern zum

1) Gümbel, a. a. O. p. 194.
2) Gümbel, a. a. O. p. 193.

jüngern) Theile hin konnte ich nicht bemerken; vielmehr schien mir der Gegensatz zwischen beiden überall ein ganz unvermittelter zu sein. Ebenso sieht man an den seitlichen Bruchflächen des Stückes, dass dünnen Armen auf der einen Seite (bei *B*), auf seiner andern Seite (unterhalb *C*) dicke Säulchen entsprechen, die zu demselben concentrischen Täfelchenkreise wie jene gehören. Man kann also nicht annehmen, dass die schlanken Arme lediglich den jüngern, die andern den ältern Theilen des Receptaculiten angehören.

Wegen dieser gesetzlos erscheinenden Vertheilung beider Arten von Radialarmen könnte sich die Frage aufdrängen, ob die dicken, plumpen Säulchen nicht sämmtlich erst nach der Versteinerung durch secundäre Kalkanlagerung entstanden sind, auf deren eigenthümliche Bedeutung für die jetzige Erscheinungsweise und Erhaltungsart mancher Receptaculiten ich noch näher eingehen werde. Eine solche secundäre Incrustation kommt ja mit einer räthselhaften Constanz bei den in Kalkspath umgewandelten amerikanischen Astraeospongien vor, wovon noch nicht ein einziges Exemplar gefunden sein dürfte, das nicht die unregelmässigen klumpigen Verdickungen der ursprünglich zierlichen Sternchen in geringerm oder stärkerm Grade bis zur vollständigen Unkenntlichkeit dieser zeigte. Aber diese Bildung erweist sich schon durch ihre Unregelmässigkeiten und einige merkwürdige Umstände, wovon ich bei den Spongien sprechen werde, sogleich als eine secundäre.

Bei unserm Receptaculiten jedoch sind bestimmte Beziehungen zwischen der Dicke der Säulchen oder Radiale und dem Durchmesser des axialen Theiles darin vorhanden, und das muss eine ursprüngliche Eigenschaft sein.

Es verhält sich nämlich:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Axdchm.: Slchdchm. | wie 5:30 (4:35, 4:33) | bei den | schlanken | Radialen |
| | „ 10:45 | „ „ | dicken | „ |
| | wie 10 bis 15:50 | „ „ | dicksten | „ |

(Mikrometer-Zahlen). Die Axendurchmesser wachsen also mit den Säulchendicken.

(*Zunahme der Wandstärke.*) Ferner herrscht, wenn wir von den einzelnen schlanken Radialen absehen, hier, wie überhaupt bei sämmtlichen untersuchten Receptaculiten mit dicken Säulchen das Gesetz, dass

der Durchmesser dieser, wie ihre Länge, vom Wachsthumsanfang an nach aussen oder oben gradatim zunimmt; eine solche Durchmesserzunahme als eine Function der Wandstärke und Entfernung vom Nucleus ist durch secundäre Anlagerung nicht zu erklären. Eine nachträgliche Verdickung müsste sich auch in den Tangentialarmen in ganz andrer Weise bemerklich machen, als es alle Präparate und besonders auch die zahlreichen untersuchten Steinkerne zeigen; trotz mancher Störungen und Entstellungen herrscht doch überall eine solche Regelmässigkeit, und namentlich bleiben auch die Tangentialarme stets so gesondert neben einander, dass an spätere Verdickung wie bei Astraeospongia nicht gedacht werden kann. Endlich zeigen die dicken Säulchen des Göttinger Stückes in ausgezeichneter Weise die schon von Gümbel beschriebene fiederstreifige Zeichnung (Taf. 3, Fig. 2), die ich mit Gümbel für ursprünglich halte.

Für eine allmähliche, wahrscheinlich in Absätzen erfolgende Verdickung der Säulchen bei Lebzeiten des Organismus sprechen dagegen Beobachtungen wie die in Taf. 3, Fig. 4 wiedergegebene. Man sieht hier an der centralen Anschwellung des Säulchens einen innern (ältern) Theil scharf abgesetzt gegen eine äussere (jüngere) Zone, die aber durch ihre einsinnig fiederstrahlige Zeichnung[1]) sich gleichartig gebaut erweist, wie der innere Theil des Füsschens. Aehnliches, nur nicht so scharf, zeigen auch die übrigen centralen Enden der Radialarme, in demjenigen Dünnschliffe, nach dem die Zeichnung angefertigt ist, wie in einem andern. Für das eigenthümliche Zusammenvorkommen von dicken und dünnen Radialarmen an ein und demselben Stücke bleibt wohl nur die Annahme übrig, dass in dem Göttinger Exemplare ein irgendwie verursachter Ausnahmefall vorliegt. Die Regel wird bei Receptaculites durch kurze, dicke Säulen vertreten. Aber dieser Fall scheint ein Fingerzeig für das Wachsthum der Säulchen zu sein, die, vielleicht anfangs dünn und schlank, sich erst in höherm Alter verdicken und die Wand mehr und mehr versteifen. Dann weist er auch auf die nahen Beziehungen, die zwischen Receptaculites und Ischadites bestehen und hilft einige Schwierigkeiten erklären, die sich mir öfter bei der Abgrenzung und Bestimmung der Gattungen entgegen gestellt haben.

---

1) wenn auch nicht so deutlich wie im mittlern Theile.

Ueber die *Textur des Kalkes in den Säulchen* hat Gümbel, der zuerst Dünnschliffe anfertigte, wichtige Beobachtungen gemacht:

„Der Kalk", sagt Gümbel[1]), „aus welchem die meist dicken „Wandungen der Säulchen bestehen, ist oft fein faserig krystallinisch und „könnte als Aragonit genommen werden. Ich halte die Structur jedoch „für eine uranfängliche organische, bedingt durch die ursprüngliche „Beschaffenheit der Kalksubstanz, welche die Säulchen bildete, einmal, „weil der Kalkspath eine eigenthümliche, federförmigstrahlige, bei reiner „krystallinischer Ausbildung nicht vorkommende Faserung zeigt, bei der „die feinen Fäserchen etwa so um das innere Kanälchen schief geneigt „stehen, wie die Fasern einer Feder zur Spuhle. Dazu kommt sodann, „dass die Richtung dieser Neigung immer constant convergirend nach „aussen und divergirend nach innen ist. Darin sehe ich einen sehr ent„schiedenen Beweis für die Richtigkeit der Annahme, dass dieser faserigen „Structur eine organische Bildung zu Grunde liegt, weil wohl sonst bei „bloss zufällig strahliger Ausbildung des Kalkspaths die Fasern ebenso „oft auswärts als einwärts geneigt vorkommen oder auch senkrecht ge„stellt sich zeigen würden. Uebrigens bemerkt man zahlreiche parallele „und unter dem Spaltungswinkel des Kalkspaths sich durchkreuzende „Linien innerhalb der faserigstreifigen Ausfüllungsmasse, welche den fer„neren Beweis liefern, dass wir es hier weder mit Aragonit, noch mit „fasrigem Kalkspath, sondern mit organischer Structur zu thun haben. „In Dünnschliffen gewinnt das Bild dieser Faserung eine grosse Aehnlich„keit mit jenen der Kalkstäbchenschicht der Muschelschalen. Diese Faser„structur ist von ganz besonders grosser Wichtigkeit für die Beurtheilung „der Natur der Säulchen."

Hierzu ist zu bemerken, dass die Fiederung des Kalkes in den Säulchen doch nicht immer die angegebene Richtung, Convergenz nach aussen, Divergenz nach innen einhält. Ich habe sie wie Gümbel in den dicken Säulchen des erwähnten Oberkunzendorfer Stückes aus dem Göttinger Museum (Taf. 3, Fig. 2) in ausgezeichneter Deutlichkeit gefunden; dagegen ist sie in einem Eifler Stück (Taf. 2, Fig. 4) nicht einsinnig vorhanden; vielmehr strahlen hier die Faserchen von einzelnen meist an

1) Gümbel a. a. O. p. 192.

der Grenze gegen den Axentheil gelegenen Punkten, die wie Krystallisationscentra erscheinen, sowohl nach unten, als auch nach oben aus. Allerdings die von Gümbel angegebene Richtung ist auch hier die vorherrschende. Ob diese Structur des Eifler Stückes noch die ganz ursprüngliche, oder schon eine später erworbene ist und etwa das erste Stadium der Umwandlung aus der fasrigen in eine körnig-krystallinische Textur darstellt, wagte ich bisher nicht zu entscheiden. Es hat mir für diese Frage an ausreichendem Materiale gefehlt, da die Stücke, in denen der Kalk nicht körnig-krystallinisch ist, nicht häufig sind. Jedenfalls halte ich mit Gümbel die fiedrige Streifung auch deshalb für ursprünglich, weil die Axentheile und besonders die Spindeln der Tangentialarme da am deutlichsten und besten erhalten sind, wo jene Streifung vorhanden ist, dagegen im allgemeinen um so mehr verschwinden, je mehr der Kalk in den Meromen eine körnig-krystallinische Beschaffenheit angenommen hat.

Die von Gümbel angeführten zahlreichen, parallelen und sich durchkreuzenden Linien dagegen sehe ich nicht als ursprünglich an, sondern als secundär. Sie leiten die Umwandlung der fasrigen in die körnig-krystallinische Textur ein. Zahlreiche Zwillingslamellen entstehen, und der fasrige Kalk wird dadurch in mehr oder weniger zahlreiche körnige Kalkspathindividuen zertheilt, worin die fasrige Structur theils noch erhalten ist, theils nicht und um so mehr verschwindet, je mehr die Zahl der Körnchen und Zwillingslamellen wächst. In den dünnen Radialarmen (Taf. 3, Fig. 3, 4) besteht die Wand um den Axentheil herum aus dunkleren Kalkkörnchen mit meist scharfeckiger Umgrenzung, die je von einer wasserhellen Zone umrindet und dadurch mit einander verkittet werden. Der Axentheil der Säulchen in diesen Armen ist der Quere nach vielfach zerrissen, und die einzelnen Strecken sind um einen kleinen Betrag gegen einander verschoben, so dass neben der Einwirkung der Atmosphärilien, die das Gestein durchzogen und wohl in erster Linie die Umwandlung bewirkten, hier und in andern Fällen vielleicht auch Druck eine Rolle dabei gespielt hat. Das scheint auch daraus hervorzugehen, dass die Zwillingslamellen vielfach nicht geradlinig, sondern mehr oder weniger gebogen, selbst stark gekrümmt sind, auch den Umrissen der zusammengestauchten Säulchen folgen. Bei manchen der dickeren Säulchen des

Stückes ist nur die äussere Zone körnig geworden, während der innere Kern noch fiederstreifig und zusammenhängend geblieben ist. Oefter erhält der Axentheil eine zackig-unregelmässige Begrenzung, gemäss grösseren eckigen Kalkspathkrystallen, die ihn umsäumen (siehe nebenstehende Skizze).



Fig. 2.

Im Gestein durch Druck und Atmosphärilien stark entstelltes und angegriffenes Säulchen von Receptaculites crassiparies *Rauff*. Die ursprüngliche fiedrige Structur ist in eine körnig-krystallinische umgewandelt, auch die dunkle Erfüllung des Axenkanals ist in körnigen Kalkspath verändert.

Dünnschliff in stark 3/1. Oberkunzendorf bei Freiburg i. Schl. Das Original im Berliner Museum zeigt noch Reste der Fiederstreifung und der Zuwachs-Linien, die den concentrischen Bau bezeichnen; diese Einzelheiten sind in der Skizze hier fortgelassen.

In manchen Fällen gehört die körnig-krystallinische Structur nicht mehr dem ursprünglichen Materiale der Receptaculiten an. Dies ist vielmehr nach der Einbettung der Körper im Gestein und seiner Verhärtung vollständig ausgelaugt, und die Hohlräume sind nachträglich wieder mit Kalkspath erfüllt worden. Dann sind die Axentheile und Spindeln nie mehr vorhanden und können nicht mehr vorhanden sein. Jedoch verschwinden sie ebenso vollständig im ersten Falle bei genügend weitgehender Umlagerung.

(*Structur des Kalkes in den Köpfchen.*) Die Structur des Kalkes in den Tangentialarmen ist ganz gleichartig derjenigen in den Säulchen, fiedrig-streifig, schräg geneigt gegen die Axen der Spindeln und convergirend gegen das Centrum des Täfelchens. (In Taf. 2, Fig. 4 ziemlich rein erhalten und durch anders gerichtete Fiedern nur wenig gestört.)

(*Sind die Spindeln Kanäle gewesen?*) Die Axentheile in den Radial- und Tangentialarmen sind bisher stets als Kanäle, oder wenigstens als ursprüngliche Hohlräume angesehen worden. Für die Axe des Säulchens dürfte diese Auffassung zutreffen, nicht so für die Spindeln.

Der Axentheil der Säulchen ist im allgemeinen cylindrisch oder leicht spindelförmig und an seinen Enden fast plötzlich zusammengezogen (Taf. 2, Fig. 4). Er ist weiter bei den kurzen plumpen Säulchen, enger bei den schlanken Radialen. Die entsprechenden Durchmesser verhalten sich bei diesen wie 1 : 6 bis 9, bei jenen wie 1 : 3 bis 5. Er besteht

manchmal, nicht eben häufig, besonders in seinem innern der Körperhöhle zugewandten Abschnitte aus dem unveränderten klastischen Materiale des einschliessenden Gesteins (Taf. 3, Fig. 8). Man darf daraus schliessen, dass er in der That ein Kanal gewesen ist. Das äussere Täfelchen scheint er nicht durchbohrt zu haben, die centrale Pore darin, die man zuweilen findet, scheint späterer Entstehung zu sein (S. 657), dagegen stand er durch eine ziemlich weite Oeffnung mit dem grossen innern Hohlraume des Receptaculiten in Verbindung (Taf. 1, Fig. 3, 9; Taf. 2, Fig. 4, 7; Taf. 3, Fig. 10 etc.). Gewöhnlich allerdings ist im Kanal klastisches Material nicht vorhanden, sondern durch einen körnig-krystallinischen (Fig. 2 auf vorig. Seite) oder auch längsstreifig-späthigen Kalk ersetzt (Taf. 2, Fig. 4; Taf. 3, Fig. 2). Aber ich nehme an, auch im letzten Falle, dass die ursprüngliche, klastische Erfüllung eine secundäre Umwandlung erfahren hat, weil die Farbe dieser Axentheile von der Beschaffenheit und Farbe des einbettenden Gesteins abhängt. Sie ist im allgemeinen um so dunkler, je dunkler das Gestein ist; heller bei den in lichteren Mergel eingebetteten Eifler Stücken (Taf. 2, Fig. 4), fast schwarz und undurchsichtig bei den dunkeln und kohligen Kalken von Oberkunzendorf (Taf. 3, Fig. 2).[1])

Die Spindeln dagegen zeigten nie etwas ähnliches, immer bestanden sie, gleichgültig ob die Stücke aus hellem oder dunkelm Gesteine herrührten, aus dem relativ reinsten Materiale, farblosem oder von allen Theilen der Merome doch am wenigsten gefärbten Kalkspath. Sie zeigen in Dünnschliffen öfter, besonders in ihrer Aussenzone einen streifigen (vielleicht schaligen) Aufbau, dessen feine Linien in den centralen Spitzen convergiren (Taf. 2, Fig. 4). Ungestört zwar und die Textur einer Spindel ganz beherrschend waren diese Linien nicht entwickelt oder nicht erhalten, immer waren sie in Folge der Späthigkeit des Materiales unterbrochen oder abgeschnitten, auch verschoben oder ganz unterdrückt.

Wären die Spindeln ursprünglich Kanäle gewesen, so dürfte man erwarten, sie öfter ebenfalls mit klastischem Gesteine oder wenigstens mit demselben gefärbten Kalke erfüllt zu finden, wie den Axenkanal des

---

1) Dieser Umwandlung klastischen Materiales in Kalkspath wird in meiner Monographie der fossilen Spongien eine eingehendere Betrachtung gewidmet sein. Sie spielt bei den versteinerten Spongien eine grosse Rolle und erklärt viele merkwürdige Einzelheiten.

Säulchens. Das dürfte man auch dann erwarten, wenn sie vollständig abgeschlossene Hohlräume waren, also weder mit dem Kanale des Säulchens in Verbindung standen, noch an den Armenden sich nach aussen öffneten. Denn es wäre sehr unwahrscheinlich, dass nach dem Absterben des Organismus die zarte und an den Spitzen der Tangentiale sehr dünne Armwand nicht öfter sollte verletzt und durchgebrochen sein, so dass das Sediment in den Hohlraum einfliessen konnte. Mehrfach sind an den Armenden die Armwände weggelöst, nur die hellen Spindeln sind vorhanden und werden direct vom Gesteine umhüllt (Taf. 3, Fig. 3; auch in Taf. 2, Fig. 4); aber nie, wie gesagt, waren in unsern Präparaten diese durch Sediment ersetzt. Jedenfalls standen sie mit dem Centralkanal des Säulchens nach Ausweis aller meiner Präparate nicht in Verbindung, ihre feinen, scharf getrennten Spitzen wie in Taf. 2, Fig. 1, 4, 5, 10, 11 u. a. machen nie den Eindruck, als ob sie die Ausmündungen von Kanälen in einen andern Kanal wären. Alle diese Umstände machen es wahrscheinlich, dass die Spindeln schon ursprünglich solide Axen der Tangentialarme von etwas anderm Bau, als die Armhüllen, aber keine Kanäle waren.

(*Füsschen.*) Hinsichtlich der centralen Enden der Säulchen weichen die Resultate meiner Untersuchungen wesentlich von denen ab, die Billings, Gümbel und Hinde gefunden haben.

Der centrale Endtheil der Säulchen ist nichts weiter als eine conische Anschwellung dieser (Taf. 1, Fig. 7) bis zur gegenseitigen Berührung ihrer Ränder. Er ist an der Innenfläche weder mit einem besondern Täfelchen bekleidet, wie das Köpfchen an der Aussenfläche, noch von irgendwelchen Kanälen durchzogen. Taf. 1, Fig. 3, 7, 9, Taf. 2, Fig. 4 zeigen die Form dieser centralen Anschwellung. Sie entsteht offenbar dadurch, dass sich die Querschnitte der cylindrischen Säulchen durch gegenseitigen Druck zuerst zu regelmässigen Secksecken umformen. Weiter nach innen zu (unten zu, Taf. 1, Fig. 7) wird der Querschnitt unregelmässiger durch radial laufende Falten und Wülste auf den Kegeln, gleich als wenn deren Seitenflächen durch ungleiche Pressungen gegen einander aus- und eingestaucht wären. Dass in der That der Querschnitt der Verdickung anfangs, d. h. da, wo die Säulchen eben zur Berührung kommen, regelmässig-sechseckig ist, ergiebt sich aus der geätzten Stelle (Taf. 1, Fig. 3 rechts); vergrössert 2, Fig. 8); die stehen gebliebene Mergelmasse

zeigt hier solche Umrisse. Es ergiebt sich ferner aus vielen Steinkernen. namentlich solchen, bei denen die innere Fläche der Wand abgerieben ist. (Gleichwerthig damit ist Taf. 4, Fig. 1.)

Die centrale Endfläche des Füsschens ist von unregelmässig rhombischem, von fünf- oder von sechsseitigem Umrisse. Die rhombische Form ist die vorherrschende, sie ist überall gewissermassen als die angestrebte zu erkennen (Taf. 1, Fig. 3, 9). Die Ecken sind öfter zu Nasen ausgezogen, die den Nasen etwas ähnlich sehen, die auf der Aussenfläche durch die distalen Spindeln hervorgebracht werden (Taf. 1, Fig. 3), aber durchaus nicht dieselbe Bedeutung haben. Die Endfläche (Taf. 1, Fig. 9) zeigt ebenso wie der seitliche Theil der Verdickung (Fig. 7) meist, aber nicht ausschliesslich, radial verlaufende breite Falten und Wülste und dazwischen liegende, breitere Rinnen, die sich häufig angenähert rechtwinklig durchkreuzen und dabei oft eben so orientirt sind, wie die Arme der zugehörigen Köpfchen. Ueberhaupt sind die rhombischen Linien der centralen Endflächen angenähert ebenso orientirt wie die Tafelumrisse der Aussenseite. Dennoch kann kein Zweifel darüber bestehen, dass die Wülste und Nasen an den Füsschen mit besondern Armen oder Kanälen darin, wie man sie, analog den Armen und Spindeln in den Köpfchen angenommen hat, nichts zu thun haben. Alle Wege, die zur Auffindung solcher Arme und (hohlen) Axen führen konnten, die genaue Beobachtung der unverwitterten und der in den verschiedensten Verwitterungsstadien befindlichen Verdickungen, das Studium von Steinkernen, namentlich aber von Aetzungen und Dünnschliffen (Taf. 1, Fig. 3, vergrössert 2, Fig. 7, 8; Taf. 2, Fig. 4, 6) haben stets nur ein negatives Resultat und niemals das geringste Anzeichen für das Vorhandensein solcher Analogien gegeben. Die von Billings und Hinde beobachteten sich rechtwinklig kreuzenden Kanäle in den Füsschen verkieselter Merome[1]) dürften sich so erklären, dass nach der Auflösung des ursprünglichen Kalkes im verhärteten Gesteine der secundär abgesetzte Kiesel nicht zur vollständigen Wiedererfüllung ausgereicht hat, so dass die so benannten Nasen im Füsschen hohl geblieben sind und nun wie von Kanälen durchzogen erscheinen.

---

1) Hinde, Geol. Soc. 1884, Taf. 37, Fig. 3i, 3j. Die andern von Hinde abgebildeten Merome 3h, 3k, 3l, 3m zeigen keine Kanäle in den Füsschen, nur die Falten darauf.

Mir liegen isolirte, verkieselte Merome aus Canada vor, welche die Nasen zwar nicht zeigen, bei denen aber alle andern Theile, Säulchen und Tangentialarme einen weiten, nur von einer dünnen Kieselwand umschlossenen Kanal enthalten. Der Kiesel hat sich von den Wänden der Hohlräume aus schichtweise abgesetzt. Wären Nasen vorhanden (vergl. dazu die deutlichen Nasen in den beiden links liegenden Durchschnitten von Füsschen Taf. 2, Fig. 6), so müssten auch sie unter solchen Umständen hohl sein und zugleich nach aussen offen, weil die Verdickungen der Füsschen so dicht an einander stossen, dass ihr Kalk öfter mit einander verwachsen erscheint, oder weil doch die trennende Gesteinschicht so dünn ist (Taf. 2, Fig. 4), dass sie bei der Auslaugung der Merome sehr leicht durchbrochen und entfernt sein wird.

Die Art aber, wie die centrale Endfläche des Säulchens die Verhältnisse des Köpfchens gewissermassen nachahmt, dürfte eine Erklärung in den Druckverhältnissen finden, denen die sich verdickenden centralen Enden der Säulchen bei ihrer gegenseitigen Berührung unterworfen waren. Diese Druckverhältnisse werden durch die verschiedene Entfernung der Säulchen in radialer und concentrischer Richtung oder, was dasselbe ist, durch die Relation der Längen der beiden Diagonalen in den rhombischen Täfelchen der Aussenfläche bestimmt. Dadurch müssen die ursprünglich runden, dann regelmässig sechsseitig gedrückten Enden der Säulchen einen angenähert rhombischen Umriss erhalten, der ebenso orientirt ist, wie die Täfelchen des Köpfchens, und dadurch werden häufig rechtwinklig sich kreuzende Falten und Wülste auf der zusammengedrückten Endfläche entstehen. Auch die an dieser Endfläche auftretenden concentrischen Linien und Runzeln (Taf. 1, Fig. 9) zeigen nicht etwa ein besonderes Glied des Füsschens an, das dem concentrisch gestreiften Täfelchen der Aussenfläche entspricht, sondern sind nur der Ausdruck des schaligen Aufbaus der Säulchen.

(*Besondere Form der Füsschen bei Receptaculites orbis.*) Bei Receptaculites orbis *Eichw.* konnte eine neue Eigenschaft der Füsschen festgestellt werden. Ihr Profil im Radialschnitt (Taf. 3, Fig. 8) ist nämlich nicht gleichseitig, sondern unsymmetrisch und lässt sich am besten mit der Form eines Stiefelchens vergleichen, mit einer längern, flachern Spitze und einem kürzern, stumpfern, steilern Hackentheile, (= Ab. in

nachstehenden Skizzen.) Dass die Form gesetzmässig ist, geht daraus hervor, dass die Stiefelchen in den beiden Seiten des Schliffes rechts und links vom Mittelpunkte symmetrische Lage haben, so dass ihre Spitzen alle nach aussen gerichtet sind, also unter dem proximalen Arme liegen, (der gewöhnlich auch das längste Glied des Köpfchens ist). Wir erkennen die Form ebenso in dem Dünnschliffe eines andern Stückes wieder (Taf. 3, Fig. 9).




Fig. 3.

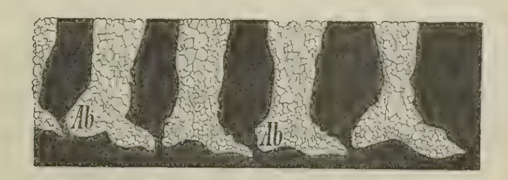



Fig. 4.

Fig. 3 und 4. Füsschen von Receptaculites orbis *Eichw.* in 4/1. Ab = Hackentheil des Füsschens. Symmetrische Lage von Ab in Fig. 3 und 4 zu beiden Seiten des Nucleus. Unter-Silur von Oeland. Original im Stockholmer Museum.

(*Aeussere Formen von Receptaculites.*) Die erhaltenen Stücke von Receptaculites zeigen meist eine schüsselförmige (Taf. 1, Fig. 1), oder selbst flachtellerförmige Gestalt (Taf. 4, Fig. 1); seltener sind kegel- und becherförmige Körper (Taf. 3, Fig. 1, 6; Taf. 4, Fig. 7), die aber alle „den mannigfaltigsten Modificationen und Verzerrungen theils in Folge „besonderer Wachsthumsverhältnisse, theils durch nachträgliche Pressung, „Belastung oder durch Druck“ unterliegen. (Gümbel, S. 181).

(*Unterer Pol.*) Der untere Pol ist in der Regel stumpf gerundet und häufig leicht eingesenkt (Taf. 1, Fig. 2; Taf. 6, Fig. 7), seltener zitzenförmig (Taf. 3, Fig. 7), zuweilen fast kurz stielförmig. (Gümbel, Taf. A, Fig. 1, 2.) Die Anordnung der Täfelchen und ihre Form am untern Pole, ebenso die Art, wie neue Täfelchenreihen eingeschoben werden, hat bereits Hinde[1]) für Ischadites beschrieben und abgebildet. Wir bringen hier noch einige Ergänzungen. Bei Receptaculites ist dieser Pol in gleicher Weise wie bei Ischadites gefügt; doch wurde eine Ausnahme beobachtet, die S. 676 gekennzeichnet ist. Sonst bildeten

1) Hinde, Geol. Soc. 1884. p. 812, 819; Taf. 36, Fig. 1f; Taf. 37, Fig. 2a.

stets 8 gestreckte Täfelchen den Wachsthumsanfang. Sie sind distalseitig verlängert und stossen mit schmalen Spitzen im Centrum zusammen. (Taf. 1, Fig. 12, abgewittert, so dass die Täfelchen fehlen. Taf. 6, Fig. 1, 7.) Die Säulchen unter den 8 innersten, lanzettförmigen Täfelchen liegen nicht unter deren Mitte, sondern nahe deren proximalen Enden (Taf. 1, Fig. 12), so dass man diese centralen Plättchen als solche betrachten kann, die aus normal gebildeten rhombischen Täfelchen durch Verlängerung ihrer distalen Ecken bis zur vollständigen Erfüllung einer mittleren Lücke entstanden sind. Nur bei einer Art, Receptaculites crassiparies n. sp., und in einem einzelnen Falle (weiteres Beobachtungsmaterial dazu fehlte) wurde der Nucleus nicht aus 8, sondern nur aus 4 kürzeren, rhomboidischen Täfelchen gebildet (Taf. 3, Fig. 5).

(*Vermehrung der Spiralreihen.*) Auf den Nucleus folgen ein oder zwei Kreise von je 8 zu einander und zu den 8 mittleren Täfelchen alternirend gestellten Plättchen, und erst im dritten oder vierten Kreise beginnt die Einschiebung neuer Spiralreihen, durch die die Vergrösserung der Körper bewirkt wird. (Taf. 4, Fig. 1.) Diese Einschiebung wird durch ein besonders gestaltetes Täfelchen (Interpositum) bewirkt, bei dem die proximale Ecke zu einer breiten, oftmals distalwärts eingebuchteten Kante abgestumpft ist. Das erste Täfelchen der neuen Reihe hat im allgemeinen die Form eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen breitere Basis an das Interpositum grenzt. Ein bestimmtes Gesetz für die Anordnung dieser Interposita und somit für die Einschiebung der Spiralreihen habe ich nicht auffinden können.

Die Einschiebung neuer Reihen scheint von einer gewissen Maximalgrösse der Täfelchen, die nicht überschritten wird, abzuhängen; jedoch wächst diese Grösse mit der zunehmenden Vergrösserung der Körper, so dass also jeder höheren Altersstufe eine höhere Maximalgrösse der Täfelchen entspricht. Ist diese erreicht, so erfolgt jene Einschiebung.

Billings hat in treffender Weise die spiralen Curven, in denen die Täfelchen angeordnet sind, mit den bekannten Figuren auf den Kapseln der Taschenuhren verglichen. Diese Aehnlichkeit tritt aus noch darzulegenden Gründen auf den obern Hälften von Ischaditen (Taf. 6, Fig. 2) noch mehr hervor, als bei den bisher bekannten Receptaculites-Stücken, die sämmtlich Untertheile sind.

(*Ursprünglich geschlossene Form von Receptaculites.*) Bis jetzt scheint noch niemals ein vollständig geschlossener Receptaculit, wie ihn Billings'[1]) bekanntes Diagramm darstellt, gefunden worden zu sein. Dennoch glaube ich annehmen zu müssen, dass alle teller-, schüssel- und becherförmigen offenen Stücke nur unvollständig erhaltene Exemplare sind, bei denen die eine Hälfte des Körpers abgebrochen oder sonst wie zerstört worden ist, und dass die vollständig geschlossene Wand um einen innern Hohlraum herum, wie sie Billings' Reconstruction zeigt, der Wahrheit am meisten entspricht.

Gümbel vermeinte vollständige Exemplare in seiner Abhandlung Taf. A, Fig. 1 und 2 abgebildet zu haben. Wie war in diesen Stücken die Randfläche, die die Wand oben abschliesst, beschaffen? Nach der Anordnung der randlichen Täfelchen auf der Aussenfläche offenbar nicht anders, als in seiner Fig. 5, also nicht anders, als in jedwedem Querschnitte der Wand. Gümbel führte an, dass an einem Exemplare von Oberkunzendorf die Täfelchen über den Rand fortsetzen (S. 182). Ich kann das nur für eine Folge von Verdrückung halten, so lange nicht klar gestellt worden ist, wie die Säulchen, die zu diesen Täfelchen gehören, mit ihren centralen Enden sich zu einander und zu denjenigen Säulen verhalten, die die Wand normal durchsetzen. Man kann sich hier gar keine gesetzmässigen Beziehungen vorstellen; aber man kann doch auch nicht annehmen, dass der sonst durchaus regelmässige Bau, der die Körper beherrscht, hier auf einmal aufgegeben worden wäre. Es scheint mir deshalb, dass die Täfelchen nicht schon ursprünglich auf jener Randfläche sassen, sondern zufällig darauf geschoben worden sind. Ungedeckt aber und offen, wie in Gümbel's Fig. 5 kann die Randfläche wohl auch nicht gewesen sein. Lagen Weichtheile zwischen den Säulchen, wie wir vermuthen, so wären sie dann oben vollständig entblösst gewesen, während sie doch seitlich, nach aussen und innen wie durch kräftige Panzer geschützt waren. Ich möchte desshalb vorläufig annehmen, dass die Wand von Receptaculites in gleicher Weise wie die von Ischadites oben zusammengewölbt war, dass aber die obere Hälfte in Folge ihrer Einrichtung leicht zerstört wurde. Auch unter den silurischen Ischaditen Böhmens

---

1) Billings. Palaeoz. Foss. Canada. p. 378.

(Acanthochonia Barrandei *Hinde*), die in der Etage *E* ziemlich häufig gefunden werden, hat man mit Ausnahme eines von Schlüter[1]) beschriebenen krugförmigen Exemplares stets nur napfförmige Stücke und zwar nur Untertheile gefunden, und auch bei den andern Ischaditen sind Untertheile viel häufiger, als vollständige, geschlossene Exemplare.

Wenn es gelänge ein Polstück von Receptaculites zu finden, bei dem der nach innen weisende, also der proximale Arm nach dem vorhandenen Pole hin gerichtet wäre, so würde damit der Beweis erbracht worden sein, dass auch Receptaculites einen obern Pol besitzt; denn der vorhandene Pol würde der obere sein. Die Richtigkeit dieses Satzes wird sich noch bei Ischadites ergeben. Ein solches Polstück habe ich allerdings bis jetzt vergeblich gesucht; das kann aber gegen seine ursprüngliche Existenz nicht angeführt werden. Wie gesagt, sind auch bei Ischadites die Obertheile viel häufiger zerstört als die Untertheile. Die Merome und Plättchen in der obern Hälfte sind nämlich viel kleiner und zarter als die der andern, und scheinen ausserdem eine gewisse Verschiebbarkeit gegen einander besessen zu haben, während die untern Merome starr und unbeweglich mit einander verwachsen waren.

Diese Betrachtungen über die ursprüngliche Gestalt der Receptaculiten veranlassten mich, in der Terminologie die Bezeichnung Hinde's „Inner or upper layer“ [2]) einzuschränken auf Innenfläche, die nicht zugleich „Oberseite“ ist; ebenso halte ich es für präciser, auch bei Receptaculites die „Aussenfläche“ nicht zugleich als „Unterseite“ zu bezeichnen.

Mit der gewonnenen Kenntniss des interessanten, gesetzmässigen Baues der Receptaculitenwand und der innern Beschaffenheit ihrer einzelnen Glieder lassen sich nun alle die so überaus mannigfaltigen Erscheinungen, die durch Verwitterung an der Aussenfläche der Körper erzeugt werden und auf Steinkernen und Abdrücken auftreten, auf dieselben Grundlagen zurückführen, die sich immer gleich bleiben. Wir können also Gümbel nicht darin beipflichten, dass „die sehr wechselnde

---

1) Sitzber. Niederrh. Ges. Bonn. 1887. p. 128.

2) Geol. Soc. 1884 p. 804 wird zwar nur „inner layer“ vorgeschlagen, p. 824, 3. und 4. Absatz dagegen jene doppelte Bezeichnung wiederholt gebraucht.

Ausbildung der Tangentialarme“ das sehr verschiedenartige Aussehen der entkalkten Steinkerne zur Folge hätte (a. a. O. p. 189).

(*Sculptur der angewitterten Täfelchen.*) Jetzt wird sogleich die Bedeutung und gegenseitige Lage der spindelförmigen Körperchen verständlich (Taf. 1, Fig. 8), die meist erhaben aus den angewitterten Täfelchen heraustreten, selten leicht vertieft in den Plättchen liegen oder nur mit ihren Rändern ein wenig darüber hervorstehen (Taf. 1, Fig. 8, auf den unteren Täfelchen).

Die Structur des Kalkes im Köpfchen ist eine strahlig-krystallinische um den Mittelpunkt herum (vergl. S. 670). Zugleich ist aber eine meist reichliche Zerspaltung des Kalkes, auch Zwillingsbildung vorhanden, die entweder nur eine Richtung paralleler Lamellen, oder — und das ist das gewöhnliche — zwei sich durchkreuzende Liniensysteme besonders hervortreten lässt (Taf. 2, Fig. 5). Aus diesen beiden Factoren nun, centralstrahligem Gefüge und durch spätere Umlagerung entstandenen Spaltungskörpern resultirt die Anordnung der Leistchen und Lamellen, worin die Täfelchen bei der Verwitterung aufgelöst werden. Die Lamellen sind zwar alle nach innen, aber doch nicht alle central gerichtet, sondern liegen zugleich mehr unter sich parallel und meist angenähert parallel den beiden Richtungen des rhombischen Umrisses. Manchmal tritt dafür eine körnige Beschaffenheit der verwitterten Täfelchen auf (Taf. 1, Fig. 8, obere und untere linke Täfelchen), die, wie man das verfolgen kann, mit einer parallelen Quertheilung der radialen Lamellen beginnt und eben der Durchkreuzung zweier Liniensysteme ihre Entstehung verdankt. Eine solche Körnelung kommt aus gleichen Ursachen auch an den Füsschen vor (Taf. 1, Fig. 9 oben rechts). Bei manchen Täfelchen treten durch die Verwitterung auch leicht gebogene und geschlängelte Leistchen hervor. (Taf. 1, Fig. 8. die beiden oberen Täfelchen der rechts liegenden Reihe).

Die zackig gekräuselten Ränder der Köpfchen in Taf. 1, Fig. 8 sind erst bei der Verwitterung in Folge des strahligen Baues der Träger entstanden, oder wenigstens so stark zerschlitzt worden, wie es nun der Fall ist; denn ganzrandig waren sie ja auch ursprünglich nicht wegen der radialen Falten auf der Unterseite der Köpfchen (vergl. Taf. 1, Fig. 4).

(*Dreieckige und herzförmige Verwitterungsfiguren.*) Nicht selten sieht man auf der Aussenfläche eigenthümliche dreieckige bis herzförmige

Figuren (Taf. 1, Fig. 2 rechts), die dadurch entstehen, dass die Verwitterung auf den proximalen (hellern) Theil der Täfelchen etwas energischer und schneller wirkt, als auf den distalen (dunklern) Theil, gleich als ob jener weniger widerstandsfähig wäre. Diese Erscheinung ist nicht zu verwechseln mit ähnlichen herzförmigen oder dreistrahligen Figuren, die bei tieferer Auslaugung der Köpfchen, jedoch in ihrem proximalen Theile auftreten (Gümbel, Taf. A, Fig. 32; Hinde, Geol. Soc. 1884, Taf. 36, Fig. 1i, 1j). Bei Besprechung der Steinkerne werden wir darauf zurückkommen.

(*Erhaltung der Spindeln.*) Unter allen Theilen des Meroms leisten die Spindeln bei der Verwitterung den meisten Widerstand. Diese eigenthümliche Thatsache wiederholt sich gleichmässig bei allen Vorkommnissen und bei allen Gattungen der Receptaculitiden. Sie spielt bei Erzeugung der mannigfaltigen Verwitterungsgebilde eine wichtige Rolle und hat frühere Forscher verschiedentlich zu Missdeutungen geführt. Die Spindeln bleiben oft, von ihrer umhüllenden Armwand befreit, ganz allein unverwittert zurück, und dann erhält die Aussenfläche eine Beschaffenheit, wie sie in Taf. 2, Fig. 10 und 11 dargestellt worden ist. Schlüter[1]) hat solche isolirten Spindeln als „Nadeln" einer besondern Art, Receptaculites eifeliensis, gedeutet und abgebildet.

Die Erklärung des wahren Sachverhaltes geben unsre Abbildungen. Fig. 10 nach einer Stelle, die etwa in demselben Stadium ist, wie das von Schlüter benutzte Fragment es war, Fig. 11 noch stärker verwittert. Dass die im Centrum der Rhomben (Fig. 10) zusammenlaufenden „Nadeln" in der That nichts andres als die Spindeln sind, wird durch Fig. 11 erwiesen, da man hier deutlich um die „Nadeln" herum auch die rinnenförmigen Abdrücke der Arme wahrnimmt, in denen sie eingeschlossen waren.

Theilweise haften an den Spindeln noch fetzige Reste der umhüllenden Armwand (Fig. 11). Die Trennung der distalen von der proximalen Spindel, die Ueberlagerung jener über und das Untertauchen dieser unter die andern Spindeln sind deutlich zu erkennen. Die von Schlüter gezeichnete Querlinie aber auf den meridionalen Ecken (der einst vorhandenen Täfelchen), die er als die Grenze von proximalem und distalem

1) Zeitschr. Deutsch. Geol. Ges. Bd. 39. 1887. Taf. 2, Fig. 5, 6.

Arme angesehen hat, ist nur ein anfangs schwacher Eindruck auf der distalen Spindel (vergl. Taf. 1, Fig. 8 auf den distalen Spindeln einiger der untern Täfelchen). Er rührt von dem Täfelchenrande her, der über die Spindel läuft und wird bei stärkerer Verwitterung zu einer Art Abschnürung (Taf. 2, Fig. 10 und noch mehr in Fig. 11), wodurch man versucht sein könnte, das Ende der distalen Spindel zur proximalen Spindel zugehörig zu rechnen. Die abgebildeten Stellen zeigen ferner die gesetzmässige Lagerung der beiden lateralen Spindeln, die rechte in der Zeichnung stets oben, die linke überall unten, also die normale dextracclive Ausbildungsform des Winkelgesetzes.

(*Weitere Verwitterungserscheinungen und Steinkerne.*) Zuweilen sind bei vollständig erhaltenen Spindeln die Täfelchen in der Weise abgewittert, dass ihre Ränder und rhombischen Umrisse nicht mehr aufzufinden, oder nur stellenweise noch ganz schwach angedeutet sind. Dann erscheint die Oberfläche der Körper rectangulär gegittert, wie bei Ischadites in Hinde, Monogr. Brit. foss. Spong. Taf. 2, Fig. 1a, wo die stehengebliebenen Leistchen unzweifelhaft die Spindeln, nicht die Arme selbst sind. In solchen Ischaditen aus Gotland bestanden manchmal die Spindeln aus Brauneisen oder einem Gemisch von Eisenkies und Brauneisen, waren aber zugleich von einer dünnen Kalkspathhaut noch umhüllt.

Bei der allmählichen Verwitterung der Köpfchen von aussen müssen zuerst die distalen Arme, weil sie am höchsten liegen, gänzlich verschwinden. Dadurch werden jene Dreiecke und Dreistrahler auftreten, die auf der vorigen Seite erwähnt wurden (vergl. Gümbel, Taf. A, Fig. 32; Hinde, Geol. Soc. 1884. Taf. 36, Fig. 1i, 1j).

Alsdann werden die lateralen Arme herausgelöst und es wird ein Aussehen erzeugt, genau wie in der geätzten Stelle Taf. 2, Fig. 3.

Ist der Kalk der Köpfchen ganz weggeführt, aber die umgebende Gesteinsmasse nicht gleichzeitig durch Verwitterung oder Abrollung abgeschabt, so erhält man Steinkerne, wie sie von Hinde (Geol. Soc. 1884. Taf. 36, Fig. 2 und namentlich im Monogr. Taf. 2, Fig. 1b, 2, 3) vortrefflich abgebildet worden sind. Die charakteristischen feinen Einschnitte an den Rändern der rhombischen Felder (Monogr. Taf. 2, Fig. 3; Gümbel, Taf. A, Fig. 4 bei a) rühren von den randlichen Falten und radialen Leistchen auf der Unterseite der Köpfchen her (unsre Taf. 1, Fig. 4).

Es ist klar, warum an diesen und andern Ganz-Steinkernen der proximale Arm nicht eine seiner ganzen Länge entsprechende, nach aussen geöffnete Rinne hinterlässt, sondern diese Rinne sich als ein kurzes Kanälchen noch schräg in die Gesteinsmasse einbohrt (Taf. 7, Fig. 1, 5, 7). Dieser schräg nach innen gerichtete Arm war eben durch Gesteinsmasse von den darüber liegenden Armen getrennt (vergl. Taf. 2, Fig. 4).

Wird die Aussenfläche des Steinkerns abgerollt oder durch Verwitterung abgeschabt, so dass die erhabenen Ränder des Rhombus verschwinden, so entstehen, wenn die innersten Theile der Arme noch nicht gänzlich weggelöst sind (also Halb-Steinkern-Zustand) wiederum rectanguläre Gitter aus Kalkspath oder Brauneisen, deren Leisten aber nicht über die Oberfläche hervorragen. (Hinde, Geol. Soc. 1884. Taf. 36, Fig. 1 a, 1 b u. 1 h).

Ist bei abgeschabten Stücken endlich aller Kalk der Köpfchen vollständig entfernt, so erhalten wir rechtwinklig sich kreuzende Furchen. Anfänglich erkennt man hierin noch den Abdruck eines jeden Armes (Taf. 7, Fig. 1); oft aber werden die schmalen trennenden Wälle zwischen diesen Abdrücken auch durchbrochen und dann werden die Furchen zusammenhängend und fortlaufend (Taf. 7, Fig. 3 im obern Theile; Fig. 6). Schliesslich werden auch die Wälle zwischen den Furchen abgerieben, und es bleiben im Gesteine nur die reihenweise und im Quincunx gestellten Löcher, worin die Säulchen gesessen haben, als letzte Erkennungszeichen von Receptaculitiden zurück (Gümbel, Taf. A, Fig. 3; Hinde, Geol. Soc. 1884. Taf. 36, Fig. 1 b, 1 c, 1 k).

(*Steinkerne von Oberkunzendorf.*) Nicht unbesprochen darf ich die meist sehr stark verdrückten Steinkerne von Oberkunzendorf lassen, die Dames beschrieben hat. Eine kleine charakteristische Partie eines solchen Steinkernes ist in Taf. 2, Fig. 12 in fünffacher Vergrösserung abgebildet. In den Abdrücken der Köpfchen findet man einige schmale Schlitze (*s*), die zusammen mit den breiteren Furchen, die die Arme und ihre Spindeln hinterlassen haben, eine Art mehrstrahligen vertieften Stern bilden. Solche Sterne waren es wohl, die Dames[1]) zu der Annahme bestimmt haben, dass zwischen den vier „Kanälen" (Spindeln), die nach den Ecken des Täfelchens laufen, noch mehrere „feinere Kanäle"

1) Zeitschr. d. Deutsch. Geol. Ges. 1868. Bd. 20. S. 483.

vorhanden wären, die nach den Rhombenseiten der Köpfchen strahlen. Ich muss annehmen, dass die Schlitze (*s*) erst nachträglich entstanden sind: dass nämlich bei der scharfen seitlichen Verquetschung das Gestein unter den Köpfchen mehr oder weniger strahlig aufgerissen worden ist. Die Furchen und Schlitze [1]) sind weder in allen sonst gleichartigen Steinkernen von Oberkunzendorf, noch in allen Abdrücken der einzelnen Köpfchen eines Steinkernes, noch gleichmässig in den einzelnen Abdrücken der Köpfchen vorhanden, und selbst bei einer gewissen Regelmässigkeit erwecken sie immer zugleich den Eindruck des Zufälligen. Ich habe sie nur an verdrückten Steinkernen von Oberkunzendorf gefunden; nicht-ausgelaugte, kalkige Exemplare desselben Fundortes haben niemals besondere Gebilde erkennen lassen, die den Schlitzen entsprächen. Kanäle oder den Spindeln gleichwerthige, im Innern der Köpfchen eingeschlossene Theile konnten die Schlitze schon aus dem Grunde nicht sein, weil sie zu erhabenen Leisten auf der Unterseite der Köpfchen werden, wenn man sich die leeren Formen dieser wieder ausgegossen denkt.

(*Weitere durch Verwitterung erzeugte Figuren.*) Unter den Figuren, die durch Verwitterung entstehen, kommen noch andere Sternchen mit mehr als 4, nämlich auch mit 6 bis 8 Strahlen vor, die aber durch wesentlich andere Ursachen hervorgerufen werden, als die Sterne an den Oberkunzendorfer Stücken. Einmal entstehen sie dadurch, dass die Täfelchen sowohl dicht um die festeren Spindeln herum, als auch an ihren Rändern sich durch Auswitterung gleichmässig vertiefen und Bilder erzeugen, wie an der untern linken Seite der Fig. 2 auf Taf. 1. Der Mittelpunkt dieser Sterne liegt also in den Ecken der Täfelchen. Häufiger noch ist der umgekehrte Fall, dass mit den Spindeln auch die Ränder der Täfelchen erhaben stehen bleiben, wodurch wiederum Sterne erscheinen, die bis zu 8 Strahlen haben, und deren verdickte Mittelpunkte in den am meisten erhabenen Theilen der distalen Spindeln liegen, d. h. wiederum in den Ecken der Täfelchen. Manchmal bleiben neben den Täfelchen-Rändern nur die distalen Spindeln, oder selbst nur ihre dicksten Strecken auf den Ecken der Plättchen stehen, während alle übrigen Theile der Köpfchen bereits zer-

1) Die Schlitze sind manchmal mit Brauneisen erfüllt, wodurch die sternförmigen Figuren sich noch schärfer vom Gestein abzeichnen.

stört worden sind. Dann entstehen jene eigenartigen Zeichnungen (Taf. 1, Fig. 11), die wie vierbeinige Insecten, wenn man das sagen könnte, aussehen, besonders, wenn noch der Zusammenhang der Ränder unterbrochen ist.

(*Poren an der innern Wandfläche von Receptaculites occidentalis und Recept. orbis.*) Billings und Hinde[1]) haben bei Receptaculites occidentalis *Salter* in den Ecken der „innern Täfelchen", deren Existenz sie annehmen (vergl. 672, 674), Durchbohrungen beobachtet, worauf ich erst hier zu sprechen komme, weil ich diese Durchbohrungen für secundäre, durch die Art der Erhaltung veranlasste Poren ansehe. Zwar stand mir Receptaculites occidentalis nicht zur Verfügung, aber die merkwürdigen Löcher kommen auch bei unserm Rec. orbis vor, der wahrscheinlich mit jenem identisch ist, und so dürften Rückschlüsse von diesem auf die amerikanische Art erlaubt sein.

Für die Besprechung dieser Frage lagen mir besonders zwei wichtige Stücke[2]) vor, die sich beide in gleicher Weise dadurch auszeichnen, dass die sehr flache Wand des Receptaculiten dicht über den centralen Endflächen der Säulchen von dem unterliegenden Gesteine abgerissen ist (vgl. nebenstehende Skizze). Jedes Exemplar besteht so aus zwei aufeinander passenden Gegenstücken. Der eine Theil des Berliner Stückes (Re No. 39 A) ist Steinkern, die Säulchen sind also zu Röhren geworden; die Füsschen dagegen bilden in dem Gegenstücke (Re No. 39 B) eine dünne Kalklage auf dem Gesteine. Auf dieser Kalklage stehen kleine Kegel (Taf. 3, Fig. 10), welche die abgebrochenen und durch Verwitterung gerundeten Säulenstümpfe (Füsschen) sind und in entsprechende trichterförmige Vertiefungen des aufgelegten Gegenstückes hineinpassen (Taf. 3, Fig. 10 a), d. h. in die

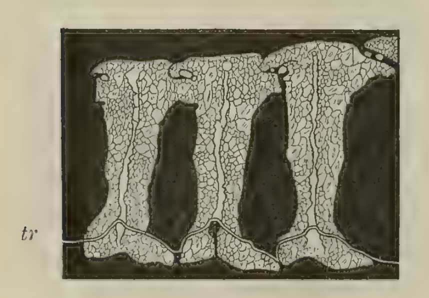



Fig. 5.

Wandstück von Receptaculites orbis *Eichw.* Unt. Silur. Oeland.
*tr* = Angenommene Trennungsfläche = Fläche geringsten Widerstandes, nach der etwa die Zerreissung der Wand erfolgt.
Skizze in 10/1 nach einem Dünnschliff im Stockholmer Museum.

1) Hinde, Geol. Soc. 1884. p. 824, 825, Taf. 37, Fig. 3 c—g.

2) Aus dem Berliner Museum für Naturkunde, Re No. 39; und aus dem Provinzial-Museum zu Königsberg, Re No. 1.

centralen Enden der ehemals von den Säulchen erfüllten Röhren.[1]) Zwischen den kleinen Kegeln (Fig. 10) liegen Vertiefungen, die wie die Knoten ziemlich regelmässig im Quincunx geordnet und offenbar mit den bei Recept. occidentalis bekannten Poren identisch sind. Diese Vertiefungen erweisen sich bei genauer Betrachtung theils als wirkliche Durchbohrungen der Kalkdecke, theils jedoch und in vielen Fällen auch als einfache Einsenkungen. Aus diesem Grunde möchte ich die wirklichen Durchbohrungen als eine Folge von Zerstörung betrachten. Man könnte einwenden, dass diejenigen Vertiefungen, welche die Kalklage nicht durchdringen, nachträglich durch Kalk wieder verklebt worden wären. Ich will dann dagegen auf einen andern bemerkenswerthen Umstand aufmerksam machen. Fast keine dieser Einsenkungen nämlich liegt in der Mitte zwischen den sie umgebenden vier kleinen Kegeln (Füsschen) (Taf. 3, Fig. 10), sondern jede ist hart an einen Kegel herangedrängt und nach diesem zu am meisten vertieft, ja sie untersticht ihn vielfach, wenn ich mit diesem Ausdrucke der Bildhauer die Erscheinung vielleicht charakterisiren kann. Uebereinstimmend damit sind auf dem Gegenstücke (Taf. 3, Fig. 10a) kurze Zäpfchen[2]) vorhanden, die jenen Einsenkungen in Fig. 10 entsprechen und hier in 10a vielfach deutlich über die trichterförmigen Vertiefungen überhängen, in die wieder die Kegel von 10 (Füsschen) hineinpassen. Diese Zäpfchen geben auch über die Gestalt der in Frage stehenden sogenannten Poren bessern Aufschluss, als die Poren selbst; man ersieht aus ihnen, dass sie meist nicht kreisrund, sondern vielfach gestreckt, eckig, halbmondförmig und sichelförmig sind. Die unterstechende Lage der Vertiefungen in Fig. 10 und die überhängende der entsprechenden Zäpfchen in Fig. 10a, sowie ihre weitere bedeutsame Eigenschaft, dass sie nicht in der Mitte zwischen den 4 Säulchen, sondern immer hart an demjenigen Rande der Säulchen stehen, der dem Centrum des Stückes, also dem untern Pole zugewandt ist, dass sie also zur Peripherie gleichsam hindrängen, stellt ihre Beziehungen zu der S. 674 beschriebenen, eigenthümlichen Form der Füsschen von Rec. orbis zweifellos klar. Würde das Taf. 3, Fig. 8 im Durchschnitt abge-

1) Theilweise ist der Kalk der Säulchen auch noch erhalten.
2) Auch von Gümbel beobachtet, a. a. O. p. 208.

bildete Stück zum Steinkerne, und würde die Wand dann in gleicher Weise, wie eben angegeben, zerrissen werden, so müsste die Mergelerfüllung, die in den proximalen Ecken zwischen den Füsschen sitzt, feine, schräg von oben und innen nach unten und aussen[1]) laufende Stäbchen[2]) bilden, und es würden am Sternkerne dieselben nach der Peripherie hindrängenden, überhängenden, schrägen Zäpfchen erscheinen, wie in Taf. 3, Fig. 10a. Sie würden jedoch, wie man sieht, sehr viel dünner sein als diejenigen in Fig. 10 a (in beiden Figuren 5 fache Vergrösserung), und die Ausmündungen der Lücken könnten an der innern Wandfläche als Durchbrechungen gar nicht auffallen; ihre Weite würde nämlich nach Dünnschliff Taf. 3, Fig. 8 in max. 0,14 mm betragen. Aber selbst diese feinen Ausmündungen, die im Schnitt sich ja kaum von einfachen Trennungslinien unterscheiden, scheinen nicht ursprünglich vorhanden gewesen, sondern erst nachträglich entstanden zu sein. Es zeigt sich nämlich an Dünnschliffen eines andern Stückes (Taf. 3, Fig. 9), dass der stumpfe Theil der Füsschen (Hackentheil der Stiefelchen) vielfach schräg tief eingefaltet ist (vergl. nebenstehende Skizze bei *B*). Diese Einfaltung nun, der ein Wulst auf der Endfläche des Füsschens entspricht, scheint die erste Ursache für die Durchbrechung der innern Wandfläche zu sein. Die innere Wandfläche erweist sich in den bezeichneten Dünnschliffen im allgemeinen undurchbrochen, aber es ist schwierig, nach den nicht sehr günstigen Präparaten genau festzustellen, wo die Grenze zwischen je zwei Füsschen eigentlich ist. Wenn man nur die besten Bilder zu Rathe zieht, so scheint diese Grenze überall bei den mit *G* bezeichneten Punkten der

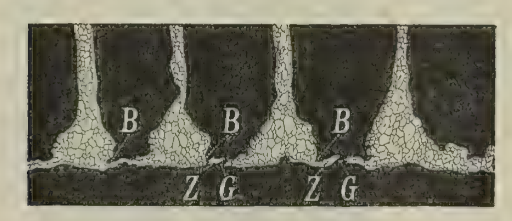



Fig. 6.

Füsschen von Receptaculites orbis, *Eichw.* Westpreussisches Geschiebe.

*B* = Einfaltung. *Z* = Vorspringender Rand (Nase?) des Füsschens, der leicht abgebrochen und zerstört wird. *G* = Ursprüngliche Grenze zwischen den Füsschen.

Skizze in 10/1 nach einem Dünnschliff in der Sammlung der Berliner Berg-Akademie.

---

1) Auf Fig. 8 bezogen.

2) Längs den Seiten ihres ungefähr rhombischen Umrisses schliessen die Füsschen mit breiter Berührungsfläche dicht aneinander.

vorstehenden Skizze zu liegen. Diese ursprüngliche Grenze ist bei den in Rede stehenden Dünnschliffen oft mit Kalk verklebt und dadurch verborgen. Sie dürfte in gleicher Weise auch in Taf. 3, Fig. 8 durch secundäre Kalkansätze, die hier ohne Zweifel eine gewisse Deformation der Merome bewirkt haben, jetzt verschoben sein. Dafür erscheint die spätere Durchbrechung der Füsschen, die von der Einfaltung ausgeht, nun als neue Grenze. Vor dieser Falte liegt die dünnste und schwächste Stelle des Füsschens (Nase?), (Taf. 3, Fig. 9), die am leichtesten verletzt oder auch durch Vermergelung in Gesteinsmasse umgewandelt werden kann[1]), wodurch in der proximalen Ecke eines jeden Täfelchens eine kleinere oder grössere Lücke entstehen wird.

Zu gleichen Resultaten führt auch das schon erwähnte Stück aus dem Königsberger Provinzial-Museum. Taf. 4, Fig. 1 lässt auf eine dicht über den Füsschen abgerissene Trennungsfläche blicken, während die centralen Enden der Säulchen, wenigstens zum grössten Theile, auf dem Gegenstücke sitzen. Auch auf diesem Gegenstücke sind zwischen den stehengebliebenen Füsschen, die also wie in Taf. 3, Fig. 10 erscheinen, Einsenkungen vorhanden, mit derselben Neigung sich gegen die Säulchen zu drängen und sich hier am meisten zu vertiefen. Aber sie sind seichter, desshalb undeutlicher und liessen die Durchbohrung der Kalkschicht nicht beobachten. Es ist nun ein günstiger Umstand, dass die Trennung der beiden Gegenstücke nicht überall über dem verdickten Fusse der Säulchen stattgefunden hat, sondern dass an einigen Stellen die Merome unzerrissen geblieben sind, so dass man Taf. 4, Fig. 1 (eine Partie im linken, eine im rechten Theile des Stückes) z. Th. auch auf die Endflächen der Füsschen sieht. Diese Endflächen (von meist deutlich rhombischem Umrisse, so dass man, ohne ihre Lage zu den Säulchen zu kennen, sie leicht mit den äussern Täfelchen verwechseln könnte), sind in der S. 673 beschriebenen Weise gewulstet und gefaltet, und zwar sind die Wülste nach den Ecken zu vielfach am stärksten ausgeprägt, um dann an den Ecken selbst plötzlich steil abzufallen, so dass hier relativ starke Einsenkungen erzeugt werden (Taf. 4, Fig. 1, auf der rechten Hälfte des Stückes. Diese

---

1) In Taf. 3, Fig. 9 sind mehrere Säulchen und Füsschen im Stadium begonnener Vermergelung, die zuweilen den Kalk der Merome vollständig in eine feinporöse, schwammige Masse verwandelt.

Einsenkungen sind in der Zeichnung der grössern Deutlichkeit wegen schärfer markirt, als sie auf dem Original erscheinen). Wirkliche Durchbohrungen aber konnten niemals beobachtet werden, und selbst wenn einige Einsenkungen, die von den stärksten Wülsten umgeben sind, zweifelhaft bleiben sollten, so ist doch sicher, dass die grösste Zahl der Ecken nicht durchbohrt ist. Auch sieht man auf dem Gegenstücke keine Zäpfchen, die solchen Durchbohrungen entsprächen.

Diese Beobachtungen dürften die Annahme rechtfertigen, dass die „Poren“ in der innern Wandfläche weder für Gattung noch Art charakteristisch sind, dass die Füsschen mit ihren Rändern sich gegen einander pressen und eng aneinander schliessen mit Ausnahme der über den Ecken gelegenen Stellen, dass die hier bleibenden Lücken auch dann, wenn keine Durchbrechung der innern Wandfläche stattfand, an Steinkernen als kurze (schrägliegende) Zäpfchen erscheinen werden (vergl. auch Taf. 4, Fig. 2), dass aber vermöge der Einfaltung der Füsschen (bei *B* in der Skizze S. 686) die sehr dünnen, an den Falten hängenden Kalkstückchen (*Z*) leicht fortgebrochen oder fortgelöst wurden, und hierdurch die Poren, die von sehr verschiedener Weite und weder bei allen Exemplaren, noch an allen Stellen und Füsschen eines Exemplares vorhanden sind, in der innern Wandfläche entstanden. Sollten aber solche Durchbrechungen bereits an dem lebenden Receptaculiten aufgetreten sein, so ist doch so viel sicher, dass sie nicht die Ausmündungen besonderer Kanäle, die die Füsschen durchzogen, sondern nur einfache Lücken dazwischen gewesen sein können.

(*Merkwürdiger Steinkern in Backsteinkalk.*) Bevor ich die Betrachtung über Receptaculites schliesse, muss ich die Aufmerksamkeit noch auf einen merkwürdigen Steinkern in einem Backsteinkalk-Geschiebe von Wartin in Pommern lenken, der auf nichts anderes als auf Receptaculites bezogen werden kann.

Auf einer cylindrisch etwas eingewölbten Fläche des Stückes (Taf. 4, Fig. 2) sehen wir eine höchst zierliche Täfelung mit strahlig-angeordneten feinen Rippen auf den einzelnen Facetten. Ueber dieser getäfelten Fläche, jedoch durch einen schmalen Zwischenraum davon getrennt, liegt ein flaches, von feinen Röhren durchbohrtes Gesteinsstück, das nach allen seinen Verhältnissen: Länge, Dicke und Form der Röhren (Säulchen),

Vorhandensein und eigenthümliche Lage der kurzen Zäpfchen auf der innern (dem Beschauer zugewandten) Fläche nur der Steinkern der Wand eines Receptaculites orbis *Eichw.* sein kann, obgleich selbst Spuren der Köpfchen (wenn wir von den gerippten Facetten zunächst absehen) und ihrer Tangential-Arme fehlen. Dieser Mangel aber wird dadurch vollständig erklärt, dass die Köpfchen häufig, bei den böhmischen Ischaditen (Acanthochonien) fast ohne Ausnahme durch eine kalkige Incrustirung mit einander verschmelzen, wie wir das bei Ischadites genauer kennen lernen werden (vergl. Taf. 5, Fig. 10, 1). Wird der Kalkspath einer solchen Incrustation, die im Gestein eingeschlossen ist, später wieder weggelöst, so muss in dem Steinkerne ein durchlaufender Zwischenraum an Stelle der Köpfchen entstehen, wie es hier der Fall ist.

Dass nun die Facetten in der That auch zu der darüber liegenden Receptaculitenwand gehören, geht schon aus dem Umstande hervor, dass die Entfernung der punktförmigen Knöpfchen, von denen die Rippen auf den Facetten ausstrahlen (Taf. 4, Fig. 2, 3), in der Längsrichtung des Stückes gemessen genau so gross ist, wie die Entfernung der Röhren (Säulchen) von einander; in der Quere gemessen ein wenig grösser. Diese Differenz aber ist eine nothwendige Folge der Oberflächen-Krümmung. Es sind also genau so viele Facetten vorhanden als Säulchen, und beide sind in gleichlaufenden Reihen angeordnet.[1]) Der äussere Umriss der Facetten stimmt mit der Form der Receptaculiten-Täfelchen überein: Rhombus mit zwei concaven, zwei convexen Seiten und zwei abgestuzten (meridionalen) Ecken. Die Sculptur der Facetten kann ohne Zwang auf den radialen Bau der Täfelchen oder ihrer Träger zurückgeführt werden, wie er in angewitterten Köpfchen, so in Taf. 1, Fig. 8, besonders den rechts oben liegenden, hervortritt, deren leichtgekrümmte Radialleisten noch quergetheilt sein und dadurch in Körner zerfallen können (vergl. S. 679). Ob den gerippten Facetten eine ursprüngliche Oberflächensculptur zu Grunde liegt, oder ob ihre körnig zerhackten Strahlen erst später durch Corrosion entstanden sind, lässt sich noch nicht entscheiden. Jedenfalls müssen sie wohl so, wie sie sind, vor der Einbettung, oder

---

1) Dass über jedem Knöpfchen der Facetten ein Röhrchen liegt, dass also die Verlängerung eines jeden Röhrchens auf ein Knöpfchen trifft, liess sich bei dem engen Zwischenraume nicht direct und mit Sicherheit beobachten.

wenigstens vor der Verhärtung des Gesteines vorhanden gewesen sein, da sie so gleichmässig und scharf darin abgedrückt sind.

Das runde Knöpfchen auf den Facetten (Taf. 4, Fig. 3), von dem die Rippen ausstrahlen, stellt das vertiefte Centrum der Täfelchen dar. Es erscheint allerdings bei allen Täfelchen gleichsinnig an dieselbe meridionale Ecke gerückt, aber man bemerkt, dass die Facetten mit ihren Rändern dachziegelförmig über einander liegen, als ob man den Abdruck überschobener Plättchen vor sich hätte, wobei die eine Hälfte eines jeden Plättchens verdeckt wäre. Und in der That ist es so. Bei einer solchen Ueberschiebung muss der sichtbar gebliebene Theil eines jeden Täfelchens in seinem Umrisse ähnlich bleiben (im mathematischen Sinne) dem ganzen Täfelchen, und es wird also hierdurch dessen charakteristische Form nicht verschwinden, sondern vollständig gewahrt bleiben. Diese dachziegelförmige Ueberlagerung der Täfelchen ist bei Receptaculites nicht unbekannt; aber namentlich im obern Theile von Ischadites kommt sie öfter in solcher Regelmässigkeit vor, dass sie nicht durch Verdrückung entstanden sein kann, zumal die unterschobenen (distalen) Arme sich oft dabei tief in das benachbarte Köpfchen eingebohrt haben und davon umwachsen worden sind (Taf. 5, Fig. 9, 8 rechts). Stets ist dabei die distale Seite die unterschobene, die proximale Seite des Täfelchens die übergreifende. Vielleicht gehört auch unser Steinkern und Abdruck im Backsteinkalke dem Obertheil eines Receptaculites orbis an.

Ein von den Facetten (Taf. 4, Fig. 2) genommener Kautschuk-Abdruck müsste, so wird unsre erste Erwartung sein, die ursprüngliche Oberfläche des Receptaculiten mit dachziegelartig übereinander greifenden Täfelchen darstellen, und der nicht sichtbare Theil eines jeden Täfelchens müsste darin als der untergeschobene, verdeckte erscheinen. In Wahrheit ist nun aber in einem solchen Kautschuk-Abdrucke (Taf. 4, Fig. 4) gerade das Umgekehrte der Fall. Der hierin fehlende Theil eines jeden Täfelchens (oberhalb des punktförmigen Radianten, von dem die Rippen ausstrahlen) würde im Gegentheil, wenn man sich ihn ergänzt denkt, der überdeckende sein. Da nun bei der grossen Regelmässigkeit der Facetten an einen nachträglichen Verlust der fehlenden Täfelchen-Hälften nicht zu denken ist, so könnte es scheinen, als ob die Täfelchen hier abweichend gebaut und die Strahlpunkte der Rippen allgemein an den Rand gedrängt wären.

Doch trifft das nicht zu, und die Sache erklärt sich vollständig, wenn wir annehmen, dass auch hier wie in Taf. 5, Fig. 9 der proximale (in dieser Figur nach rechts gerichtete) Theil des Täfelchens von der darunter liegenden, unterschobenen, distalen Hälfte des Köpfchens durch Gestein (schwarz) getrennt ist, und dass es der Abdruck dieser distalen Seiten der Täfelchen ist, der in den Facetten unseres Steinkernes vorliegt.

Nach S. 685 stehen die Steinkernzäpfchen an der innern Wandfläche von Receptaculites orbis stets hart an demjenigen Rande der Säulchen, der dem untern Pole des Receptaculiten zugewandt ist. Nach der Stellung dieser Zäpfchen in Fig. 2, Taf. 4 können wir bestimmen, dass die Facetten, wenn sie die sichtbaren Theile übereinander geschobener Täfelchen im Abdrucke sind, in der That deren distale Hälften repräsentiren. Danach darf man es als zweifellos gelten lassen, dass keine Anomalie in Bau und Form der Täfelchen vorliegt, dass die Rippen nicht von einer Ecke der Täfelchen, sondern von ihrem Mittelpunkte ausstrahlen, und dass die proximalen Hälften der Täfelchen nicht fehlen, sondern dass diese proximalen Hälften, zwar eigentlich die übergreifenden (aussen liegenden), in Taf. 4, Fig. 2, 3 von den sichtbaren Facetten, d. h. von den distalen Hälften überdeckt, und hier also unterschoben erscheinend, noch im Gesteine vorhanden sind.

## Leptopoterion, ULRICH.

Diese untersilurische Gattung ist von E. O. Ulrich 1889 aufgestellt, und der Hinde'schen Auffassung über die Receptaculitiden gemäss, als eine Hexactinellide gedeutet worden.[1]) Ich hatte jetzt Gelegenheit, das Original von Leptopoterion mammiferum Ulr., der einzigen bekannten Art, zu untersuchen. Aber eine Darstellung dieser merkwürdigen Form, von der eine Abbildung noch fehlt, muss ich mir für den S. 648 erwähnten Nachtrag zur Besprechung einiger Arten versparen, weil die Tafeln zu dieser Arbeit bereits abgeschlossen waren, als ich Leptopoterion erhielt. Das wichtigste Unterscheidungsmerkmal gegenüber Receptaculites liegt darin, dass die dünne Wand, mit kurzen Radialen, aussen

---

1) The American Geologist, Bd. 3, No. 4. S. 239. — Tabular List and Classification of American Palaeozoic Sponges. Geol. Survey of Illinois. Bd. 8, 1890. S. 239.

von minutiös kleinen rhombischen Täfelchen bekleidet wird, die über die ganze Oberfläche hin, an den Polen wie auf den Seitenflächen etwa von einerlei Grösse sind. Im Uebrigen sind die Merome gerade so gebaut und zusammengefügt, wie bei Receptaculites.

## Ischadites, MURCHISON.

(*Bau von Ischadites.*) Der Bau der Merome und die Art ihrer Zusammenfügung bei Ischadites sind in allen wesentlichen Punkten dieselben wie bei Receptaculites. Ischadites ist nur durch die schlankere Form seiner Merome und besonders die im allgemeinen bedeutend grössere Länge der Radial-Arme, also durch eine viel grössere Wandstärke und kleinere centrale Körperhöhle von Receptaculites getrennt.

Der innere Hohlraum wird ringsum von einer Wand umschlossen, so dass zwei Pole und dementsprechend eine untere und eine obere Hälfte an den kugligen, ei-, linsen- oder birnförmigen Körpern zu unterssheiden sind. Der untere Pol ist genau so zusammengesetzt, wie bei Receptaculites (Taf. 6, Fig. 1; Taf. 1, Fig. 12).

(*Sogen. Osculum bei Ischadites.*) Was die von Hinde beschriebene Oeffnung am Apex, das sog. Osculum betrifft, so habe ich durch eine erneute Prüfung derselben Stücke, die auch Hinde untersucht hat, die Gewissheit erlangt, dass ein solches Osculum in der Grösse, wie es Hinde, Geol. Soc. 1884. Taf. 36, Fig. 1 a, 1 b abbildet, ursprünglich nicht vorhanden war, dass es überhaupt nicht, oder doch nur als eine relativ sehr feine Oeffnung vorhanden gewesen sein kann. Zwar zeigen die mir vorliegenden Stücke von Djupvik auf Gotland, woher die besterhaltenen Ischaditen kommen, ohne Ausnahme Lücken in dem Täfelchenbelag des obern Poles; aber die unregelmässigen Begrenzungen dieser Lücken beweisen unzweideutig, dass sie, wenigstens in ihrer jetzigen Form, nicht ursprünglich vorhanden waren, sondern erst durch Zerstörung der zarten Köpfchen hervorgebracht, oder doch bis zu ihrer jetzigen Ausdehnung erweitert worden sind. Auch bei den Originalen zu Hinde's Fig. 1, 1 b, 1 d auf Taf. 36, Geol. Soc. 1884, die mir ebenfalls zur Verfügung standen, ist sogleich ersichtlich, dass das gezeichnete Osculum mindestens eine nachträglich erweiterte Oeffnung ist.

Ich habe nun den nur leicht verletzten obern Pol eines Djupviker Ischaditen von 30 mm Durchmesser etwas abgeschliffen. Dabei ergab sich das in nebenstehender Figur skizzirte Resultat. Lassen wir die im centralen Theile vorhandenen (nicht ausgefüllten), zerstreuten Querschnitte von Radialarmen unberücksichtigt, — wahrscheinlich gehören sie zum Kreise I, sind aber herausgedrückt — so haben doch die mit I bezeichneten gleichstarken Querschnitte gewiss auf einem concentrischen Kreise gelegen, der im Gebirge durch Druck verzerrt worden ist. Denkt man sich die jetzt verzerrten Reihen I bis IV wieder ausgerichtet, so würde der innerste Kreis I noch nicht $1^1/_2$ mm Durchmesser haben; die zu seinen Radialarmen gehörigen Täfelchen aber müssten schon bei normaler Ausbildung etwa zusammenstossen; namentlich aber dann, wenn sie vielleicht, der Länge der proximalen Arme gemäss, also den langgestreckten Anfangstäfelchen des untern Poles entsprechend, ebenfalls verlängert gewesen sind (vergl. Taf. 1, Fig. 12; Taf. 6, Fig. 1).[1]

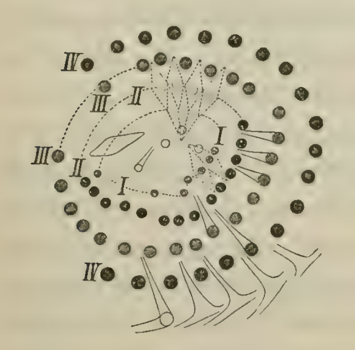


Fig. 7.

Angeschliffener Apex von Ischadites Königi *Murch.* Djupvik auf Gotland. Die dunkeln Kreise bezeichnen die Radiale der in concentrischen Reihen I — IV liegenden Merome, deren Köpfchen abgeschliffen sind. Die punktirten Figuren sind Ergänzungen.

Skizze in 10/1. Original im Stockholmer Museum. Re No. 21.

Auch die Oeffnung in dem Taf. 7, Fig. 1, 2 abgebildeten Ischadites Murchisoni *Eichw. sp.* ist durch Ausbruch von Meromen, wenn nicht überhaupt erst entstanden, so doch jedenfalls erweitert worden, da die Gesteinsausfüllung des Innenraumes an ihrer obersten Spitze noch

1) Zu gleichen Resultaten führten zwei mediane Dünnschliffe im Stockholmer Museum: Re No. 3a und 4a, die den obern Pol enthalten. In 3a befindet sich hier eine Lücke von nur 0,35 mm, die ursprünglich wohl noch enger war, denn der Dünnschliff zeigt Verletzungen an den Köpfchen, die die Lücke umrahmen. In 4a ist ein Zusammenschluss des obern Poles in der That vorhanden; aber man muss wegen der auswärts gerichteten Stellung der Radialarme in diesem Schliffe vermuthen, dass der Pol nachträglich eingedrückt worden ist. Es blieb desshalb leider unbestimmbar, ob der Zusammenschluss nicht erst durch die Eindrückung erfolgt ist. Bei einem dritten Exemplare, obschon bei ihm der obere Pol auch etwas verletzt ist, glaube ich doch eine Seite des Wirbels, in dem die innersten Täfelchen dicht zusammenstossen, unter der Lupe noch erkennen zu können (Mus. Stockholm. Re No. 6).

Spuren von verschmolzenen Füsschen zeigt, deren Radiale und zugehörige Köpfchen nicht mehr vorhanden sind.

Für die Existenz einer Oeffnung am Apex dürfte danach ein genügender Beweis noch fehlen. Vielmehr weisen die Beobachtungen zunächst nur darauf hin, dass am Apex die schwächste Stelle des Körpers war, die am leichtesten zerstört wurde. Nachdem einmal hier der Zusammenschluss der Köpfchen, gleichsam der Schlussstein verloren gegangen war, wurden auch die anschliessenden Merome, da sie proximalseitig den Verband verloren hatten, gelockert und nach und nach ausgebrochen. Dagegen findet man an fast keinem der Djupviker Stücke den Nucleus dadurch verletzt, dass die Köpfchen ganz fehlen, sondern nur dadurch, dass ihre Täfelchen abgerieben oder abgewittert worden sind. Am Nucleus musste also wohl eine viel innigere Verbindung der Merome bestehen. Dem entspricht es auch, dass die Bruchstücke, die gefunden werden, ganz überwiegend Untertheile, nicht Obertheile sind. Ich konnte das an mehreren hundert Exemplaren von Ischadites bestätigen, wovon mir aus dem Stockholmer Museum allein einige 270 von Wisby, Petesvik bei Hablingbo und Westergarn vorlagen. Nur die (21) Stücke von Eksta Djupvik zeichneten sich allgemein dadurch aus, dass bei ihnen noch Unter- und Obertheil vorhanden war.

(*Unterschied von Unter- und Oberseite.*) Die untere Seite von Ischadites ist immer aus grösseren Tafeln zusammengesetzt, als die obere, bei der die Zahl der Täfelchen sehr stark vermehrt und ihre Grösse vermindert wird. Diese Vermehrung der Täfelchen auf der Oberseite rührt daher, dass die einmal vorhandene grösste Zahl von Täfelchen in einem concentrischen Kreise die Zahl der nach dem Apex laufenden Meridional- oder Spiralreihen bestimmt, dass also die in dem Untertheile[1]) neu eingeschobenen Reihen in dem Obertheile nicht wieder eliminirt werden, sondern dass hier nun auf allen concentrischen Kreisen gleich viele Täfelchen stehen (Taf. 6, Fig. 2). Wenn also beispielsweise oberhalb des äquatorialen Randes keine neue Reihe mehr eingeschoben wird, dieser Rand 20 Täfelchen im Umkreise trägt, jede Meridionalreihe aber von diesem Rande ab bis zum Apex 17 Täfelchen zählen lässt, so würde

1) Nur selten erfolgt noch auf dem Obertheile die Einschiebung einiger neuen Reihen. Vorhanden in Mus. Stockholm, Re. No. 1, 2, 20.

die ganze Oberseite von $(20 \times 17) + (20 \times 16) = 660$ Täfelchen bedeckt sein. An manchen Stücken ergiebt sich eine noch bedeutend grössere Zahl von Täfelchen.

(*Ursache der leichtern Zerstörbarkeit des obern Poles.*) Der Umstand, dass nicht einzelne Täfelchen, sondern immer ganze Reihen bis zum obern Pole hin eingeschoben werden, enthält vielleicht die Erklärung für seine leichte Zerstörbarkeit. Der untere Pol ist stets aus zwei oder drei mal 8 Täfelchen in zwei oder drei Ringen zusammengesetzt; dann erfolgen Einschiebungen und zwar rücken die neuen Interposita mit der Vergrösserung des Körpers immer weiter nach oben (Taf. 6, Fig. 1). So konnte der Nucleus und der ihm zunächst gelegene untere Theil bald in Ruhe und unveränderlich verharren, während der obere Theil, um weiter wachsen, d. h. um neue Reihen einschieben zu können, beständig eine gewisse Bewegungsfähigkeit seiner Merome bewahren musste. Für jede neue Täfelchenreihe musste sich ein Spalt bis zum Apex hin öffnen, und so allmählich sich das auch vollzogen haben mag, alle einzelnen Glieder des Obertheiles mussten sich in einem gewissen Grade gegen einander verschieben können. Die Glieder des Untertheiles waren also je zonenweise von einem gewissen Alter des Organismus an in ihrer gegenseitigen Lage fixirt und desshalb vielleicht in irgend einer Art inniger und fester mit einander verbunden, als es die Glieder des obern Theiles überhaupt werden konnten. Die Festigkeit wird alsdann vom untern zum obern Pole hin immer mehr abgenommen haben, die Zerstörbarkeit in derselben Richtung immer grösser geworden sein.

Der Bau der Merome und die Art ihrer Zusammenfügung sind, wie schon erwähnt, ganz dieselben wie bei Receptaculites. Der nach innen gerichtete, proximale Arm zeigt auch im obern Theile der Ischaditen stets zugleich nach dem Apex. Ich konnte desshalb S. 678 sagen, dass, wenn man ein Receptaculites-Bruchstück fände, bei dem die nach innen gerichteten Arme zugleich nach dem vorhandenen Pole dieses Bruchstücks hinweisen würden, dies auch den Beweis für die geschlossene Form von Receptaculites erbrächte.

Die Abbildung des von F. Römer als Receptaculites carbonarius (Leth. palaeoz. p. 291, Fig. 53) beschriebenen Specimens aus dem schle-

sischen Kohlenkalke von Rothwaltersdorf, des einzigen bisher im Carbon gefundenen Vertreters der Familie, scheint mir im Sinne unsrer Darstellung auf dem Kopfe zu stehen. Das von Römer nach unten gestellte, abgestumpfte und eingesenkte Ende mit den zahlreicher werdenden Spiralreihen und den sehr kleinen langgezogenen Täfelchen (vergl. Taf. 6, Fig. 2) kann wohl nur demjenigen Theile angehören, der nach dem obern Pole zu liegt. Dürften wir annehmen, dass die Gattungsbestimmung zutreffend ist, so wäre der Zweifel über die geschlossene Form von Receptaculites, wie uns scheint, danach wesentlich vermindert. Nach Römer's Angabe jedoch, dass die innere Höhlung eng ist, liegt nicht Receptaculites, sondern Ischadites vor.[1])

Das Auftreten der Gattung Ischadites im Carbon ist nicht mehr befremdend, nachdem ich sie auch im Ober-Devon nachgewiesen habe. Bisher war Ischadites aus dem Devon überhaupt noch nicht bekannt; aber ein Theil der früher als Receptaculites aufgeführten, ziemlich häufigen Versteinerungen im untern Ober-Devon von Stolberg bei Aachen gehört dazu (Taf. 7, Fig. 3, 4). Schlüter hat diese Formen als Sphaerospongia Vichtensis beschrieben (Zeitschr. Deut. Geol. Ges. Bd. 39. 1887, p. 17, Taf. 2, Fig. 1, 2). Die von ihm in seiner Fig. 2 mit *b* bezeichneten Kreise sind nicht Reste von Deckplatten, sondern die Querschnitte der Radialarme.

Taf. 5, Fig. 2—9 sind Abbildungen nach Dünnschliffen von Djupviker Exemplaren von Ischadites Königi *Murch.* Die Spindeln sind in diesen Präparaten im allgemeinen nur sehr undeutlich, oder überhaupt nicht mehr zu erkennen, in einzelnen Fällen aber auch noch scharf abgezeichnet (Fig. 3, 4, 5, 7). Der Kalk ist meist körnig-krystallinisch geworden. Auffällig ist die starke Einsenkung, welche die Täfelchen des Obertheiles häufig zeigen (Fig. 3, 8), und die starke Aufrichtung ihres proximalen Theiles, namentlich in Fig. 8. Von der häufigen Ueberschiebung dieses Theiles haben wir bereits S. 690 gesprochen. Ebenso S. 658 von der Ablösung der Täfelchen von ihren Trägern. In dem schon erwähnten Dünn-

---

1) Diese Vermuthung wird auch von Hinde getheilt (Geol. Soc. 1884. S. 845), allerdings aus einem andern Grunde: nämlich weil Römer angiebt, dass das obere abgebrochene Ende bis auf eine enge Oeffnung geschlossen zu sein scheine. Das hat Römer aber wohl nur aus dem engen innern Hohlraume gefolgert. Wenn dies Ende, wie wir annehmen, der Nucleus war, so war es ganz geschlossen.

schliffe Mus. Stockholm Re No. 4a sind bei 9 unter 13 Meromen die Täfelchen abgehoben, und zwar bei 5 vollständig, während sie bei 4 proximalseitig noch mit den Trägern darunter zusammenhängen.

Die Tangentialarme von Ischadites sind verhältnissmässig länger als die bei den typischen Receptaculiten. Die Lateralarme eines Täfelchens reichen mit ihren Spitzen oft bis an, oder bis über dessen zweitbenachbarte meridionale Mittellinien. Daher sitzen in Radialschnitten zwischen distalem und proximalem Arme manchmal drei, selbst vier Querschnitte von Lateralarmen: in der Mitte zwei stärkere Kreise, daneben ein oder je ein kleinerer Kreis (vergl. Fig. 10, 11 auf S. 698, 699). Der distale Arm verlängert sich vielfach so stark, dass er sich in das Köpfchen des nächsten Meroms einbohrt und davon umwachsen wird (Taf. 5, Fig. 8, 9, 3). Dementsprechend scheint oft auf den verwitterten Täfelchen wie in Taf. 6, Fig. 3 eine meridional verlaufende Spindel — es ist die distale — die Mittelpunkte zweier Täfelchen zu verbinden. Auch Hinde hat sich wie Schlüter über diese Spindeln getäuscht, indem er sie für die Arme selbst gehalten hat (Geol. Soc. 1884, p. 812 oben, Taf. 36, Fig. 1g). So musste er das entblösst liegende Spitzchen *s* (unsre Fig. 3) als zum Täfelchen *T* gehörig und als Fortsetzung des vermeintlichen Armes *v* betrachten, während in Wahrheit die Verhältnisse umgekehrt sind, und *s* zusammen mit seiner Verlängerung *v*, die von *T* überdeckt wird, die distale Spindel des oberhalb *T* liegenden Meroms bildet. In Taf. 6, Fig. 3 ist dieselbe Stelle wiedergegeben, die auch Hinde abgebildet hat. Die Lateral-Spindeln, die auf Hinde's Figur ganz fehlen, die durch die Spindeln verursachte wulstige Prägung der Täfelchen, ihre concentrischen Linien und manche andre Einzelheiten, die wir schon bei Receptaculites beschrieben haben, sind bei hinreichender Vergrösserung auch hier recht deutlich sichtbar. Bemerkenswerth ist noch die Form des in der Mitte der Figur liegenden Interpositums mit seinen leicht gekrümmten Lateral-Spindeln. Aehnlich gebogene Lateral-Spindeln kommen auch bei Receptaculites vor, z. B. in Taf. 2, Fig. 11 links unten.

Die Lateralarme befolgen das Winkelgesetz, wie wir es S. 662 für Receptaculites kennen gelernt haben, d. h. seine dextracclive Form. Aber zwei Ausnahmen habe ich bisher gefunden, in denen sinistracclive Ausbildung herrscht, bei denen also, wenn man die Täfelchen von aussen

betrachtet, die linken Lateralarme über den rechten desselben concentrischen Tafelkranzes liegen. Der erste Fall betrifft das Bruchstück eines Exemplares von Ischadites rectus *Rauff.*[1]) Es ist in Taf. 5, Fig. 9 abgebildet und ist das einzige Specimen dieser Art, das ich gesehen habe. Bei *l* und *r* sind seine Täfelchen theils fortgebrochen, theils abgewittert, bei *l* bis auf die distalen, bei *r* bis auf die proximalen Arme. Die sinistracclive Lagerung der Lateralarme ersieht man aus den nebenstehenden Fig. 8 und 9, die mit der Camera nach *l* und *r* aufgenommen worden sind. Den zweiten Fall habe ich bei einem Ischadites Königi *Murch.* (Ischadites Lindströmi *Hinde*[2]) von Petesvik auf Gotland constatirt. Regel ist auch bei diesen Vorkommnissen der Species die dextracclive Lagerung der Lateralarme, so dass der Unterschied hier jedenfalls nicht specifisch ist. Ob er es bei Ischadites rectus ist, bleibt festzustellen.



Fig. 8.

Sinistracclive Lagerung der Lateralarme bei Ischadites rectus *Rauff.* Stelle *l* der Fig. 9 in Taf. 5 in 5/1.



Fig. 9.

Stelle *r* der Fig. 9 auf Taf. 5 in 5/1.



Fig. 10.

Skizze nach einem Schnitte von Ischadites Murchisoni *Eichw. sp.* In 5/1. Unter-Silur. Lyckholm'sche Schicht (*F* 1) von Kurküll in Estland. Original im Revaler Museum.

Nicht immer liegt der distale Arme direct unter dem Täfelchen, wie das bei Receptaculites (Taf. 1, 2 etc.) der Fall ist, sondern zuweilen ist er ganz davon getrennt und ziemlich weit davon abgerückt, ebenso wie die Lateralarme (nebenstehende Fig. 10). Der Träger unter dem Täfelchen, der ein nagelkopfartiges Profil annimmt, wird hier also nicht mehr wie in Taf. 1, Fig. 4—6 von den drei Armen *d*, *l*, *l* und ihren verwachsenen seitlichen Flügeln gebildet, sondern tritt als eine besondre endständige Verdickung des Radiale auf. Eine solche Trennung sämmtlicher Arme vom Täfelchen habe ich bei mehreren Exemplaren von Ischadites Murchisoni (*Eichw.*)

1) Von Eichwald, Leth. ross. I. S. 435, Taf. 27, Fig. 8a, b, c mit Escharipora recta *Hall* verwechselt.

2) In meiner Sammlung.

*Hinde* beobachtet. Durch die ziemlich weite (bis cr. 1 mm weite) und mit Gestein ausgefüllte Lücke, die zwischen den gedrängt aneinanderliegenden Armen einerseits und den Täfelchen andererseits vorhanden ist (vergl. Fig. 10 S. 698), glaubt man in Durchschnitten nach dem ersten Eindruck zwei übereinanderliegende äussere Hüllen der Wand zu gewahren, wie in nebenstehender Figur 11. Ob diese Abweichung im Bau der Köpfchen für Ischadites Murchisoni specifisch ist, vermag ich nicht zu sagen; in zwei Exemplaren, die noch im Gestein eingeschlossen waren, herrschte sie. Die andern untersuchten Stücke hatten ihre Köpfchen verloren, wie in Taf. 7, Fig. 1, 2.

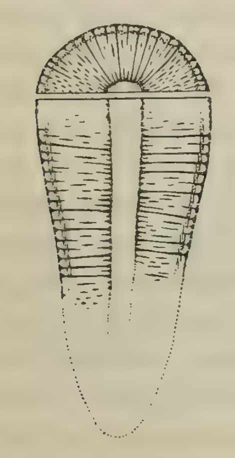


Fig. 11.

Querschnitt u. Längsschnitt von Ischadites Murchisoni *Eichw. sp.* In 1/1. Oberes Untersilur. Lyckholm'sche Schicht (*F* 1) von Kurküll in Estland. Original im Revaler Museum. Der Längsschnitt nach andern Stücken ergänzt.

(*Centrale Enden der Radialarme.*) Die Radiale von Ischadites enden innen nicht spitz, wie das bisher angenommen wurde, sondern mit Verdickungen, die den Füsschen von Receptaculites entsprechen, sich dicht aneinanderdrängen und im unverletzten und nicht verdrückten Zustande um den innern relativ kleinen Hohlraum eine geschlossene Wandfläche bilden (Taf. 6, Fig. 5, 6, 4; Taf. 7, Fig. 2; Textfigur 11). Die langen dünnen Radialarme, die nicht cylindrisch, sondern in einer mittlern Strecke noch besonders zusammengezogen sind, müssen als sehr leicht zerbrechlich gelten. Ihrer Zartheit und geringen Widerstandsfähigkeit ist es wohl zuzuschreiben, dass sie sehr häufig nur unvollständig, zerbrochen und ohne ihre centralen Enden gefunden werden. Ihre Dünne erlaubt auch, dass sie leicht gänzlich vermergelt werden, wie das z. B. theilweise, nämlich in ihren äussern Theilen in Taf. 6, Fig. 5, 6 der Fall ist, oder dass sie, wenn die Versteinerungsmasse aus Kalkspath besteht, leicht gänzlich in solchen umgewandelt werden. In beiden Fällen gehen sie, und besonders schnell ihre centralen Enden im Gesteine gleichsam unter.

In Taf. 6, Fig. 5, 6; Taf. 7, Fig. 2 sind die centralen Anschwellungen gestreckt-dütenförmig, tief und weit ausgehöhlt und hierdurch dünn-

wandig; in andern Fällen sind sie kurz kegelförmig, wie das Mundstück einer Trompete. Specifisch ist der Unterschied nicht, und die starke innere Erweiterung ist vielleicht secundär.

(*Krümmung der Radialarme.*) Die Radiale sind häufig leicht (Taf. 7, Fig. 2, 4), und wenn der Nucleus eingesenkt ist, dem Grade dieser Einsenkung entsprechend, selbst stark gekrümmt (Taf. 6, Fig. 4), weil ihre Enden auf der äussern und innern Begrenzungsfläche der Wand etwa senkrecht stehen wollen.

(*Zerstörung und Incrustation der Arme.*) In den Djupviker Ischaditen, nach denen die Zeichnungen der Taf. 5 angefertigt worden sind, ist die allmähliche Auflösung der Merome oder einzelner ihrer Glieder in dem klaren Kalkspathe, der häufig das Versteinerungsmittel im Innern der Körper bildet[1]), gut zu verfolgen. Die Arme verlieren zunächst ihre licht-gelbbraune Farbe, die sie in Dünnschliffen dieser Stücke haben, bleiben aber anfangs durch feinste, graue Staubtheilchen, die ihrem Kalke eingelagert sind, noch undeutlich unterscheidbar. Später verschwinden nach und nach mit diesem Staub ihre Conturen gänzlich, und endlich bleiben oft nur die äussern Enden der Radiale unter den Täfelchen als nagel- und nagelkopfartige Gebilde übrig, während von den Tangentialarmen und den innern Theilen der Radiale keine Spur mehr zu finden ist. In Taf. 5, Fig. 2, 8, 9 ist ein Theil der Glieder dieser Auflösung in dem umhüllenden Kalkspathe bereits anheimgefallen.

Eine andre Umänderung, auf deren Bedeutung für das Verständniss mancher Erscheinungen schon mehrfach hingewiesen worden ist, ist eine eigenthümliche Incrustation der Merome oder einzelner ihrer Glieder, besonders der Köpfchen, mit Kalkspath. Ein derartiges Beispiel ist Taf. 5, Fig. 10 abgebildet. Die Conturen der körnig-krystallinisch gewordenen Arme sind in der secundären Umhüllung vollständig verschwunden. Unerklärlich ist es mir geblieben, dass sich in diesen Verdickungen, die sich durch ihre plumpen und unregelmässigen Formen sowohl, als dadurch, dass zwischen ihnen auch noch unveränderte Glieder vorkommen, als spätere und zufällige Incrustationen zweifellos kennzeichnen, doch gewisse Eigenthümlichkeiten wiederholen. So zeigen sich Taf. 5, Fig. 10 in den

1) Das einschliessende Gestein ist ein dichter bläulichgrauer Mergelkalk.

Winkeln, in denen die verdickten Köpfchen mit den Säulchen zusammenstossen, mehr oder weniger tiefe mit Mergel erfüllte Einbuchtungen *e*. Das wiederholt sich auch an andern Exemplaren, und die diesen Einbuchtungen *e* entsprechenden Zäpfchen, Wülste, oder erhabenen Ringe zeigen sich auch an Steinkernen. So auf der den Facetten zugewandten Fläche des in Taf. 4, Fig. 2 abgebildeten Steinkernes. Diese in Taf. 4, Fig. 6 vergrössert wiedergegebene Fläche ist ja wegen der voraufgegangenen vollständigen Incrustation der Köpfchen und der nachherigen Lösung des Kalkes durch einen schmalen Zwischenraum von den Facetten getrennt (vergl. S. 688). Bei dem Stücke Taf. 4, Fig. 7 [1]), womit noch einige andre Stücke von Kuckers bei Reval übereinstimmen, darf man ebenfalls eine solche Incrustation der Köpfchen und spätere Entfernung des Kalkes voraussetzen, weil die jetzige Sculptur der Oberfläche hierdurch vollständig erklärt wird und nur hierdurch erklärt zu werden scheint.

Merkwürdigerweise greift die Incrustation niemals auf die Aussenfläche der Täfelchen über.

(*Acanthochonia = Ischadites.*) Während in Taf. 5, Fig. 10 fast die sämmtlichen incrustirten Köpfchen durch einen schmalen, mit Mergel erfüllten Spalt *L* noch von einander getrennt bleiben, wurde eine vollständige Verschmelzung der Köpfchen bei sämmtlichen untersuchten böhmischen Ischaditen (Acanthochonien) gefunden. Alle zeigen die gleiche Erscheinung, dass unter der sehr gut erhaltenen Oberfläche eine breite Zone krystallinischen Kalkspaths mit reichlicher Zwillingsbildung liegt (Taf. 5, Fig. 1). Die Köpfchen sind in dieser Zone vollständig oder bis auf wenige Reste aufgelöst, die gerade noch erkennen lassen, dass die Köpfchen normal gebaut und zusammengefügt waren. Dieses Band ist nichts andres als die erwähnte, vollständige Verschmelzung der incrustirten Köpfchen und Radialarme bis auf eine gewisse, bei den einzelnen Exemplaren wechselnde Entfernung von der Oberfläche hin. Die Kalkspathzone umschliesst häufig einen klastischen Kern, worin die Radiale noch getrennt liegen. Aber sie sind hier meist auch schon incrustirt und verdickt, wie aus ihren wechselnden Dimensionen hervorgeht. Ursprünglich waren sie gewiss durchweg ebenso schlank und dünn, wie bei den nor-

1) Receptaculites Damesi n. sp.

dischen Ischaditen. Dann bleibt aber in den übrigen Verhältnissen Ischadites gegenüber kein Unterschied mehr bestehen. Denn dass die Radiale von Acanthochonia innen spitz enden, wie es allerdings bisher nur beobachtet worden ist, dürfte nach der Berichtigung, die Ischadites in dieser Beziehung erfahren hat, nicht mehr wahrscheinlich sein, obschon ja auch Ischadites die Füsschen durch Verlust meistens eingebüsst hat. Dass aber die napfförmige Gestalt der Acanthochonien, worauf in erster Linie Hinde[1]) die Gattung begründet hat, nicht die vollständige Körperform darstellt, habe ich schon oben berührt. Schlüter[2]) hat eine krugförmige Acanthochonia gefunden und aus diesem Grunde die Selbständigkeit der Gattung bereits angezweifelt. Auch die meisten nordischen Ischaditen sind nur in Untertheilen erhalten, weil die Merome des obern Theiles wahrscheinlich leichter aus ihrem Verbande herausgelöst wurden, als diejenigen des untern (S. 695). Nur die Djupviker Stücke sind vollständig. Wenn man aber wahrnimmt, wie auch bei ihnen allen über oder unter dem äquatorialen Rande ein Bruch der linsenförmigen Körper stattgefunden hat, so muss man sagen, dass es besonders günstigen Umständen zuzuschreiben ist, dass hier Ober- und Untertheile immer vereint geblieben sind. Nur aus minder günstigen Umständen dürfte es sich erklären, dass bei den böhmischen Ischaditen (Acanthochonien) erst in einem Falle, bei Receptaculites aber noch niemals Obertheile beobachtet worden sind.

(*Incrustation der Füsschen.*) Dieselben Kalkspathincrustirungen wie an den Köpfchen kommen an den Füsschen vor, und die Art und Weise, wie die Ansätze beginnen und fortschreiten, bewirkt auch hier einige sehr merkwürdige und noch etwas dunkle Erscheinungen. Ich verweise da zunächst auf die Dünnschliffe aus einigen Russischen Receptaculiten Taf. 4, Fig. 8—12, die durch ihre kurzen, aber dünnen Säulchen den Uebergang zu Ischadites bilden[3]). Die centralen Verdickungen der Säulchen sind durch secundären Kalkansatz — wie auch durch Auflösung und Fortführung ursprünglicher Substanz — vielfach entstellt und ver-

---

1) Hinde, Geol. Soc. 1884, p. 819, 820.
2) Sitzber. Niederrh. Ges. Bonn. 1887. p. 128.
3) Receptaculites Damesi n. sp.

unstaltet. Man kann jedoch dabei nicht übersehen, mit welcher Constanz ein Gesteinstäbchen *s* zwischen je zwei Säulchen, wenn auch nicht bei jedwedem Füsschen, so doch in allen Schliffen wiederkehrend, den ganz unregelmässig geformten Kalkansatz durchbricht. Nach der Lage der Schnitte entsprechen diese Gesteinstäbchen den alternirend gestellten innern Wandporen von Receptaculites orbis (S. 684). Das zeigt neben den Dünnschliffen vornehmlich ein Präparat (nebenstehende Fig. 12), dessen beide Schnittflächen durch zwei benachbarte meridionale Säulchenreihen gelegt sind.

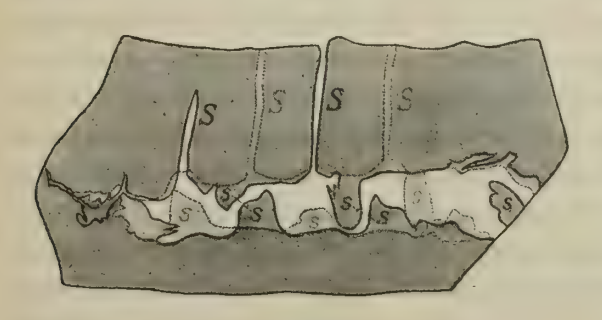


Fig. 12.

Die ausgezogene Contur bezeichnet die Grenzen der incrustirten Füsschen auf der Vorderseite des Präparates, die punktirte Contur die Grenzen des incrustirenden Kalkspaths auf der Rückseite.

*s* = Gesteinzäpfchen, die auf der Vorderseite angeschnitten sind, *s* die auf der Rückseite liegenden, nicht bis an die Vorderseite reichenden Gesteinzäpfchen.

*s*∖*s* hat den Kalkspath (weiss) nicht vollständig durchbrochen. *s* und *s* alterniren regelmässig mit den Radialen *S* und *S*.

Skizze nach einem Präparate von Receptaculites Damesi *Rff.* In 4/1. Untersilur. Jewesche Schicht (*D*) von Kuckers bei Jewe. Original im Berliner Museum.

Auf jeder der beiden Schnittflächen ist zwischen je zwei Säulchen auch ein Gesteinszäpfchen vorhanden und angeschnitten, und wie die Säulchen, so alterniren auch die Zäpfchen auf beiden Seiten des Präparates [1]). Es ist so, als ob die Gesteinsausfüllung der innern Lücke *s* mit dem wachsenden Kalkansatze gleichsam mitwächst. Die Erscheinung ist dunkel, aber sie findet doch auf Taf. 5, Fig. 10 ihr Analogon in der Incrustation der Köpfchen. Auch hier verschmelzen die incrustirten Köpfchen aus unbekannten Ursachen nicht miteinander, sondern werden durch feine nur 0,05 bis 0,3 mm breite, mit Gestein erfüllte Lücken (*L*) von einander

1) Wir sind hiermit nochmals auf die problematischen Poren der Innenwand gekommen. Man wird aber nicht behaupten können, dass die Präparate Taf. 4, Fig. 8—12 und die obenstehende Skizze ihre Ursprünglichkeit wahrscheinlicher machen; vielmehr deuten die Verhältnisse auch hier darauf hin, dass die Durchbrechung zwischen den Füsschen (vergl. besonders Fig. 9, 10) erst nachträglich stattgefunden hat.

getrennt gehalten, während andrerseits bei den sog. Acanthochonien die Verwachsung zu einer zusammenhängenden Kruste immer stattgefunden hat.

(*Merkwürdige Steinkerne im Backsteinkalke.*) Durch solche eigenthümlichen Fortwachsungen des incrustirenden Kalkes, vorwiegend nach einer Richtung hin und von ursprünglichen Formverhältnissen in gewissem Grade beeinflusst, möchte ich mir die Entstehung gewisser Steinkerne im Backsteinkalke erklären, über deren Besonderheiten sonst kein nicht entkalkter Receptaculit Aufschluss zu geben vermochte. In den hohlen Röhrchen (Taf. 6, Fig. 10—12), die von aussen nach innen diese Steinkerne durchziehen, haben die Säulchen gesessen. Sie münden in einen innern kegelförmigen Raum, worin eine gestreckt rübenförmige Axe aus Gestein sitzt. Diese Axe wird von zahlreichen Gesteinspfeilerchen getragen. Sie durchsetzen den Innenraum quer zwischen seiner Wandfläche und der Axe und entsprechen den in Taf. 4, Fig. 8—12 mit *s* bezeichneten Stäbchen, die nach der Entkalkung der betreffenden Stücke ähnliche Pfeilerchen zwischen einem Ausgusse des Centralraumes und der Wandausfüllung zwischen den Säulchen bilden müssten. Die Pfeiler in Taf. 6, Fig. 10 sind theils gerade, theils gekrümmt oder etwas wellig, auch scharf umgebogen, ihre Durchmesser wechselnd selbst innerhalb eines Pfeilerchens, der Querschnitt unregelmässig rundlich oder kantig. Fraglich bleibt es, ob der ganze Innenraum in Taf. 6, Fig. 10, 10a oder nur die axiale Spindel die ursprüngliche Körperhöhle darstellt, ob also die Incrustation der Füsschen, die wir voraussetzen dürfen, von ihren Endflächen nach innen, oder an den Säulchen entlang nach aussen fortgeschritten ist. Diese Steinkerne gehören höchst wahrscheinlich zu Ischadites Murchisoni, *Eichw. sp.* Diese Art kommt auch in ganz gestreckten Formen[1]) vor, und der innere Hohlraum, der die Längsaxe bildet, ist nicht immer so weit, wie in Taf. 7, Fig. 2, sondern öfter auch viel enger, enger noch als in Fig. 11 auf S. 699 (z. B. nur $^1/_{10}$ des Durchmessers der äussern Form). Dem untern Abschnitte der weitern Körperhöhle von Taf. 7, Fig. 2 würde der ganze Innenraum in Taf. 6, Fig. 10, 10a entsprechen,

1) Tetragonis sulcata *Eichwald* (Leth. ross. I. S. 432. Taf. 27, Fig. 5) gehört dazu.

einer ursprünglich schon sehr engen Höhle nur die axiale Gesteinsaxe darin.

Auch die Köpfchen dieser Stücke waren vor der Entkalkung incrustirt. Das wird aus der Beschaffenheit ihrer Oberflächen ersichtlich: Von den Eindrücken der Tangentialarme sind nur in Taf. 6, Fig. 12 an wenigen Stellen noch undeutliche Spuren erhalten. Auf den Rändern der vertieften rhombischen (Fig. 12) oder rundlich-rhombischen (Fig. 11) Felder dagegen, besonders in den Ecken, erheben sich Knoten, Leistchen, oder scharfe kleine Kämme von Gesteinsmaterial, die den schmalen Lücken (*l*) in Taf. 5, Fig. 10 entsprechen und in Taf. 6, Fig. 12 vielfach den Steinkern mit dem umhüllenden Gesteine verbinden. In den Zäpfchen, die in Fig. 12 auf den Ecken der Felder stehen, würde man ohne Kenntniss der eigenthümlichen Incrustationen nur Poren vermuthen können, die den äussern Täfelchenbelag durchbrochen haben. Aber solche Poren sind niemals beobachtet worden, und ich sehe deshalb in jenen Zäpfchen nur eine weitere Stütze für die gegebene Erklärung der innern Pfeilerchen. Die Axen an Sternkernen aus dem Backsteinkalke hat auch Geinitz[1]) beobachtet, und zwar, soweit ich mir hierüber aus der Beschreibung und den Abbildungen ein Urtheil bilden kann, sowohl an Steinkernen von Ischadites Murchisoni, als an solchen von Ischadites Königi. Den innern von den Pfeilerchen durchzogenen Hohlraum dieser Steinkerne hat er, der Billings'schen Anschauung folgend, als Endorhin bezeichnet. Nach den vorstehenden Untersuchungen kann jedoch eine derartige selbständige Innenschicht unter den Säulchen auch hier nicht angenommen werden.

## Polygonosphaerites, F. RÖMER.

(*Gattungsname.*) Da der Name Sphaerospongia *Pengelly* auf einer irrthümlichen Auffassung über die Natur der Receptaculitiden beruht und die Zugehörigkeit zu den Spongien ausdrückt, so ist F. Römer's[2]) Gattungsname Polygonosphaerites vorzuziehen.

---

1) Zeitschr. d. Deut. Geol. Ges. Bd. 40. 1888. S. 17.
2) F. Römer, Lethaea palaeozoica, S. 296.

(*Form.*) Die bisher bekannt gewordenen Exemplare von Polygonosphaerites zeigen sämmtlich eine mehr gestreckte oder mehr gedrungene kegel- bis birnförmige Gestalt, und diejenigen, bei denen die Täfelchen erhalten sind, charakterisiren sich äusserlich vorzüglich durch deren ausgeprägt sechsseitige Umrisse, die aus den rhombischen Umrissen, wie sie die vorigen Gattungen zeigen, durch breitere Abstumpfung der meridionalen Ecken entstehen (vergl. S. 656).

Am obern Pole geschlossene Körper sind noch nicht gefunden worden. Jedoch wird der Zusammenschluss auch bei Polygonosphaerites nicht gefehlt haben. Jedenfalls erwiesen sich alle Stücke an ihrem obern Rande verbrochen. Das von Kayser abgebildete[1]) Specimen von Polygonosphaerites tesselatus *Phill. sp.* aus dem Mitteldevon von Villmar in Nassau zeigt oben eine ebene Abstutzungsfläche; merkwürdigerweise sind die am Rande dieser Fläche sitzenden Täfelchen scharf umgeknickt, so dass die Täfelchen mit ihrem distalen Theile auf der Seitenfläche des Stückes, mit ihrem proximalen Theile auf der Abstutzung liegen. Ein eigentlicher Bruch war an ihnen nicht zu erkennen, dennoch ist wohl anzunehmen, dass ihre Umknickung erst im Gebirge erfolgt ist.

(*Stachel (?) auf den Täfelchen.*) Die hexagonalen Täfelchen sind, wie bei den vorigen Gattungen, von feinen, concentrischen Linien[2]) bedeckt. In ihrer Mitte findet man an gut erhaltenen Exemplaren häufig einen gerundeten Knopf. An Stelle dieser Knöpfe habe ich an einem interessanten Stücke von Gerolstein (Taf. 7, Fig. 8), das schon früher Gegenstand der Untersuchung[3]) war, und dessen Aussenseite mit einer Kruste von Alveolites suborbicularis überrindet ist, stachel- oder dornförmige Fortsätze gefunden, die senkrecht auf den Plättchen stehen.

---

1) Als Pasceolus tesselatus et Rathi bestimmt. Zeitschr. Deut. Geol. Ges. Bd. 27, 1875, Taf. 20, Fig. 2b; die Umknickung der Täfelchen (Fig. 2c) von Kayser nicht abgebildet.

2) Kayser, ebenda Fig. 1c; Hinde, Geol. Soc. 1884. Taf. 37, Fig. 1b; Hinde, Monogr. Brit. foss. Spong. Taf. 4, Fig. 2.

3) F. Römer (Zeitschr. Deut. Geol. Ges. Bd. 35, 1883) hat dieses Stück für den Abdruck eines Dictyophyton gehalten und dementsprechend den Kautschuk-Ausguss als die ursprüngliche Oberfläche abgebildet, Fig. a, p. 706. Die ebenfalls irrthümliche Bestimmung seiner Fig. b, p. 706, deren Original in unsrer Taf. 7, Fig. 5 nochmals zur Abbildung gelangt ist, hat Schlüter schon berichtigt (Zeitschr. Deut. Geol. Ges. 39. Bd. 1887, p. 15 vorletzter Absatz).

Ich wurde zuerst darauf aufmerksam, als ich den Rand des Stückes genauer betrachtete. Ein Dünnschliff vom Rande bestätigte die Wahrnehmung. Man sieht darin (Taf. 7, Fig. 9) einen 3 mm hohen konischen Dorn von dem Täfelchen emporragen. Ob Form und Länge dieses Anhanges seine ursprüngliche Gestalt wiedergeben, lässt sich nicht beurtheilen, weil man nicht weiss, ob der Schnitt den Stachel vollkommen median, oder etwas schräg getroffen hat. Auch scheinen Veränderungen durch Corrosion bereits stattgefunden zu haben. Dass dieser Dorn nicht etwa das Säulchen eines fremden Meroms ist, das der Aussenfläche des Polygonosphaerites zufällig aufgeklebt worden ist, ergiebt sich unzweideutig aus der Lagerung der Tangentialarme. Sind diese auch stark deformirt, so lassen doch die noch eben sichtbaren Durchschnitte der beiden Lateralarme (*l*, Taf. 7, Fig. 9) keinen Zweifel daran zu, was proximaler, was distaler Arm ist. Wollte man die Zeichnung auf den Kopf stellen und den Dorn als Säulchen eines fremden Meroms betrachten, so würde man bemerken, dass das Gesetz der Arm-Verbindung nicht mehr erfüllt würde; es würden dann die beiden lateralen Arme über den meridionalen liegen. Bei einem zweiten aus der Mitte des untern Theiles von Taf. 7, Fig. 8 herausgenommenen Schnitte wurde zwar der längere Dorn wie in Fig. 9 nicht wiedergefunden, dafür aber stark $1^1/_2$ mm lange Knöpfe, die an ihrem Grunde eingeschnürt sind (Fig. 10). Offenbar haben diese Knöpfe Umformung erlitten. Am Rande des Stückes dagegen habe ich des weitern an vier Stellen theils durch Anschleifen, theils durch Präparation mit der Nadel längere (2—3 mm lange), cr. 1 mm dicke Dornen blossgelegt. Es scheint danach, dass die erwähnten, von Kayser und Hinde abgebildeten Knöpfe auf den Täfelchen von Polygonosphaerites tesselatus nur die Rudimente längerer dorn- oder stachelartiger Anhänge seiner Aussenfläche sind. Der umrindende Alveolites hat in dem Eifler Stücke diese Anhänge vor Abbruch und Zerstörung bewahrt.

(*Tangentialarme.*) Die Anordnung der Tangentialarme weicht auch bei dieser Gattung nicht von der allgemeinen Regel ab. Das Winkelgesetz ist bisher nur in der dextraccliven Ausbildung bekannt (Taf. 7, Fig. 8, 11, 12). Da man in diesen Abbildungen von innen auf die Täfelchen blickt, so muss der rechte laterale Arm in den Zeichnungen unten, der linkslaterale dagegen oben liegen (vergl. S. 662). Die Tangentialarme

sind wie bei Ischadites relativ länger als bei Receptaculites; ebenso wachsen die Lateralarme über die Meridionalarme hinaus (Taf. 7, Fig. 11). Manchmal nehmen einzelne Lateralarme mehr diagonale Richtung an.

(*Fehlen der Radialarme.*) Radiale sind bisher bei Polygonosphaerites nicht beobachtet worden. Hierin liegt der wichtigste Unterschied gegen Ischadites und Receptaculites. Vielleicht aber waren Rudimente der Radiale vorhanden. Hinde führt knopfförmige Verdickungen an, die vom Vereinigungspunkte der Tangentialarme in das Innere vorspringen. In unsern Stücken waren solche Knöpfe nicht zu bemerken. Wenn sie vorhanden waren, so mussten die proximalen Arme (Taf. 7, Fig. 12) sich in sie eingebohrt oder sie sogar vollständig durchwachsen haben, was nach den Beobachtungen bei Ischadites (S. 697, Taf. 5, Fig. 7, 8), bei dem sich der distale Arm öfter[1]) in das benachbarte Köpfchen einbohrt, ja nicht ohne Analogie wäre.

---

## II. Systematische Stellung der Receptaculitiden.

Nach den Ergebnissen der vorstehenden Untersuchungen wird man bereits die Schwierigkeiten überblicken, die einer Einreihung der Receptaculitiden in irgend eine der bekannten Organismengruppen entgegenstehen.

Um seine Hypothese zu begründen, dass die Receptaculitiden hexactinellide Spongien wären, hat Hinde die unerlaubte und von der Mineralogie nie bestätigte Annahme gemacht, dass es wahre Umwandlungspseudomorphosen von Kalk nach Kiesel gäbe. Er meint[2]), dass die

1) Vereinzelt auch bei Receptaculites beobachtet, Taf. 3, Fig. 3.

2) Quart. Journ. Geol. Soc. 40. 1884. S. 809. The facts brought forward by Gümbel do not, however, appear to me to be sufficient to prove the organic nature of this fibrous crystalline structure. The constant direction of the radiation of the fibres may be attributed to the fact, that the vertical axis of the spicular ray is the centre from which the rays diverge to the surface of the spicule. That the faint concentric and parallel lines, noted by Gümbel in vertical and transverse sections of the spicules, may indicate their mode of growth by the addition of concentric layers seems extremely probable, but such markings might yet be shown even on the supposition that calcite had replaced silica, and so far from being directly opposed to the supposed relationship to Sponges, as Gümbel asserts they are, in fact, strong evidences in favour thereof, since the spicules alike of calcareous and siliceous sponges are built up of concentric layers deposited round a central axial canal.

feinen parallelen, bez. concentrischen Linien in Längs- und Querschnitten der Säulchen die sich umschliessenden Cylinder anzeigten, woraus alle Kieselnadeln der Hexactinelliden um einen Axenkanal herum aufgebaut sind. Diese Annahme ist unzulässig, denn niemals sind in verkalkten Kieselnadeln die ursprünglichen Structuren bewahrt worden, und niemals können sie bewahrt worden sein, weil die Umwandlung so vor sich geht, dass im verhärteten Gestein der Kiesel der Spicule weggeführt, und in die entstandenen Hohlräume dafür körnig-krystallinischer Kalk wieder abgesetzt wird. Es ist dabei gleichgültig, ob die Kieselnadeln zuerst vollständig ausgelaugt werden und hohle Röhren hinterlassen, die erst in einer spätern Periode wieder mit Kalkspath gefüllt werden, oder ob die Lösung des Kiesels und der Absatz des Kalkes mehr Hand in Hand gehen und etwa gleichzeitig geschehen. Der Process bleibt im Wesen derselbe, er ist in beiden Fällen so zu sagen eine einfache Ausfüllungs-Pseudomorphose.

Wohl kann der Axenkanal in verkalkten Kieselspiculen vorhanden sein; dann nämlich, wenn er vorher mit Sediment vollgestopft wurde. Er kann dann bei der Lösung des Kiesels als ein Gesteinsfaden unverletzt zurück bleiben, um später von Kalk wieder umschlossen zu werden, ebenso unverletzt, wie die Gesteinswand, die die Nadel umhüllt und deren Dimensionen und feinste Oberflächenverzierungen trotz des Lösungsprocesses, wodurch der Kiesel entfernt worden ist, oft auf das schärfste bewahrt hat. Aber niemals wird in solchen verkalkten Nadeln die ursprüngliche Schichtung des Kiesels überliefert, niemals ist auch bisher eine fasrige Structur des Kalkes darin beobachtet worden, stets ist sie körnig-krystallinisch. Nun wäre es ja denkbar, dass in den weiten, ausgehöhlten Gliedern der Receptaculitiden der secundäre Absatz des Kalkes nach Art der Sinterbildungen langsam und schichtweise von den Wänden aus erfolgt wäre. Man trifft solche Erfüllungen zuweilen in Spalten des Gesteines; dann aber stehen die Kryptokryställchen des Kalkes immer senkrecht auf den Flächen der Schichten. Die Structuren in den Meromen und in jedem einzelnen ihrer Glieder müssten sich also nach deren Oberflächen richten. Das ist ja aber hinsichtlich der Faserung des Kalkes durchaus nicht der Fall. Vielmehr sind in den best erhaltenen Exemplaren die Structuren in allen Gliedern gleichbleibend einsinnige: Convergenz der fiederstelligen Fasern nach aussen, nach den Täfelchen zu.

Waren die Spindeln Hohlräume in kieseligen Sklettheilen, so könnten sie in den jetzt kalkigen Meromen nur dadurch erhalten worden sein, dass sie vor der Entkieselung bereits mit einem Stoffe erfüllt wurden, der bei der Auslaugung des Kiesels unangegriffen stehen blieb. Wo in verkalkten Hexactinellidennadeln die Axenkanäle sichtbar sind, da sind sie das immer dadurch, dass sie aus dunkeln Gesteinsfäden bestehen, die sich von der klaren Kalkspathumhüllung abheben. Wir haben dagegen S. 671 gesehen, dass bei den Receptaculitiden die Spindeln der Tangentialarme aus dem relativ reinsten Kalkspathe gebildet werden, und dass noch in keinem Falle eine Verdrängung dieses Materiales durch Sediment beobachtet worden ist.[1]) Es wäre aber zu erwägen, ob nicht vor der Entkieselung in die hohlen Spindeln Kalkspath zum Absatz gelangt sein könnte. Das wäre vielleicht nicht unmöglich, da die Nadelwände der Kieselspongien in der That eine gewisse Diffusionsfähigkeit für Flüssigkeiten zu besitzen scheinen, wie ich an andrer Stelle darlegen werde. Aber der beobachtete Abschluss der „Hohlräume“ in den einzelnen Armen (S. 664, 672) entspräche wieder nicht dem Axenkreuze der hexactinelliden Spicule, weil bei diesen die Kanäle der einzelnen Arme im Kreuzungsknoten zusammenfliessen. Oeffneten sich aber die hohlen Spindeln an den Armenden nach aussen, wie es häufig bei hexactinelliden Nadeln gefunden wird, oder mündeten sie auch nur in den Centralkanal des Säulchens, so ist kein Grund anzugeben, wesshalb sie nicht gerade so gut wie dieser und wie die weit feineren Kanäle bei den Hexactinelliden mit Sediment erfüllt sein sollten. Es kommt weiter hinzu, dass die Axenstränge der Hexactine nie von vornherein dick spindelförmig sind, sondern stets nur einen äusserst feinen cylindrischen Faden bilden. Es kommen wohl nachträglich spindelförmige Erweiterungen vor, aber von solchen zufälligen Bildungen kann bei den Spindeln der Receptaculitiden nicht die Rede sein, da ihre Form ganz constant ist, und ihr grösster Durchmesser, wie wir S. 663 gesehen haben, eine bestimmte Lage im Arme einnimmt. Wollten wir aber von alledem absehen und dennoch

---

1) Wenn die Spindeln aus Eisenkies oder daraus entstandenem Brauneisen bestehen, so bedeutet das nur eine Verdrängung des Kalkes, denn dann sind auch andre Theile der Merome, z. B. die Wände der Säulchen etc. theilweise oder gänzlich verkiest, und oft auch andre Reste im Gesteine, die zweifellos ursprünglich kalkig waren, z. B. Schalenreste von Conchylien u. s. w.

annehmen, dass die Spindeln hohl waren, aber schon vor der Entkieselung mit Kalkspath ausgefüllt wurden, so bliebe es doch unerklärlich, warum der Kalk, der später an Stelle des Kiesels getreten ist, in den Armwänden eine gänzlich andre Structur besässe, als derjenige in den Spindeln und nicht mit diesem structurell und optisch gleichartig sein sollte[1]), warum er eine Structur hätte, die bei verkalkten Nadeln der Kieselspongien und überhaupt bei nachträglich mit Kalkspath wieder ausgefüllten Hohlräumen, worin Organismenreste gesessen haben, niemals angetroffen wird.

Diese Thatsachen und Erwägungen: die cylindrischen Lagen, die die Säulchen aufbauen, die einsinnig fiedrige Structur des Kalkes in den 5 Armen, der Mangel eines Beweises dafür, dass die Spindeln Hohlräume waren, und wenn sie es dennoch waren, die begründete Annahme, dass sie dann nicht mit dem Centralkanale des Säulchens in Verbindung gestanden haben, die constante Form der Spindeln und ihre stets abweichende Structur gegenüber den Armwänden, das alles schliesst schon die Annahme aus, dass es sich hier um die Verdrängung kieseliger Skelettheile von Hexactinelliden durch Calcit handeln kann.[2])

(*Der Kalk der Receptaculitiden ist ursprünglich.*) Vielmehr haben die festen Theile der Receptaculitiden schon ursprünglich aus fasrigem Kalke bestanden, und ihre innere Structur ist uns in den gut erhaltenen Exemplaren überliefert worden. Mit dieser Ueberzeugung muss aber jeder weitere Versuch fallen, die fraglichen Fossilien bei den hexactinelliden Spongien unterzubringen, denn Hexactinelliden, deren Skelet nicht aus Kiesel, sondern aus Kalk bestände, das ist nach dem heutigen Stande unsrer Kenntniss ein hölzernes Eisen.

Das enthebt mich denn auch der Mühe, auf die Beziehungen näher einzugehen, die zwischen den Receptaculitiden und den Hexactinelliden sonst bestehen sollen, die doch aber in der That nicht in dem Maasse vorhanden sind, als es von Hinde dargestellt worden ist. Ich erinnere

---

1) so dass die Spindeln ihre Grenzen gegen die Umhüllung verlieren und sich darin gleichsam auflösen müssten.

2) Die Entstehung verkieselter und mit Pseudo-Axenkanälen ausgestatteter Merome ist schon S. 673, 674 besprochen worden.

nur daran, dass die Umbildung eines einzelnen Strahles zu einem flachen rhombischen, oder sonst wie regelmässig gestalteten Täfelchen bei keiner Kieselspongie je beobachtet worden ist, denn die von Hinde[1]) angeführten plattigen Kieselkörper an der Oberfläche von Plinthosella, Ragadinia, Pholidocladia etc. sind nicht mit den Lamnulen gleichwerthige Gebilde, da bei ihnen immer mehrere Arme zu einer Scheibe verschmelzen; ebensowenig etwa die rundlichen Schildchen der Amphidisce in den Gemmulae von Tubella und Parmula[2]), weil diese Amphidisce keine hexactinen, sondern diactine Nadeln sind, bei denen nur das Ende eines Strahles, aber nicht der ganze Strahl zu einer Scheibe oder einem Schirme umgewandelt wird. Auch für die centralen, gefalteten und gewulsteten Anschwellungen der Säulchen (Füsschen) fehlt jede Analogie bei den Hexactinelliden. Ich erinnere ferner daran, dass auf der Aussenfläche keine Ostien vorhanden sind, bei Receptaculites Neptuni und mehreren andern Formen auch jedenfalls keine entsprechenden Oeffnungen auf der Innenfläche, und dass die Nähte zwischen den Täfelchen und Füsschen doch nicht ohne weiteres den Ostien gleichzusetzen sind, wenn sie auch vielleicht demselben Zwecke gedient haben, dass auch die Existenz eines Osculums sehr fraglich ist, und die Lücken zwischen den Säulchen ein Wasserkanalsystem, wie es die Hexactinelliden besitzen, nicht darstellen können. Denn diese Lücken sind nach dem innern Hohlraume, der also das Paragaster der Spongien darstellen würde, nicht weit geöffnet, sondern im Gegentheile durch die aneinander gedrängten Füsschen dicht geschlossen. Eine derartig geschlossene, undurchbrochene Wandfläche des Paragasters wäre bei den Hexactinelliden, im Besondern bei ihren einfachst gebauten Vertretern mit einschichtigem Wandgerüst, die man zur Vergleichung hier heranziehen könnte, unmöglich. Bei ihnen müssen an der Innenfläche immer genügend weite Lücken im Gerüste vorhanden sein, durch die das Entoderm zur Bildung der Geisselkammern sich in Divertikel ausstülpen kann. Diese Divertikel bilden die ableitenden Kanäle und münden mit relativ weiten Oeffnungen in das Paragaster ein.

---

1) Hinde, Geol. Soc. 1884. p. 830 letzter Absatz.

2) Vosmaer. Klass. u. Ordn. d. Thierr. 2. Bd. Porifera, p. 346, Taf. 27, Fig. 1, 2; Carter, History and classification of the known species of Spongilla. Ann. & Mag. VII. 1881. p. 96, 98.

Auf Billings Hypothese (S. 650) brauche ich nun auch nicht zurückzukommen. Sie ist überdies von Gümbel[1]) bereits vollständig widerlegt worden.

(*Receptaculitiden als Foraminiferen.*) Alle Versuche, die Receptaculitiden bei den Foraminiferen unterzubringen, zuerst die von Salter, der die Zwischenräume zwischen den Säulchen für die ursprünglich festen Theile und die Merome für Kanäle hielt, dann diejenigen von Dames und Gümbel gingen von der Annahme aus, dass Kanäle, welche die einzelnen Glieder der Wand durchziehen, wie bei den complicirter gebauten polythalamen Rhizopoden ein zusammenhängendes System bilden. Dies ist aber durchaus nicht der Fall, mögen nun die Spindeln Kanäle gewesen sein oder nicht, und ebensowenig kann von Kammern, Septen und Septalöffnungen etc., von durchbohrter oder undurchbohrter, aber zusammenhängender Schalenoberfläche die Rede sein. Bei einigen winzig kleinen Monothalamien besteht die Schale wohl aus rundlichen, viereckigen oder hexagonalen Plättchen (von Chitin oder Kiesel, was nicht sichergestellt ist), die auch mit ihren Rändern übereinandergreifen und borsten- bis stachelartige Fortsätze tragen können, ja bei der Gattung Arcella besteht die Schalenwand aus zahlreichen, hexagonalen, hohlen Prismen, die auf einer dünnern, innern Schalenschicht ruhen, und deren Anordnung ebenfalls die guillochirten Kreise der Taschenuhren hervorrufen.[2]) Mit diesen ganz äusserlichen Merkmalen sind aber auch alle Beziehungen und Aehnlichkeiten wieder erschöpft, und ich vermag sonst keinen Zusammenhang zwischen Rhizopoden und Receptaculitiden aufzufinden.

(*Receptaculitiden als Kalkalgen.*) Nicht viel besser steht es um die Vergleichung mit den Dactyloporiden, die Gümbel versucht hat. Die Dactyloporiden sind Kalkalgen (verticillate Siphoneen), bei denen um eine einzellige, gegliederte Axe quirlständige, sich mehrfach theilende Zelläste (Wirtel) angeordnet sind. Die Zellwand scheidet sowohl auf der Axe, wie auf den Wirteln eine dicke Kalkkruste ab.[3]) Zwischen den Zellästen sitzen kuglige Sporangien, die sich ebenfalls inkrustiren können.

---

1) Abh. Bayr. Akad. II. Cl. 12. Bd. S. 177—179, 200—201.

2) Bütschli, Bronn's Klass. u. Ordn. d. Thierr. 1. Bd. Protozoa, p. 20, Taf. 3, Fig. 10, 12, 13; Taf. 2, Fig. 12, 9 b, 9 c.

3) Schimper. Zittel's Hdb. Paläont. 2. Bd. p. 30.

So entstehen gegliederte, aus dichter Kalkmasse bestehende Cylinder mit einem innern (oft eingeschnürten) Hohlraum, bei denen jedes Segment eine Anzahl blasenförmiger, nach aussen meist blinder Höhlungen (Sporangien, Gümbel's Kammern) umschliessen kann und von mehr oder weniger zahlreichen, radialen Kanälen durchzogen ist, die entweder einfach sind, oder sich büschelförmig, wie die Finger einer Hand, nach aussen theilen und in zahlreichen feinen Poren an der Oberfläche der Cylinder ausmünden [1]) (Ausmündungen von Gümbel's Zwischenkanälen).

Gümbel selbst ist auf eine vergleichende Betrachtung zwischen Dactyloporiden und Receptaculitiden gar nicht näher eingegangen. Seine Ansicht über die gegenseitigen Beziehungen erfahren wir nur aus einem kurzen Satze: „Ausser der Aehnlichkeit im Kanalsystem“, sagt er [2]), „und „der dichten Beschaffenheit der Schale ist es besonders die Zusammen„setzung des Gehäuses aus einzelnen Plättchen (wie z. B. bei Thyrso„porella cancellata), welche beide Gruppen von Foraminiferen in „ihrer natürlichen Stellung einander näher bringt.“

Man kann danach wohl annehmen, dass Gümbel die hohlen Säulchen der Receptaculitiden gleichwerthig mit den primären Kanälen (einfachen Zellwirteln) erachtete, die von dem Centralraume eines jeden Segmentes ausgehen, während er in den Spindeln der Tangentialarme diejenigen Glieder erblickte, die er bei den Dactyloporiden Zwischenkanäle nannte.

Waren die Spindeln Kanäle und standen sie mit dem Centralkanale des Säulchens in Verbindung, so wäre, wie mir scheint, lediglich die Existenz von Kanälen, die sich nahe der Oberfläche verzweigen, das einzige übereinstimmende Merkmal beider Organismengruppen. Wo aber sind bei Receptaculites die sterilen Aestchen (zweiter Ordnung), die mit zahlreichen Poren an der Oberfläche ausmünden, wo die Conceptacula der Siphoneen? Man müsste denn in den Kanälen der Säulchen die sterilen Aeste, in den Spindeln der Tangentialarme etwa die Sporangien wiederfinden wollen. Einer solchen oder ähnlichen Auffassung hat, wie es scheint, auch Steinmann [3]) Ausdruck geben wollen. Er meint, dass die Deutung der rhombischen Täfelchen keine Schwierigkeiten böte, wenn

1) Gümbel. Die sog. Nulliporen etc. 2. Theil. Abh. bayer. Akad. Wiss. 11. Bd. 1874.
2) „ Receptac. Abh. bayer. Akad. Wiss. 12. Bd. 1876. p. 201.
3) Steinmann. Zur Kenntniss fossiler Kalkalgen. Neues Jhrb. Miner. etc. 1880. II, p. 138.

man die Täfelchen als Kalkabsonderungen fertiler Aestchen ansähe. Diese Auffassung liesse sich doch nur discutiren, wenn wir irgend ein ähnliches Beispiel für das Vorkommen wirklicher Täfelchen bei den Siphoneen hätten. Dies ist aber nicht der Fall, denn die in Feldchen getheilte Oberfläche mancher Siphoneen, z. B. von Thyrsoporella cancellata *Gümbel*[1]), deren rectanguläre Felder nur cr. 0,1 × 0,2 mm gross sind, lässt sich hier nicht anführen, ebenso wenig etwa die von erhabenen Leistchen begrenzten Felder bei Sycidium.[2]) Jedes dieser Felder bezeichnet allerdings auch einen einzelnen von der Axe ausgehenden verzweigten (oder unverzweigten) Ast, ist aber gleichsam nur der Querschnitt durch die Kalkincrustation, welche die Aestchen zweiter (oder erster) Ordnung umhüllt, während die Täfelchen der Receptaculitiden als besondre, selbständige Glieder eines jeden Einzelelementes aufzufassen sind.

Bei allen Siphoneen streben die Aestchen zweiter Ordnung schräg nach aussen, also nach vorwärts mit Beziehung auf die Wachsthumsrichtung der primären Wirteläste, von denen sie abzweigen. Die Tangentialarme der Receptaculitiden dagegen sind schräg nach innen gerichtet, das würde eine Verästelung der primären Wirtel (Säulchen) nach rückwärts bedeuten. Und wo fände man bei den Siphoneen ein Beispiel für die durchaus gesetzmässige und nie vermisste regelmässige Verschränkung der Tangentialarme?

Der Umstand, dass die Zwischenräume zwischen den Säulchen (oder zwischen ihren Kanälen) nicht vollständig mit Kalk ausgefüllt werden, würde keine Schwierigkeiten bei der Vergleichung mit den Siphoneen bereiten, wenn solche Lücken auch bisher nur bei der noch etwas problematischen Cylindrella silesiaca *Gümbel*[3]) beobachtet worden sind. Könnte man bei den Receptaculitiden an Kalkalgen denken, so würde

1) Abhandl. Bayer. Akad. 11. Bd. 1874, Taf. D. I. Fig. 14a.

2) Deecke. Ueber einige neuen Siphoneen. Neues Jhrb. Miner. etc. 1883. I, Taf. 1, Fig. 1, 1b.

3) Gümbel. Nulliporen. Abhandl. bayer. Akad. Wiss. 11. Bd. 1874. p. 281, Taf. D, IV; Fig. 4a—4d. Bei der Gattung Uteria (Gümb. ebenda Fig. 5a) werden nur die Zellaxe und die äussersten Spitzen der Wirtel incrustirt, so dass zwischen einem innern und einem äussern Kalkcylinder ein continuirlicher Hohlraum bleibt. Die bei Munieria baconica (Deecke, N. Jhrb. 1883, Bd. I. Taf. 1, Fig. 6, 8) vorhandenen Hohlräume entsprechen auch nicht den Lücken zwischen den Säulchen, da es nicht Lücken zwischen den Aesten der einzelnen Wirtel sind, sondern zwischen den einzelnen übereinander gereihten Segmenten, aus denen die Kalkalge sich zusammensetzt.

vielleicht die oft unförmliche Gestalt und die wechselnde Dicke der Säulchen innerhalb derselben Art verständlicher sein und ebenso würden die merkwürdigen Incrustationen (S. 702 etc.) vielleicht eine glattere Erklärung finden. Aber vor der Hand besteht hier die grosse Schwierigkeit, dass überall, wo diese Incrustationen beobachtet worden sind, namentlich also bei allen sogenannten Acanthochonien, die innere Structur der Merome fast gänzlich oder gänzlich zerstört worden ist, und die einzelnen Glieder in der körnig-krystallinischen Masse aufgelöst erscheinen, so dass man diese Bildungen nur spätern Absätzen und Umwandlungen zuschreiben kann.

Eine fernere wesentliche, bis jetzt nicht auszugleichende Differenz besteht in Gestalt, Grösse und in der ganz verschiedenen Art des Wachsthums dieser und jener Organismen. Die kalkabsondernden Siphoneen sind fast immer langgestreckte, einfache oder verzweigte dünne Röhrchen[1]), deren Durchmesser nur in wenigen Arten 5—6 mm erreicht, oder wenig darüber hinausgeht. Ebenso ist eine Länge der einzelnen Segmente von 12—15 mm schon eine aussergewöhnliche, dagegen sinken beide Maasse bis auf 0,1 mm und noch weiter herunter. Nun stelle man diesen winzigen Verhältnissen die z. Th. dagegen ungeheuren Dimensionen der Receptaculitiden gegenüber. Jene wachsen fadenförmig in die Länge, diese kuglig auch stark in die Dicke; jene durch verticale Uebereinanderlagerung einzelner Segmente mit Quirlästen, diese durch Einschiebung neuer Spiralreihen von Täfelchen. Denn die geschlossenen Formen der Ischaditen etwa mit den einzelnen Segmenten der Siphoneen in Parallele zu bringen, ist schon deswegen unmöglich, weil bei den Receptaculitiden wenigstens ein Pol zweifellos geschlossen war, die einzelnen Segmente der Siphoneen aber zum Durchtritt der Zellaxe naturgemäss oben und unten durchbohrt sind, und nur das jüngste Glied, die Vegetationsspitze davon eine Ausnahme machen und oben geschlossen sein kann.

Wir mussten auf eine vergleichende Betrachtung der Receptaculitiden und kalkabsondernden Siphoneen etwas näher eingehen, weil ihre Verwandtschaft — wenn auch stets ohne tiefere Begründung — wiederholt[2])

1) Acetabularia ist schirmförmig auf dünnem Stiele.

2) Gümbel, Steinmann, Deecke.

ausgesprochen worden ist. Jedoch wird man zugeben müssen, dass diese Auffassung noch nicht gerechtfertigt erscheint.

Auch in andern und höhern Organismengruppen suche ich vergeblich nach Beziehungen zu den Receptaculitiden, und ich möchte deshalb vorziehen, zunächst keinen Vermuthungen Raum zu geben, die sich nicht besser begründen liessen, als die früher ausgesprochenen. Es scheint, als ob die Zwischenglieder noch zu entdecken wären, welche die Receptaculitiden mit andern bekannten Geschöpfen verbinden und Licht über ihre systematische Stellung verbreiten werden. Im Augenblicke müssen wir uns wohl mit einem „Ignoramus" bescheiden und können nur sagen, dass die Receptaculitiden eine eigenthümliche Familie bilden, die nach ihrem Absterben weder in den frühern Perioden noch in der Jetztwelt ähnlich organisirte Vertreter zurückgelassen hat.

(*Resultate.*) Die Resultate der vorstehenden Untersuchungen lassen sich in Kürze dahin zusammenfassen:

1) Die Receptaculitiden (Receptaculites, Leptopoterion, Ischadites, Polygonosphaerites) sind freie, kuglige bis birnförmige, ringsum geschlossene Körper mit centralem Hohlraume, deren kalkige, einzeilige Wand aus gleichgestalteten Einzelelementen zusammengesetzt wird, die quincunxial angeordnet sind und spirale Reihen bilden. Die schüsselförmigen Exemplare sind nur Untertheile oder Bruchstücke davon.

2) Jedes Einzelelement (Merom) besteht aus 6 Gliedern: einem äussern Täfelchen (Lamnul), dessen Grundform der Rhombus ist, vier darunter liegenden und sich kreuzenden Tangentialarmen, und einem Radialarm (Säulchen oder Columell), der, auf dem Täfelchen, resp. den vier Tangentialarmen etwa senkrecht stehend, nach innen ragt.

3) Die Oberfläche lässt einen obern und untern Pol unterscheiden. Der untere Pol oder Nucleus, der den Wachsthumsanfang bezeichnet, beginnt mit einem Kranze von 8 (oder 4) Täfelchen, der obere Pol oder Apex wird durch eine wechselnde, aber stets sehr grosse Zahl von Täfelchen geschlossen. Die Einschiebung neuer Täfelchenreihen erfolgt durch besonders gestaltete Plättchen (Interposita).

4) Die vier Tangentialarme verlaufen unter den Diagonalen der Täfelchen. Zwei von ihnen liegen immer in einer Meridionalebene; der nach dem untern Pol hinweisende Arm (distaler Arm) ist zugleich schräg nach aussen gerichtet, und von wenigen Ausnahmen abgesehen, mit der Innenfläche des Täfelchens verwachsen, der nach dem obern Pole zeigende (proximale) Arm dagegen verläuft schräg nach innen und ist von dem Täfelchen stets ganz getrennt. Die beiden andern Tangentialarme (Lateralarme) liegen in einer zweiten Radialebene, die nicht ganz senkrecht die erste durchschneidet. Vielmehr durchkreuzt sie diese in der Regel so, dass, wenn man das Täfelchen von aussen betrachtet, der zwischen dem distalen und dem rechten lateralen Arme liegende Neigungswinkel dieser Ebenen stumpf ist. Es kann aber auch der umgekehrte Fall vorkommen, dass dieser Winkel spitz ist. Es giebt also zwei Ausbildungsformen dieses „Winkelgesetzes“ der Lateralarme, die aber an demselben Individuum niemals zusammen erscheinen.

5) Dem Winkelgesetze entsprechend erfolgt die Zusammenfügung der Einzelelemente in eigenthümlicher Weise:

Bezeichnet:

II<br>
III  IV<br>
I

die alternirende Stellung von 4 Meromen, von denen I dem untern, II dem obern Pole zugewandt ist, so verbinden sich die 4 nach dem Mittelpunkte der Figur gerichteten Tangentialarme dieser 4 Merome in der Weise, dass das Ende des rechten Lateralarmes von III und dasjenige des linken von IV sich zwischen den distalen Arm von II, der am meisten nach aussen, gewöhnlich dicht unter dem Täfelchen liegt, und den proximalen von I, der am meisten nach innen gerückt ist, zwischenschieben. Aber während sich die Enden des distalen und proximalen Armes in einer Meridionalebene übereinander befinden, liegen diejenigen der Lateralarme in einer Tangentialebene nebeneinander und zwar ist in der Regel der rechtslaterale Arm von III — die Täfelchen stets von aussen betrachtet — über dem linkslateralen von IV gelegen (dextracclive Lagerung). In einigen Fällen ist aber auch das umgekehrte Verhalten beobachtet, wobei der rechtslaterale Arm von III unter dem linkslateralen von IV liegt (sinistracclive Lagerung). Beide Lagerungsweisen

treten nur getrennt auf; entweder herrscht an einem Individuum ausschliesslich die eine, oder die andre.

6) Der Radialarm ist der Länge nach von einem Kanale durchzogen. Die Tangentialarme umschliessen spindelförmige Körper, die bisher für die Ausfüllungen von Kanälen angesehen wurden, die aber wahrscheinlich schon ursprünglich solide Axen waren. Jedoch war ihre Natur und Bedeutung noch nicht sicher festzustellen. Sie bestehen aus hellem Kalkspathe, der zuweilen (bei der besten Erhaltung?) eine längsstreifige Structur zeigt. Die Linien convergiren dann in den centralen Spitzen der Spindeln.

7) Diese Spindeln erweisen sich bei der Verwitterung gewöhnlich am schwersten zerstörbar und bleiben häufig isolirt zurück, während die sie umschliessenden Armhüllen ganz aufgelöst und verschwunden sein können.

8) Das sehr wechselnde Aussehen der Oberflächen der theilweise oder vollständig entkalkten Stücke wird nicht durch eine verschiedene Zusammenfügung oder wechselnde Ausbildung der Arme hervorgebracht, sondern lediglich durch den verschiedenen Grad der Verwitterung oder Abreibung, wobei der distale Arm, welcher der Oberfläche zunächst liegt, zuerst, der proximale zuletzt zerstört wird.

9) Die Radialarme (Säulchen) schwellen an ihrem centralen Ende konisch an bis zur gegenseitigen Berührung und faltenbildenden Stauchung ihrer Ränder. Diese Verdickungen der Radiale (Säulchen), die zusammen eine geschlossene Wandfläche um den innern Hohlraum bilden, tragen weder auf ihrer centralen Endfläche ein besondres Plättchen, wie die Köpfchen, noch sind sie von irgend welchen Querkanälen durchzogen.

10) Die innere Wandfläche ist undurchbohrt. Die zuerst von Billings beobachteten Porenkanäle darin sind secundärer Entstehung.

11) Die Gattung Leptopoterion hat wie Receptaculites eine relativ dünne Wand mit kurzen Radialen bei sehr weitem innerm Hohlraume. Die Lamnule sind winzig klein und dabei ohne Grössenunterschiede, an den Polen wie auf den Seitentheilen des Körpers etwa gleich gross. Dementsprechend die Dimensionen der andern Meromglieder.

12) Die Gattung Ischadites unterscheidet sich von Receptaculites durch die schlankere Form aller Arme, besonders die grössere

Länge der Radiale, wodurch die Wand viel dicker, der innere Hohlraum viel enger wird. Bau der Merome und Art ihrer Zusammenfügung sind dieselben, wie bei Receptaculites. Die Radiale von Ischadites enden innen nicht spitz, sondern wie bei Receptaculites mit konischen Verdickungen, die sich wie dort zu einer dichten, innern Wandfläche aneinander legen. Eine Oeffnung am obern Pole ist in einigen Fällen nachweislich nicht vorhanden gewesen, und es ist deshalb möglich, dass sie überhaupt fehlte.

13) Die Gattung Acanthochonia ist identisch mit Ischadites. Ischadites reicht bis in's Oberdevon, (Carbon?).

14) Bei der Gattung Polygonosphaerites fehlt von den 6 Gliedern des Meroms das Radiale. Die Tangentialarme folgen in Bau und Zusammenfügung demselben Gesetze, wie es bei den vorigen Gattungen gilt. Bei einem Specimen trugen die Täfelchen auf ihrer Aussenseite je einen senkrechten Dorn. Die auf der Mitte der Täfelchen sonst gewöhnlich vorhandenen Knöpfe sind vielleicht die Rudimente solcher ursprünglich längern Anhänge, die leicht abgebrochen wurden.

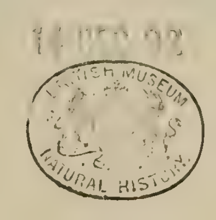
15) Die Receptaculitiden sind nicht kieselige, sondern kalkige Organismen gewesen, und die gut erhaltenen Exemplare haben ihr ursprüngliches Material und dessen Structur bewahrt. Die verkieselten Stücke sind pseudomorph.

16) Die Receptaculitiden können desshalb nicht zu den hexactinelliden Spongien gehören. Aber auch zu den Foraminiferen und Dactyloporiden oder verticillaten Siphoneen zeigen sie keine Beziehungen. Ihre systematische Stellung bleibt noch ganz zweifelhaft.

# Inhalt.

Die besprochenen oder berührten Arten sind folgende:

| | | |
|---|---|---|
| **Receptaculites Neptuni,** *Defrance* | S. 654—684 | Taf. 1, Fig. 1—12; Taf. 2, Fig. 1—11. |
| **Receptaculites crassiparies,** *Rauff* | „ 665, 682 | Taf. 2, Fig. 12; Taf. 3, Fig. 1—6. |
| **Receptaculites orbis,** *Eichwald* | „ 674, 684 | Taf. 3, Fig. 7—10a; Taf. 4, Fig. 1—6. |
| (= Receptaculites occidentalis *Salter*) | | |
| **Receptaculites Damesi,** *Rauff* | „ 701, 702, 703 | Taf. 4, Fig. 7—12. |
| (Receptaculites carbonarius *F. Römer*, siehe Ischadites carb. | | |
| **Leptopoterion mammiferum,** *Ulrich* | „ 691 | |
| **Ischadites Koenigi,** *Murchison* | „ 692—705 | Taf. 5, Fig. 1—10; Taf. 6, Fig. 1—8. |
| (= Ischadites Lindströmi, *Hinde*) | „ 698 | Taf. 6, Fig. 4. |
| (= Acanthochonia Barrandei, *Hinde*) | „ 678, 701 | Taf. 5, Fig. 1; Taf. 6, Fig. 1, 7, 8. |
| **Ischadites Murchisoni,** *Eichwald* | „ 698, 704 | Taf. 6, Fig. 10—12; Taf. 7, Fig. 1, 2. |
| (= Tetragonis sulcata, *Eichwald*) | „ 704 | |
| Ischadites (Lepidolites) dickhauti (*E. O. Ulrich*) *Rauff* | „ 649 | |
| **Ischadites rectus,** *Rauff* | „ 698 | Taf. 6, Fig. 9. |
| (= Escharipora recta (Hall) bei *Eichwald*) | | |
| **Ischadites carbonarius,** *F. Römer sp.* | „ 696 | |
| **Ischadites Vichtensis** (*Schlüter*) *Rauff* | „ 696 | Taf. 7, Fig. 3, 4. |
| (= Sphaerospongia Vichtensis *Schlüter*) | | |
| **Polygonosphaerites tesselatus,** *Phillips sp.* | „ 705—708 | Taf. 7, Fig. 5—12. |
| (= Sphaerospongia tesselata, *Phill. sp.*) | | |
| (= Pasceolus tesselatus et Rathi, *Kayser*) | „ 706 | |
| (= Dictyophyton Gerolsteinense, *F. Römer* | „ 706 | |





## Tafel 1.

### Fig. 1—12. Receptaculites Neptuni *Defr.* Mittel-Devon. Eifel.

Fig. 1. Bruchstück eines sehr grossen Exemplares. Mittel-Devon von Gondelsheim, im westlichen Ausheben der Prümer Mulde. Wahrscheinlich untere Calceola-Schichten. Original in meiner Sammlung.

Fig. 2. Aussenfläche vom Untertheile eines Wandstückes mit verschiedenen Verwitterungsbildern auf den Täfelchen. Die Partie um den Nucleus leicht eingesenkt. Gerolstein. Original in meiner Sammlung.

Fig. 3. Innenfläche des vorigen Stückes. Die Merome des Bruchrandes herauspräparirt.

Fig. 4. Köpfchen eines isolirten Meroms von innen gesehen. In 5/1. *d* = Distal, *pr* = Proximal, *l l* = Laterale, *sp* = Spindel, *f* = seitliche Flügel der Arme *d*, *l*, *l*, die zum Träger des Täfelchens verschmelzen. Auf den Lateralen eine zarte Querstreifung, die wahrscheinlich auch dem distalen Arme nicht fehlt; vergl. Taf. 2, Fig. 12.

Fig. 4a. Diagramm, um die schiefwinklige Durchkreuzung der Arme zu zeigen.

Fig. 5. Das in Fig. 4 abgebildete Merom von der Seite gesehen. *d*, *pr*, *l* wie in Fig. 4. *t* = Täfelchen, *v* = proximale Verdickung unter dem Täfelchen = seitliche Flügel der Lateralarme, *n* = Nabel zur Verzapfung der Meridionalarme, *S* = Säulchen.

Fig. 6. Dasselbe Merom in meridionaler Richtung gesehen, den proximalen Arm gegen den Beschauer gewandt. Die Buchstaben wie in Fig. 5. Auf *l* die zarten Querstreifen.

Fig. 7. Abgebrochenes Säulchen mit dem Füsschen. In 5/1.

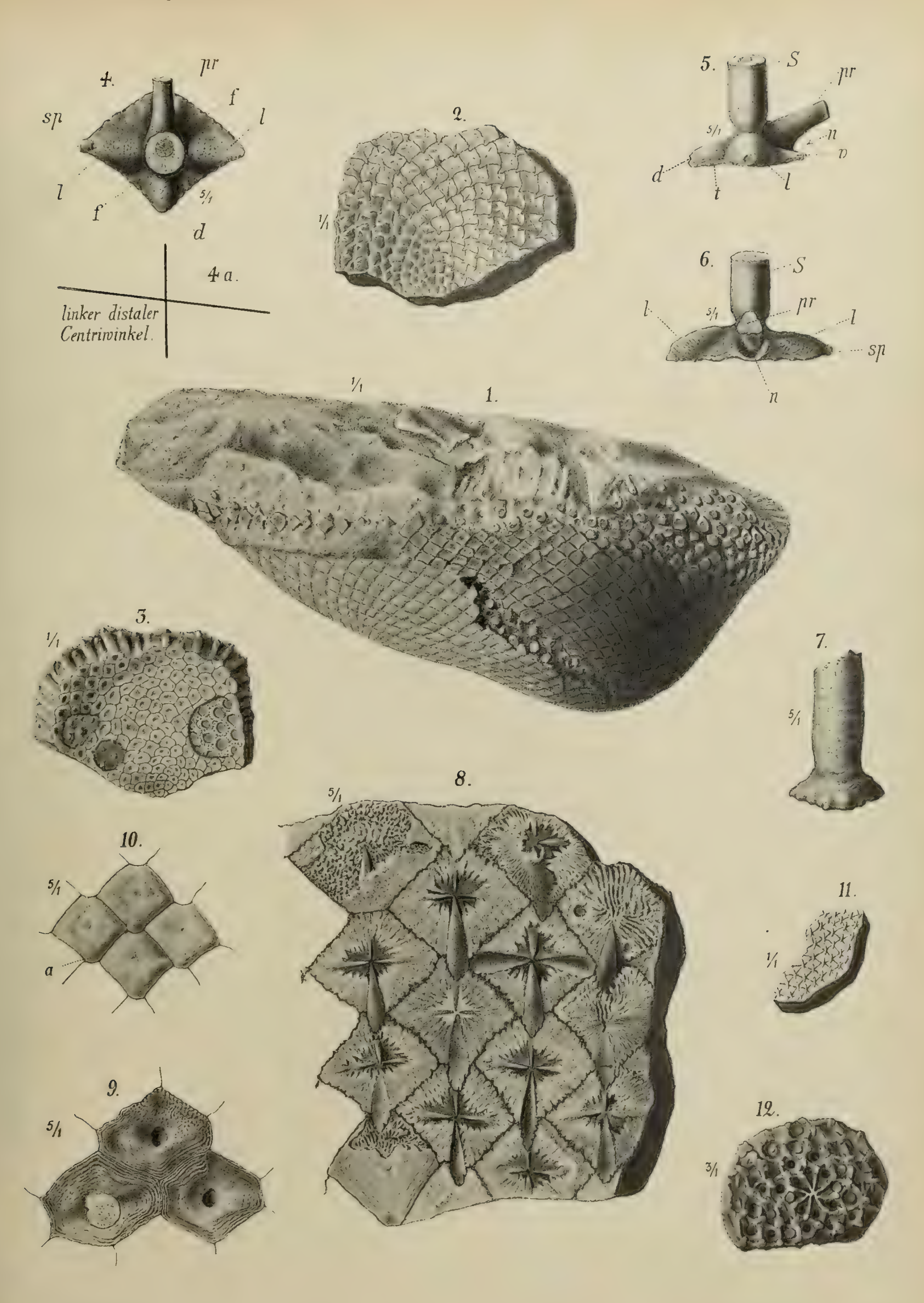
Fig. 8. Ein Theil der angewitterten Oberfläche von Fig. 2 in 5/1.

Fig. 9. Die centralen Endflächen dreier Füsschen aus Fig. 3 in 5/1.

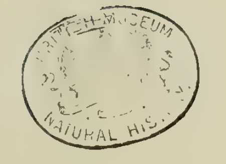
Fig. 10. 4 Täfelchen mit gut erhaltener Oberfläche in 5/1. Gees bei Gerolstein. Original in meiner Sammlung.

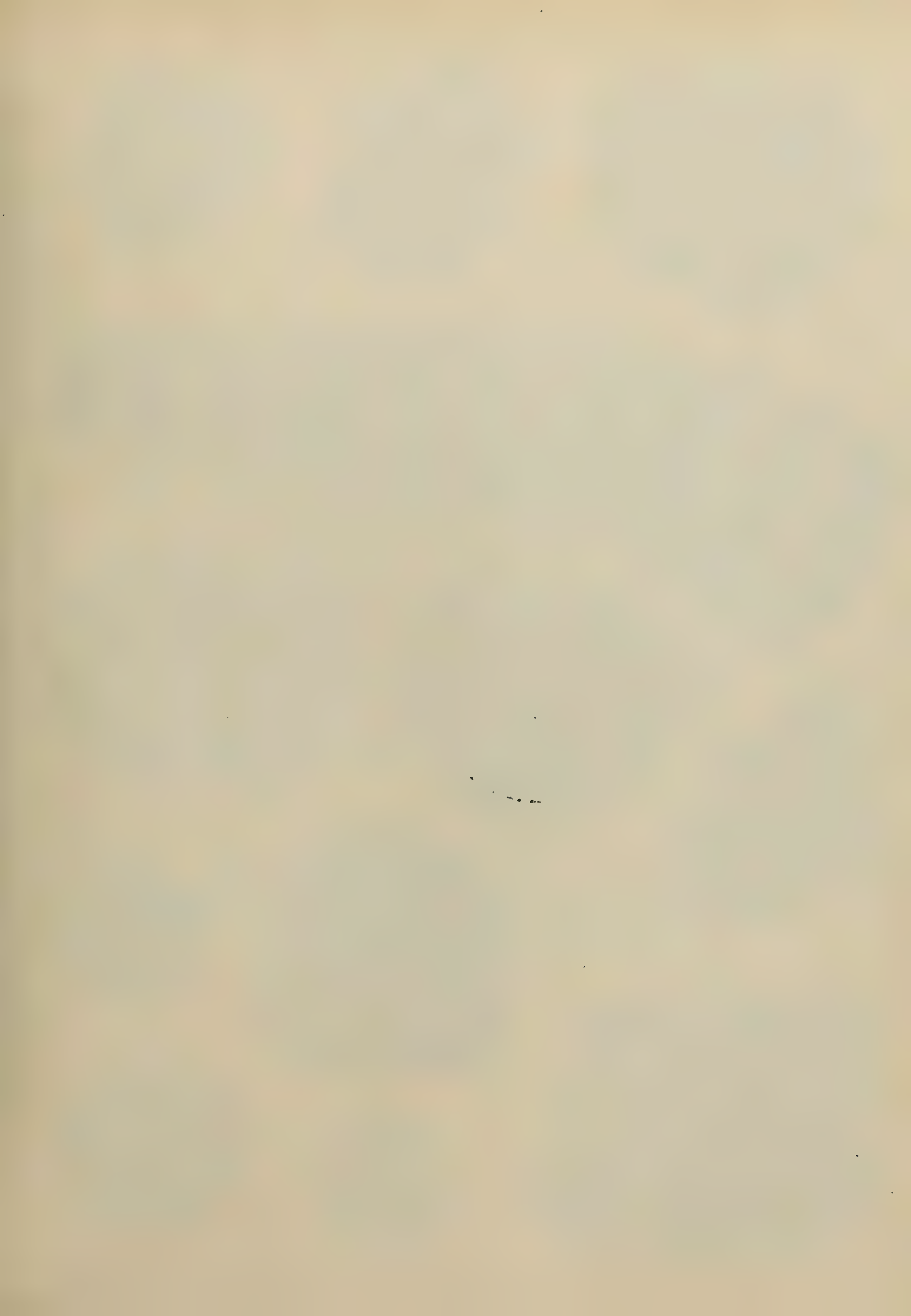
Fig. 11. Verwitterte Oberfläche (aus der Nähe des untern Poles), auf der neben den Täfelchen-Rändern die distalen Spindeln erhalten sind. In 1/1. Gees bei Gerolstein. Original in meiner Sammlung.

Fig. 12. Nucleus mit den 8 lanzettförmigen, innersten Täfelchen. Die Köpfchen bis auf Reste der distalen und lateralen Spindeln herausgewittert. In 5/1. Gees bei Gerolstein. Original in meiner Sammlung.


4.
pr
f
sp
l
l
f
5/1
d
4 a.
linker distaler
Centriwinkel.
2.
1/1
5.
S
pr
5/1
n
v
d
t
l
6.
S
pr
l
5/1
l
sp
n
1/1
1.
3.
1/1
7.
5/1
8.
5/1
10.
5/1
a
11.
1/1
9.
5/1
12.
3/1

Rose gez.





## Tafel 2.

**Fig. 1—11. Receptaculites Neptuni *Defr.* Mittel-Devon. Eifel.**

Fig. 1, 2, 3. Geätzte Täfelchen. In 5/1. Fig. 1 leicht geätzt, Fig. 2 stärker, in Fig. 3 die Köpfchen so weit herausgelöst, dass nur noch der Kalk der proximalen Arme (*pr*) erhalten ist. *l* die Bettchen, worin die Lateralarme gelegen haben. Der dunkle Kalkspath in Fig. 3 (Fig. 2) mit strahlig-krystallinischer Structur um die Kanalausfüllungen der Säulchen. Die hellen Radien sind die Grenzen von Kalkspathindividuen, keine radialen Kanälchen. Gees bei Gerolstein. Original in meiner Sammlung.

Fig. 4. Meridionaler Radialschnitt durch ein Wandstück. Dünnschliff in 5/1, so geschnitten, dass die meridionalen Diagonalen der Täfelchen in dem Schliffe liegen. *d* = Distal, *pr* = Proximal, *ll* = Laterale (oder deren Spindeln), *spl* = Lateral-Spindel am Centrum dicht unter dem Täfelchen. *u* = Unterschiebung des Täfelchens unter das distal benachbarte Plättchen. Gerolstein. Original in meiner Sammlung.

Fig. 5. Tangentialschnitt durch die Köpfchen, dicht unter der Oberfläche. Dünnschliff in 5/1. Die distale Spindel hier wie in allen übrigen Figuren, mit Ausnahme von Fig. 12 nach dem Unterrande der Zeichnung gerichtet. Gerolstein. Original im Berliner Museum.

Fig. 6. Querschnitt durch die Füsschen, dicht über den centralen Endflächen. Dünnschliff in 5/1. Von demselben Stücke wie Fig. 5.

Fig. 7. Angeätzte Endflächen der Füsschen (von Taf. 1, Fig. 3), zeigt wie die mehr rhombischen Umrisse der Endflächen in sechseckige Querschnitte der Füsschen übergehen.

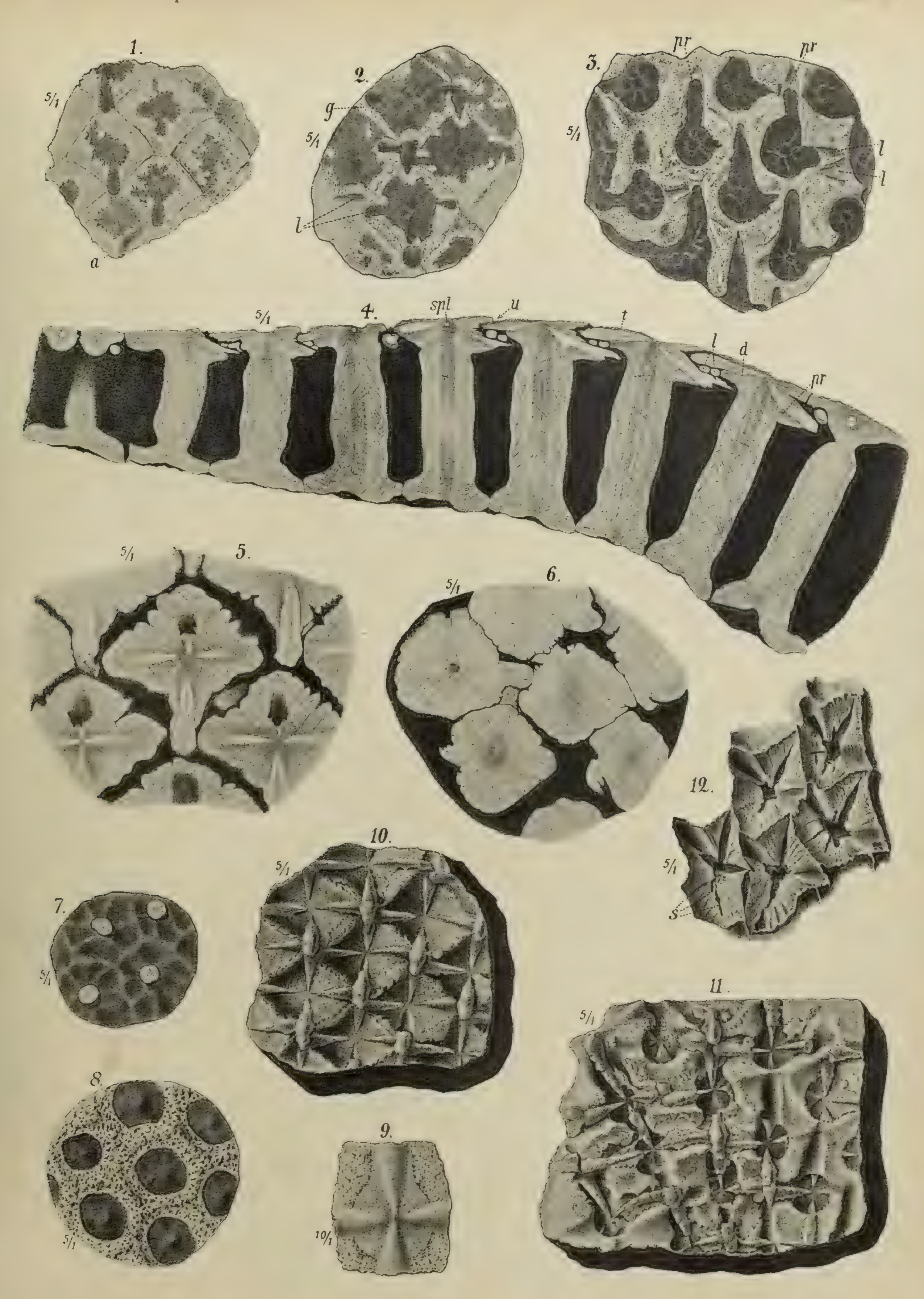
Fig. 8. Ausgeätzte Füsschen (von Taf. 1, Fig. 3); der stehengebliebene Mergel sechseckige Felder umschliessend, in derem Grunde die dunkeln rundlichen Säulchen.

Fig. 9. Angeätzte Spindeln auf verwitterter Oberfläche. In 10/1. Gees bei Gerolstein.

Fig. 10, 11. Aussenfläche in der Weise verwittert, dass nur die Spindeln isolirt zurückgeblieben sind. In Fig. 10 noch Reste der Täfelchen mit den zackig-gekräuselten Nähten. Fig. 11 stärker verwittert, zeigt deutlich die Rinnen, worin die die Spindeln umhüllenden Tangentialarme eingebettet waren. In 5/1. Gees bei Gerolstein. Original in meiner Sammlung.

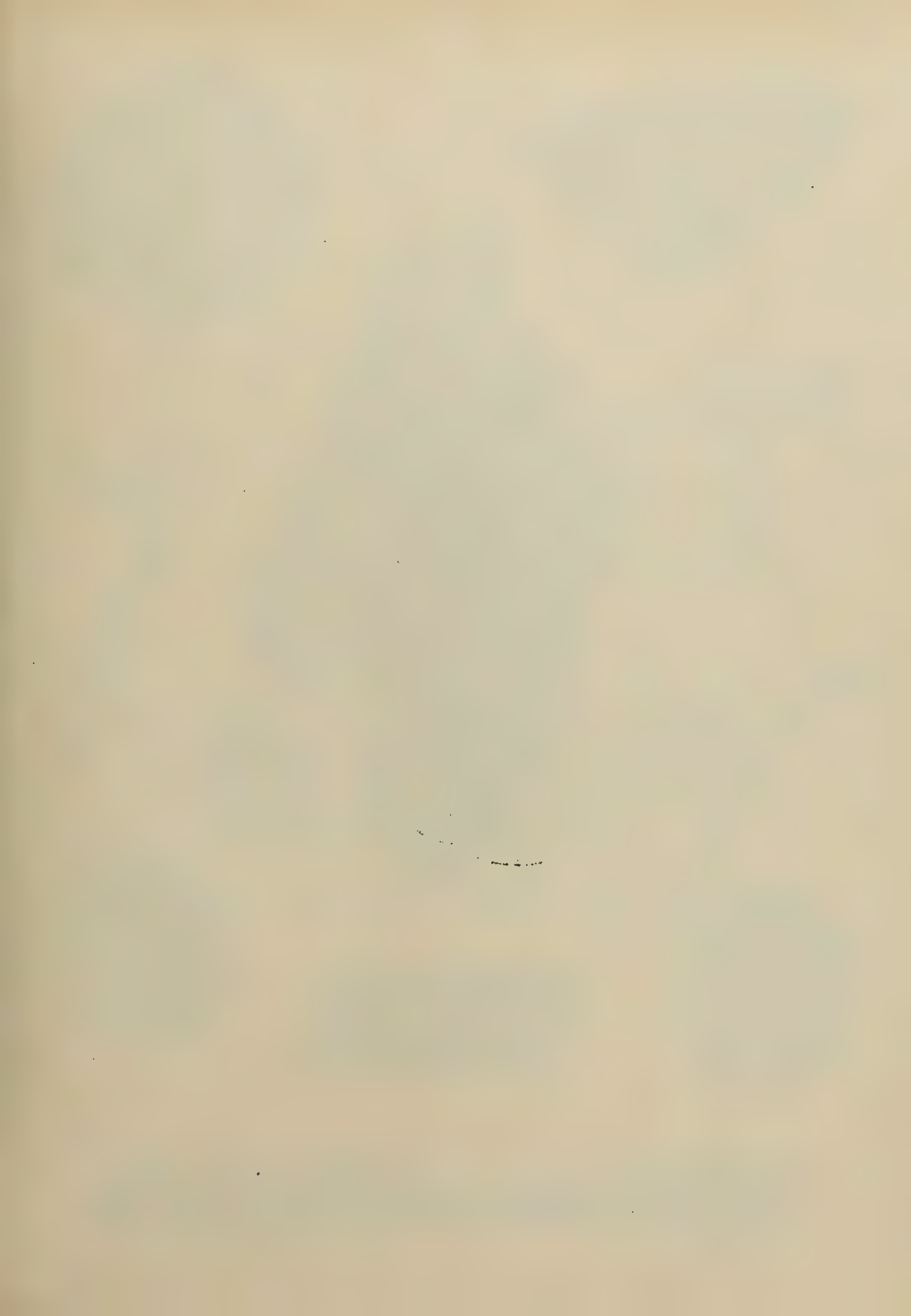
**Fig. 12. Receptaculites crassiparies, n. sp. Ober-Devon von Oberkunzendorf in Schlesien.**

Abdruck herausgelaugter Köpfchen in einem stark verdrückten Specimen. In 5/1. Die Proximalarme sind in dieser Figur nach links oben gerichtet. *s* = aufgerissene Schlitze im Grunde der Abdrücke. Auf den Seitenflächen dieser die radialen Falten scharf abgeprägt. In den beiden rechts oben liegenden Köpfchen Reste der Nahtfurche unter dem Täfelchen, und in den Abdrücken der Distalarme eine zarte Querstreifung wie in Taf. 1, Fig. 4 auf den Lateralarmen. Original im Berliner Museum.


1.
5/1
a
2.
g
5/1
l
3.
pr
pr
5/1
l
l
4.
5/1
spl
u
t
l
d
pr
5.
5/1
6.
5/1
12.
5/1
s
7.
5/1
10.
5/1
11.
5/1
8.
5/1
9.
10/1

Rose gez.


NATURAL HISTORY.



## Tafel 3.

**Fig. 1—6. Receptaculites crassiparies, n. sp. Ober-Devon von Oberkunzendorf in Schlesien.**

Fig. 1. Stark verquetschtes und zerrissenes Stück, das ursprünglich birnförmig gewesen zu sein scheint. Original im Göttinger Museum.

Fig. 2. Merom mit fiederstreifiger Zeichnung in dem dicken Säulchen, von Stelle C des Stückes Fig. 1. Nach Dünnschliff in 5/1.

Fig. 3. Merome mit schlanken Säulchen, von Stelle B des Stückes Fig. 1. Der proximale Arm des linken Meroms tief in das Radial des rechten Meroms eingebohrt. Nach Dünnschliff in 5/1.

Fig. 4. Sehr dünnes Radial von Stelle A des Stückes Fig. 1 mit verdickten Füsschen und fiederstrahliger Zeichnung darin. Nach Dünnschliff in 20/1.

Fig. 5. Anordnung der Täfelchen im Nucleus des Stückes Fig. 1, mit nur 4 Centralplättchen. $i$ = Interposita. In 3/1.

Fig. 6. Senkrechter Schnitt durch den untern Pol, zeigt die grosse Wandstärke an diesem. Etwas verdrückt. In 1/1. Original im Berliner Museum.

**Fig. 7—10. Receptaculites orbis *Eichwald*. Unter-Silur.**

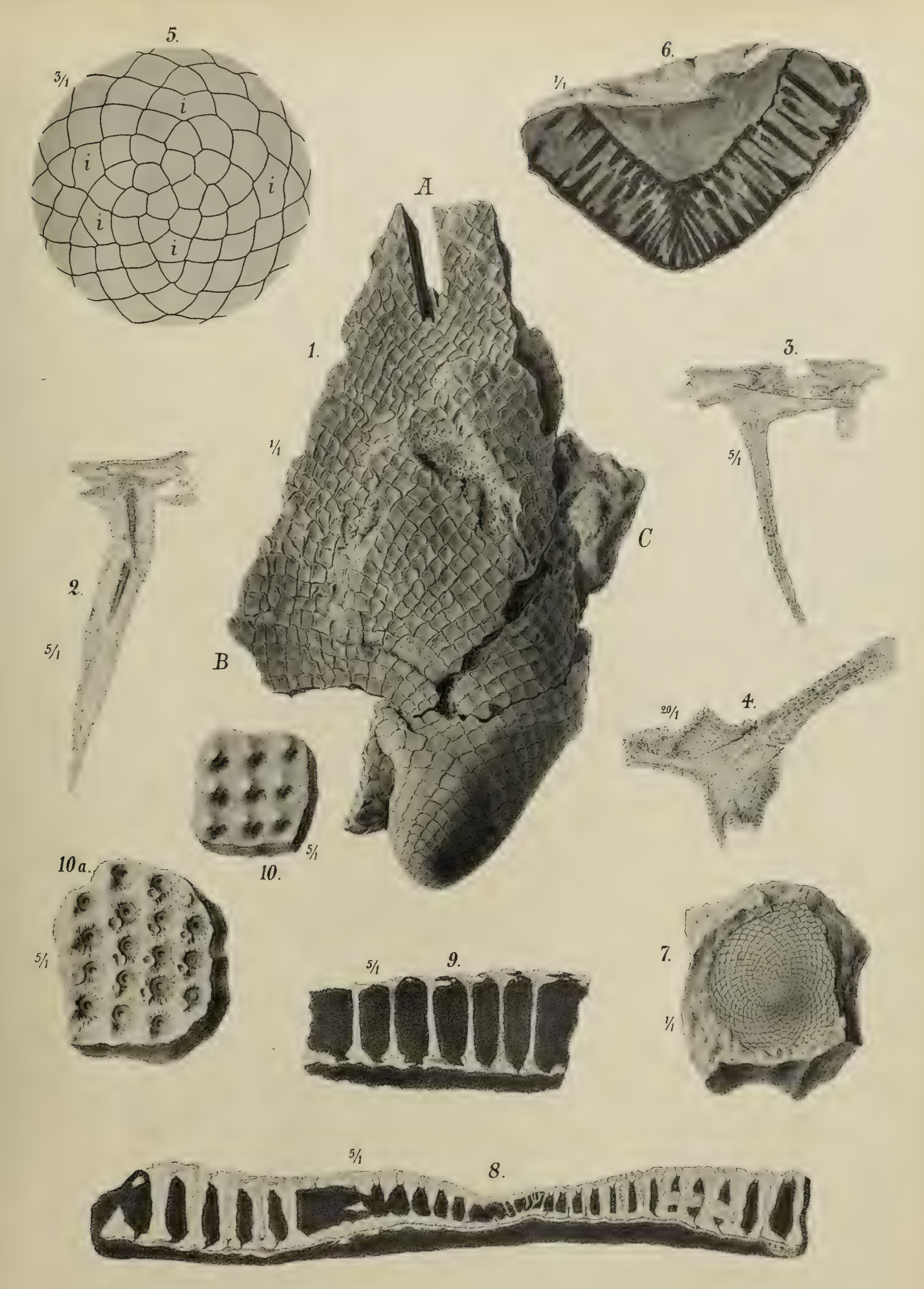
Fig. 7. Untertheil. Aus glaukonitischem Kalkstein. In 1/1. Oeland. Original im Stockholmer Museum. Re No. 292.

Fig. 8. Meridionaler Radialschnitt durch ein Specimen mit dicken Säulchen, den untern Pol in der Mitte einschliessend (Unterseite in der Zeichnung nach oben gestellt). Dünnschliff in 5/1. Die unter der centralen Innenfläche (untere Begrenzung der Figur) liegende Kalklamelle gehört nicht zum Receptaculiten, sondern wird von undeutlichen Resten einer Stromatopore gebildet. Oeland. Original im Stockholmer Museum. Re No. 293a.

Fig. 9. Schnitt wie in Fig. 8 durch ein Specimen mit schlanken Säulchen. Dünnschliff in 5/1. Silur-Geschiebe von Czerwinsk in Westpreussen (wahrscheinlich baltischen Ursprungs). Original in der Sammlung der Berliner Berg-Akademie.

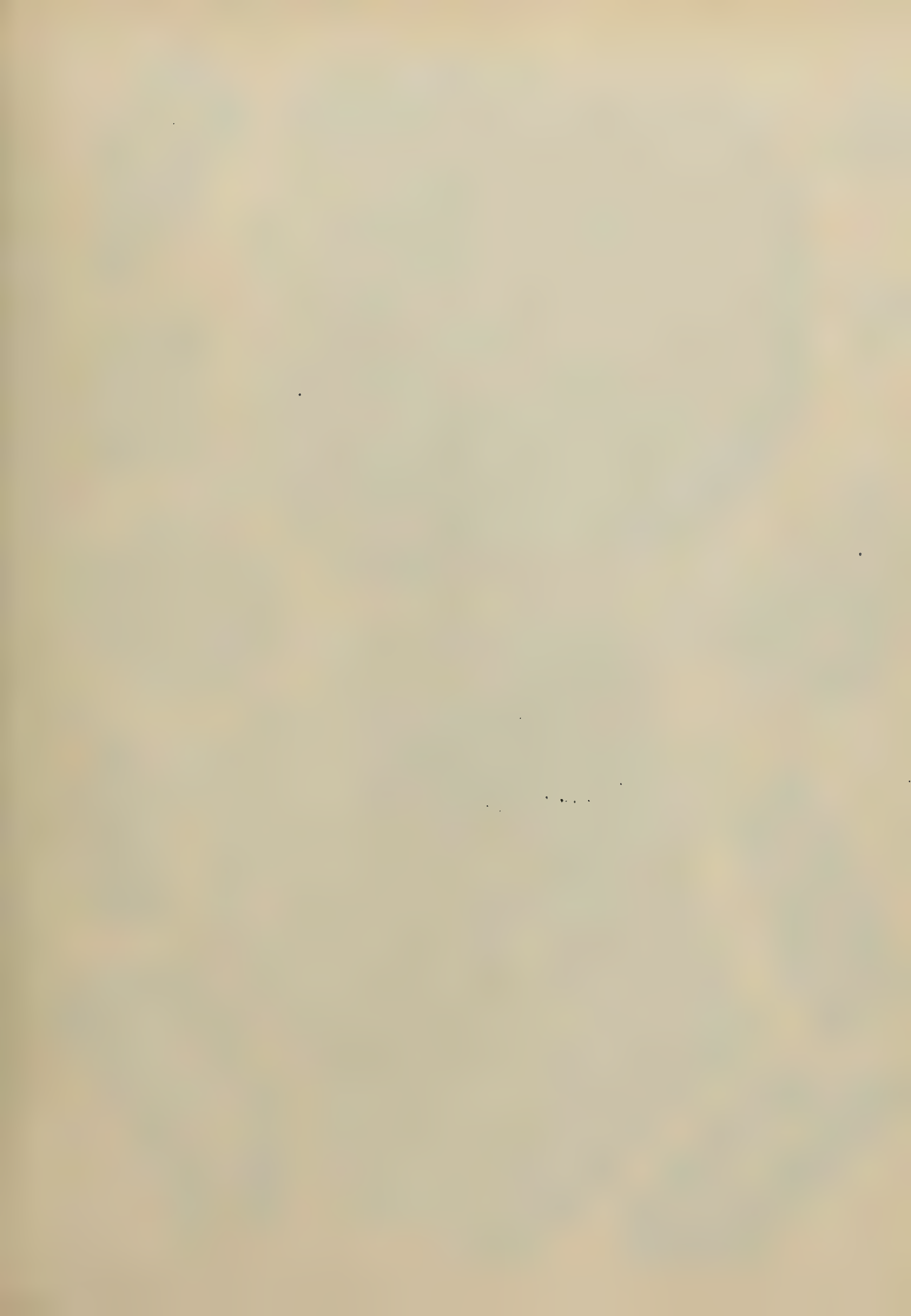
Fig. 10. Die von ihren zugehörigen Säulchen abgerissenen Füsschen von aussen, also von den Köpfchen aus, nicht von dem centralen Hohlraume aus gesehen. In 5/1. Erhabene Knöpfchen = Säulchen; die daneben liegenden Löcher = Poren der innern Wandfläche. Reval. Original im Berliner Museum.

Fig. 10a. Gegendruck des Stückes Fig. 10. Die flachen Vertiefungen auf den den Poren der Fig. 10 entsprechenden Gesteinszäpfchen hier sind nur in Folge der Zerreissung des Gesteines entstanden.




Rauff & Rose gez.


NATURAL HISTORY.



## Tafel 4.

**Fig. 1—6. Receptaculites orbis *Eichwald.* Unter-Silur.**

Fig. 1. Die Wand eines grossen tellerförmigen Exemplares (Bruchstückes) ist hier über den Füsschen in der Weise zerrissen, dass die Säulchen in dem abgebildeten Stücke, die Füsschen in dem Gegendrucke liegen. Wir sehen also in Fig. 1 von innen her auf die Querschnitte der Säulchen über den Füsschen. An einigen Stellen sind die Merome jedoch unzerrissen geblieben, so dass man an diesen (eine Partie in dem linken, eine in dem rechten Theile) auf die rhombischen Endflächen der Füsschen blickt. Diluviales Silur-Geschiebe von Alt-Wehlau bei Wehlau in Ost-Preussen. Original im Provinzial-Museum zu Königsberg.

Fig. 2. Backstein-Kalk-Geschiebe von Wartin in Pommern. Original im Berliner Museum.

Fig. 3. Die rhombischen Facetten der Fig. 2 in 5/1.

Fig. 4. Kautschuk-Abdruck der Facetten von Fig. 2 in 1/1.

Fig. 5. Die Facetten des Kautschuk-Abdruckes in 5/1.

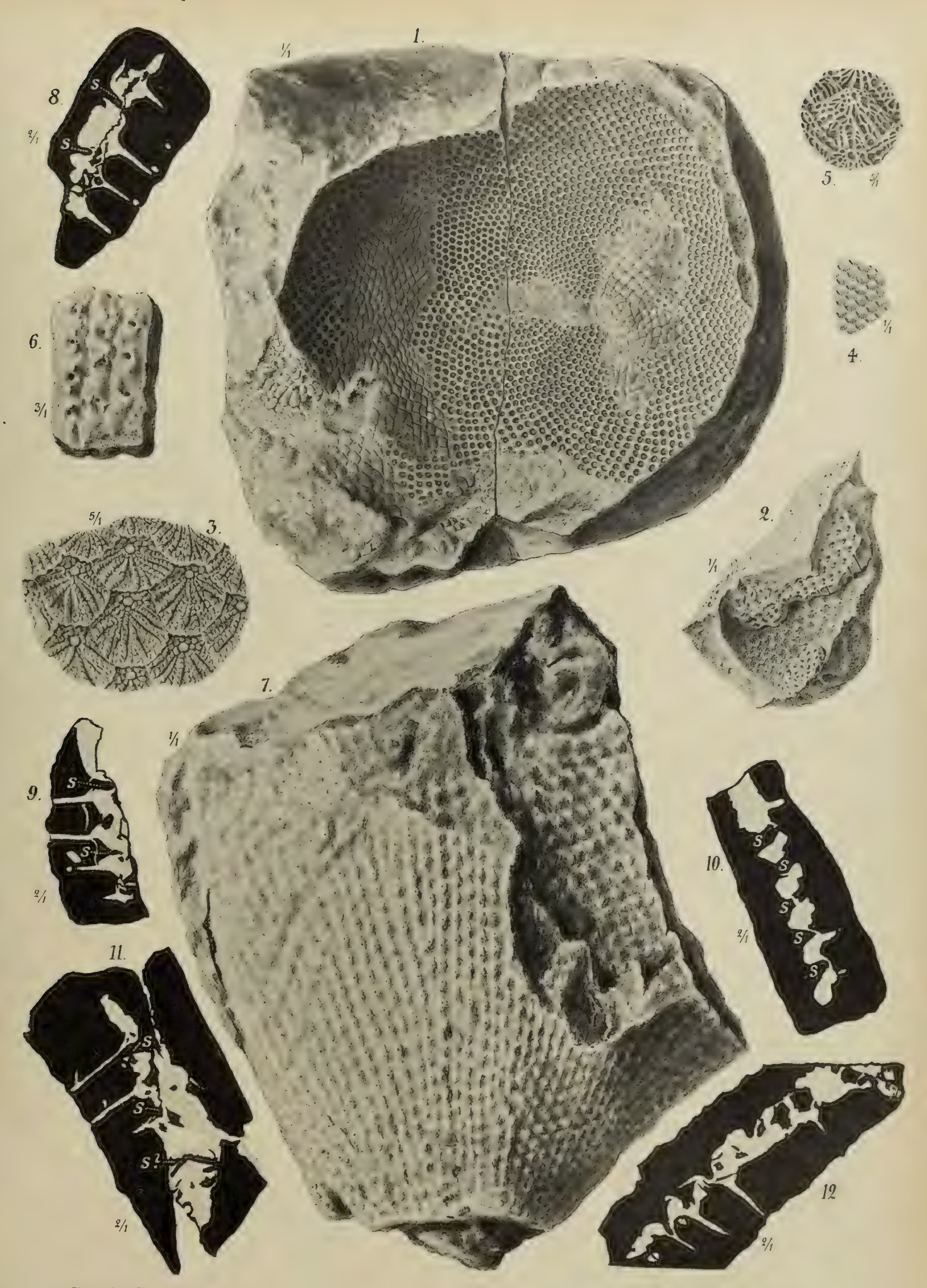
Fig. 6. Ein Stück der vom Beschauer abgewandten, den Facetten zu liegenden Fläche des von Röhren (Säulchen) durchzogenen Wandstückes (Steinkernes der Wand) der Fig. 2 in 3/1.

**Fig. 7—12. Receptaculites Damesi n. sp. Unter-Silur von Kuckers bei Jewe. Jewe'sche Schicht (D). Estland.**

Fig. 7. Bruchstück eines grossen kegelförmigen Exemplares. Die Köpfchen vollständig abgewittert, so dass nur noch die Querschnitte der dünnen Radiale die Oberfläche charakterisiren. Original im Berliner Museum.

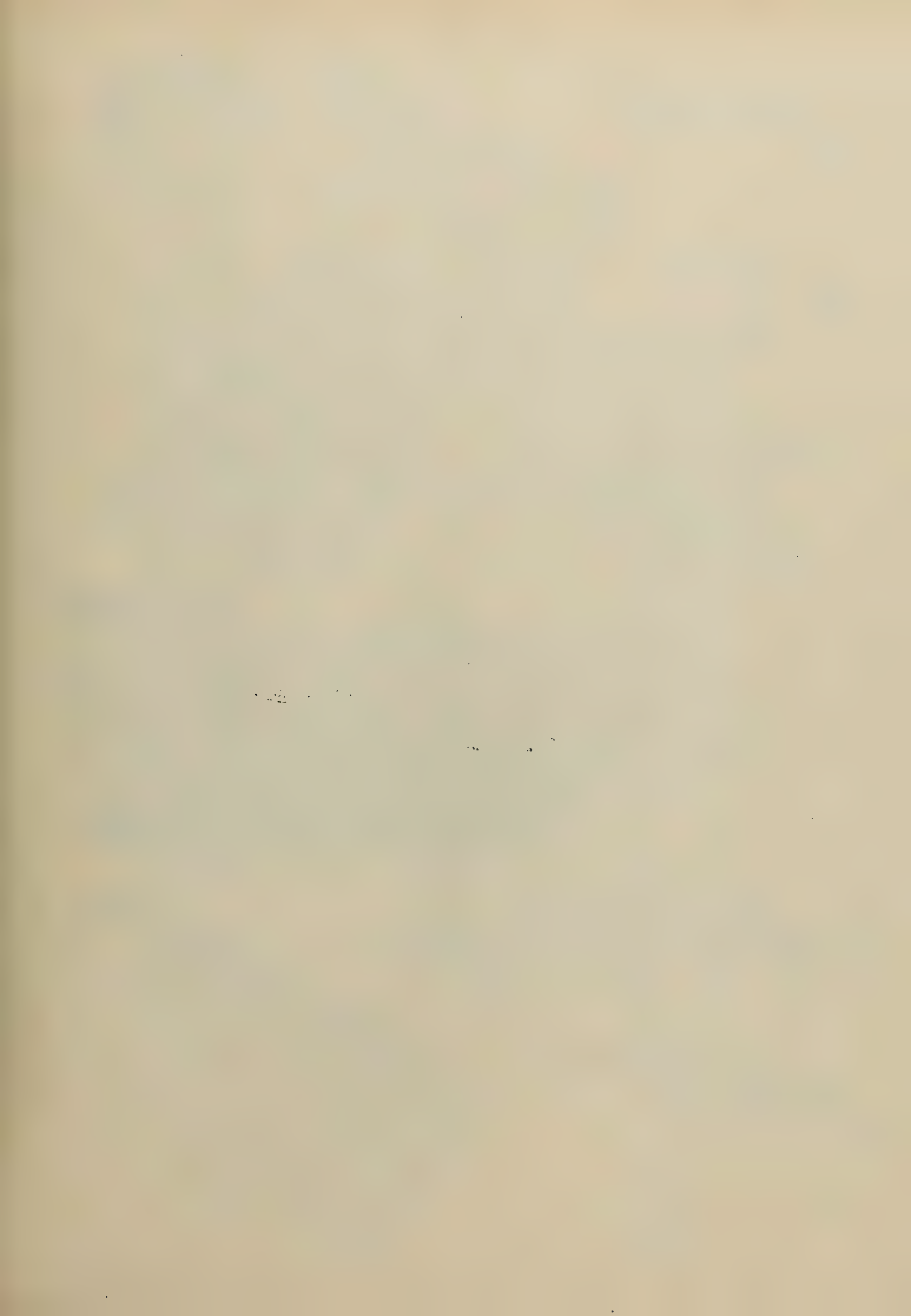
Fig. 8—12. Radiale Dünnschliffe durch die Säulchen, um die secundären Kalk-Incrustationen der Füsschen mit den regelmässigen Durchbrechungen (s) zu erläutern. In 2/1. Originale im Berliner Museum.

---




Rauff & Rose gez.





## Tafel 5.

**Fig. 1—10. Ischadites Königi *Murchison*. Ober-Silur.**

Fig. 1. Isch. Kön. = Acanthochonia Barrandei *Hinde*. Meridionaler Radialschnitt. Dünnschliff in 10/1. Im obern Theile des Schliffes die breite Kalkincrustation, welche die Köpfchen vollständig eingehüllt und das den Körper zuerst ausfüllende Sediment fast ganz verdrängt (verkalkt) hat. In der hier abgebildeten Stelle noch Reste der Merome zu erkennen — rechts und links orientiren besonders die Querschnitte einiger Lateralarme; meist jedoch sind alle unter den Täfelchen liegenden Glieder vollständig in der Incrustation verschwunden. Unter dem äussern Kalkbande das Gestein mit unzähligen Schalenresten erfüllt, darin einige eingeschwemmte, deformirte Köpfchen und ein längerer Radialarm in seiner ursprünglichen Lage. Bubovice in Böhmen. Etage E 2. Original im Münchener Museum.

Fig. 2. Drei Merome aus dem obern Theile eines 15 mm breiten Exemplares von Djupvik auf Gotland. Die Täfelchen überschoben, ganz oder theilweise abgelöst und durch dunkeln Mergel von ihrem Träger getrennt. Proximalarm nur am rechtsliegenden Merom erhalten. Enden der Arme abgebrochen oder im Kalkspathe aufgelöst. Querschnitte der Lateralarme deutlich. Dünnschliff in 20/1. Original im Stockholmer Museum.

Fig. 3. Zwei Merome vom aequatorialen Rande eines linsenförmigen Specimens von 30 mm Durchmesser, in 20/1. Die Spindeln z. Th. noch deutlich. Der distale Arm des rechts liegenden Meroms in das andre Köpfchen hineingeschoben. Djupvik auf Gotland. Original im Stockholmer Museum.

Fig. 4. Das linksliegende Merom der Fig. 3 in 36/1.

Fig. 5. Merom aus dem untern Theile desselben Stückes mit stark verdicktem Proximalarm und deutlicher Spindel darin. Auf der Mitte des Täfelchens ein gerundetes Knöpfchen. Dünnschliff in 20/1. Original im Stockholmer Museum.

Fig. 6. Merom aus dem obern Theile desselben Stückes. Schliff nicht meridional, sondern seitlich vom Radialarm geschnitten, daher der grosse Querschnitt der Lateralspindel. In 20/1. Original im Stockholmer Museum.

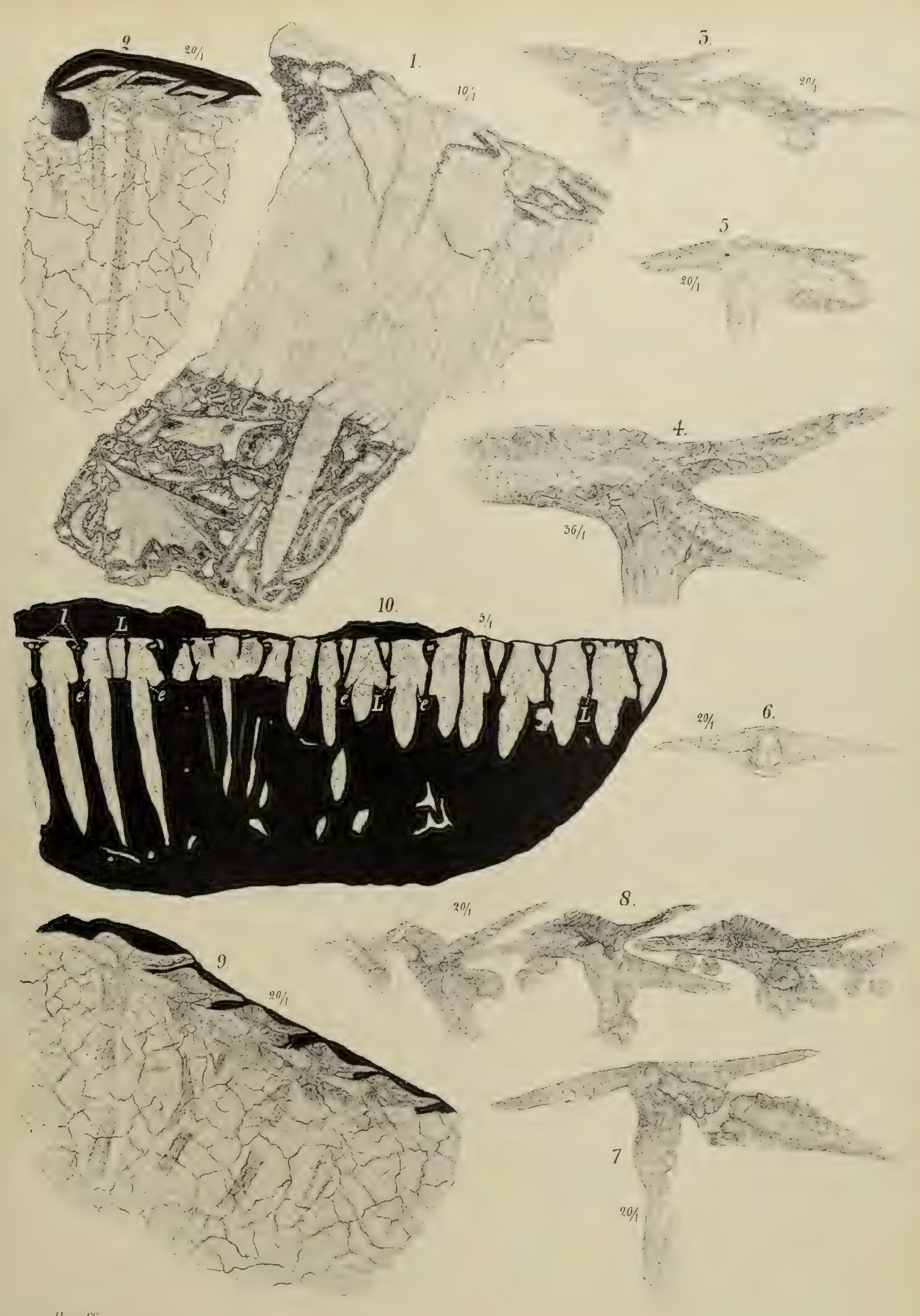
Fig. 7. Abweichende Form eines Meroms aus dem untern Theile desselben Stückes. Der lange proximale Arm am Säulchen stark zusammengezogen; letzteres unter dem Köpfchen auch abgeschnürt. Proximale Spindel noch nicht verschwunden. Dünnschliff in 20/1.

Fig. 8. Vier Merome im Verbande, etwas über dem aequatorialen Rande desselben Stückes. Linke Seite stark überschoben. Der am rechten Rande der Figur liegende distale Arm tief in das nebenliegende Merom eingebohrt. Original im Stockholmer Museum.

Fig. 9. Schnitt aus dem obern Theile eines linsenförmigen Exemplares von 18 mm Durchmesser. Die Täfelchen stark unterschoben. Proximale Arme bis auf schwache Andeutungen in dem umhüllenden Kalkspathe als Versteinerungsmittel ganz aufgelöst; distale Arme noch erkennbar, z. Th. tief in die benachbarten Merome eingebohrt. Djupvik auf Gotland. Original im Stockholmer Museum.

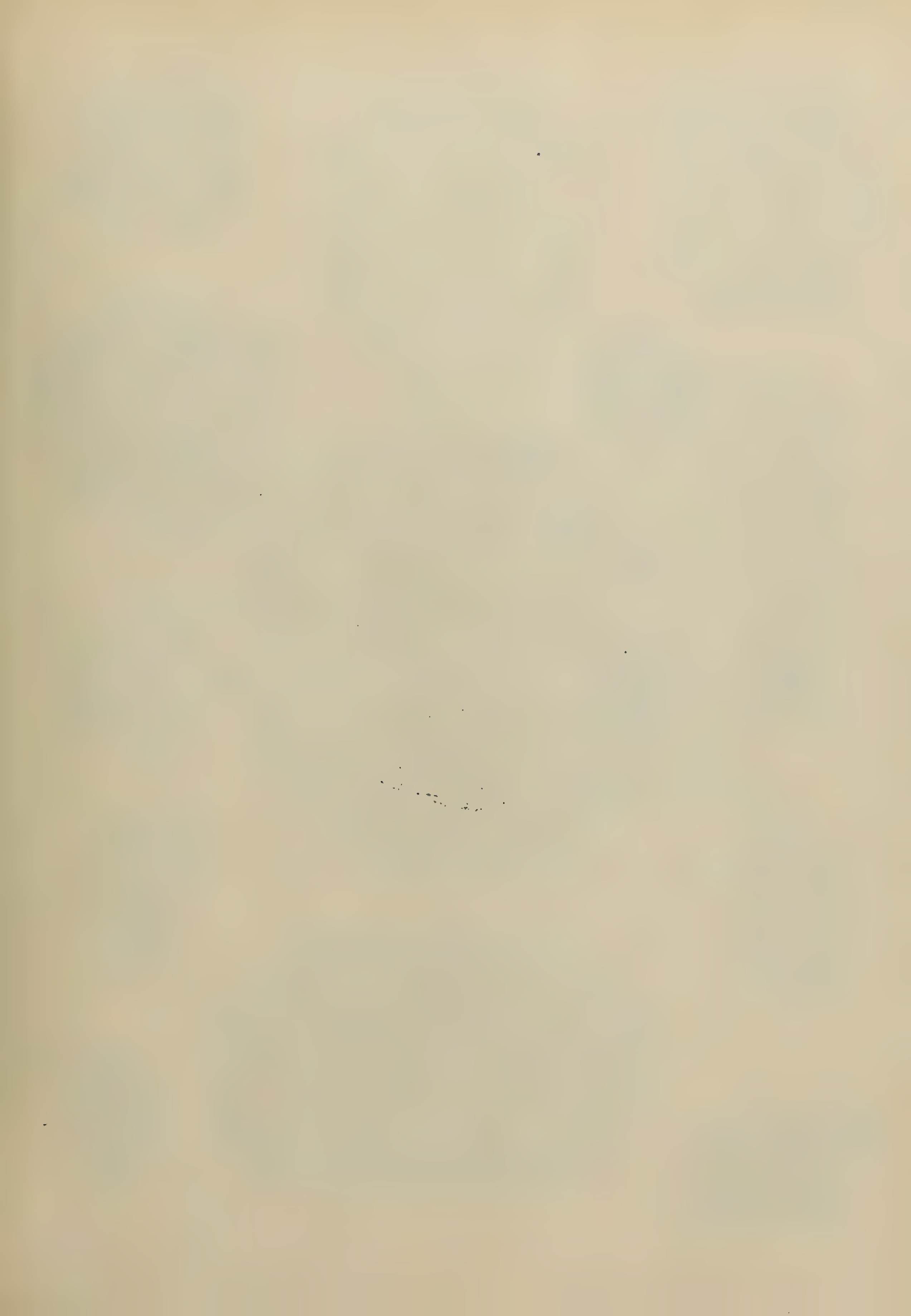
Fig. 10. Incrustation der Köpfchen, deren Glieder in dem incrustirenden Kalkspathe vollständig aufgelöst worden sind. $l$ = nicht incrustirte Lateralarme. $e$ = mit Mergel erfüllte Einbuchtungen, die an Steinkernen auch wieder auftreten. $L$ = sehr schmale Zwischenräume zwischen den incrustirten Köpfchen, die nur an einer Stelle mit einander zu verschmelzen beginnen. Dünnschliff in 5/1. Von einem cr. 70 × 50 mm grossen flachen Bruchstücke von Westergarn auf Gotland. Original im Stockholmer Museum. Re No. 288a.

Ein andres Stück ebendaher zeigt die gleichen Eigenthümlichkeiten solcher Incrustation.




Rauff gez.





## Tafel 6.

### Fig. 1—8. Ischadites Königi, *Murchison.* Ober-Silur.

Fig. 1. Anordnung und Formen der Täfelchen im untern Theile. Die Zahlen am Rande der Figur bezeichnen die Reihenfolge, nach der die Einschiebung der Spiralreihen erfolgt ist. $i$ = Interposita. Mit der Camera in 3/1 aufgenommen. Bubovice bei Prag. Etage E 2. Original im Münchener Museum.

Fig. 2. Anordnung und Formen der Täfelchen im obern Theile. Ohne Einschiebung von Spiralreihen. Der vollständige Schluss des obern Poles mit langgestreckten sehr kleinen Täfelchen ist nicht direct beobachtet, aber wahrscheinlich. Nach einem linsenförmigen Exemplare von 15 mm Durchmesser. Mit der Camera in 3/1 aufgenommen. Djupvik auf Gotland. Original im Stockholmer Museum.

Fig. 3. Vergrösserte Oberflächenpartie am Nucleus eines (von Hinde Quart. Journ. Geol. Soc. 1884, Taf. 36, Fig. 1 abgebildeten) Specimens von cr. 15 mm Durchmesser. $s$ = distale Spindeln nicht zu den Täfelchen $T$, sondern zu denjenigen Täfelchen gehörig, auf denen die $s$ liegen. $v$ = Aufwulstungen der Täfelchen, die durch die unter $T$ tauchenden Spindeln $s$ hervorgebracht werden. In 5/1. Djupvik auf Gotland. Original im Stockholmer Museum.

Fig. 4. Grosses Exemplar mit tief eingebuchtetem unterm Pole. Radiale stark gekrümmt, mit Resten der centralen Verdickungen. Ueberschobene Köpfchen, wie stets mit unterschobenem Distaltheile. Proximale Arme überall abgebrochen. In einem gekritzten Geschiebe. Wisby auf Gotland. Original im Stockholmer Museum. Re No. 295.

Fig. 5. Der abgebildete Querbruch eines halbeiförmigen Fragmentes zeigt in ausgezeichneter Weise die verdickten, centralen Enden der Radiale. Die Köpfchen meist in sandigkalkiges Gestein umgewandelt. Nur die Täfelchen auf der Aussenfläche z. Th. noch gut erhalten. Diluvial-Geschiebe von Schwerin. Original im Göttinger Museum.

Fig. 6. Einige Radiale der Fig. 5 in 3/1.

Fig. 7. Untertheil von Ischadites Königi (Acanthochonia Barrandei). Bubovice bei Prag. Etage E 2. Original in meiner Sammlung.

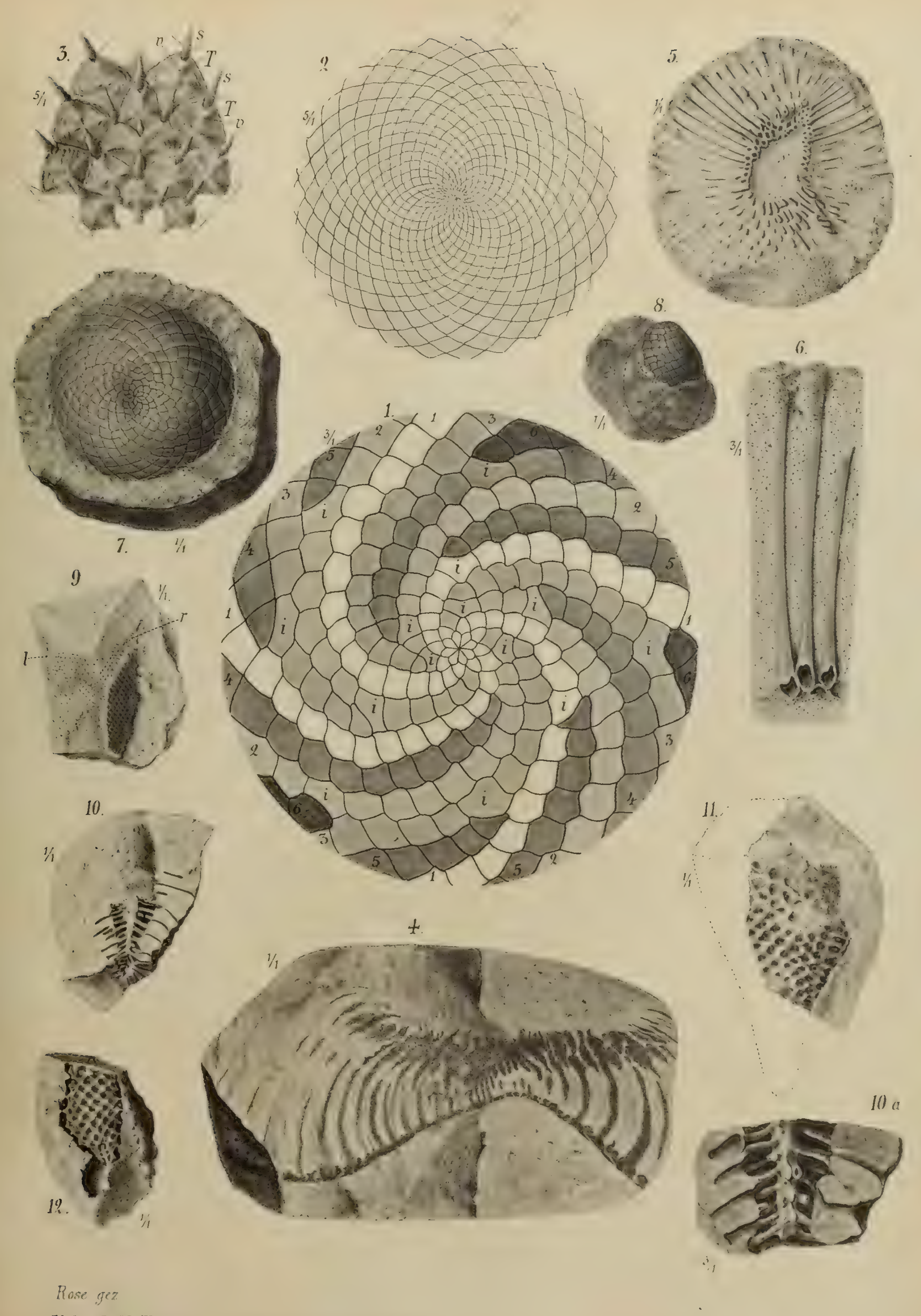
Fig. 8. Bruchstück eines wahrscheinlich eiförmigen Specimens. Unterer Pol. (Aus zeichnerischen Gründen nach oben gestellt). Bubovice. Original in meiner Sammlung.

### Fig. 9. Ischadites rectus *Rauff.* Unter-Silur. Lyckholm. Lyckholm'sche Schicht (F 1)

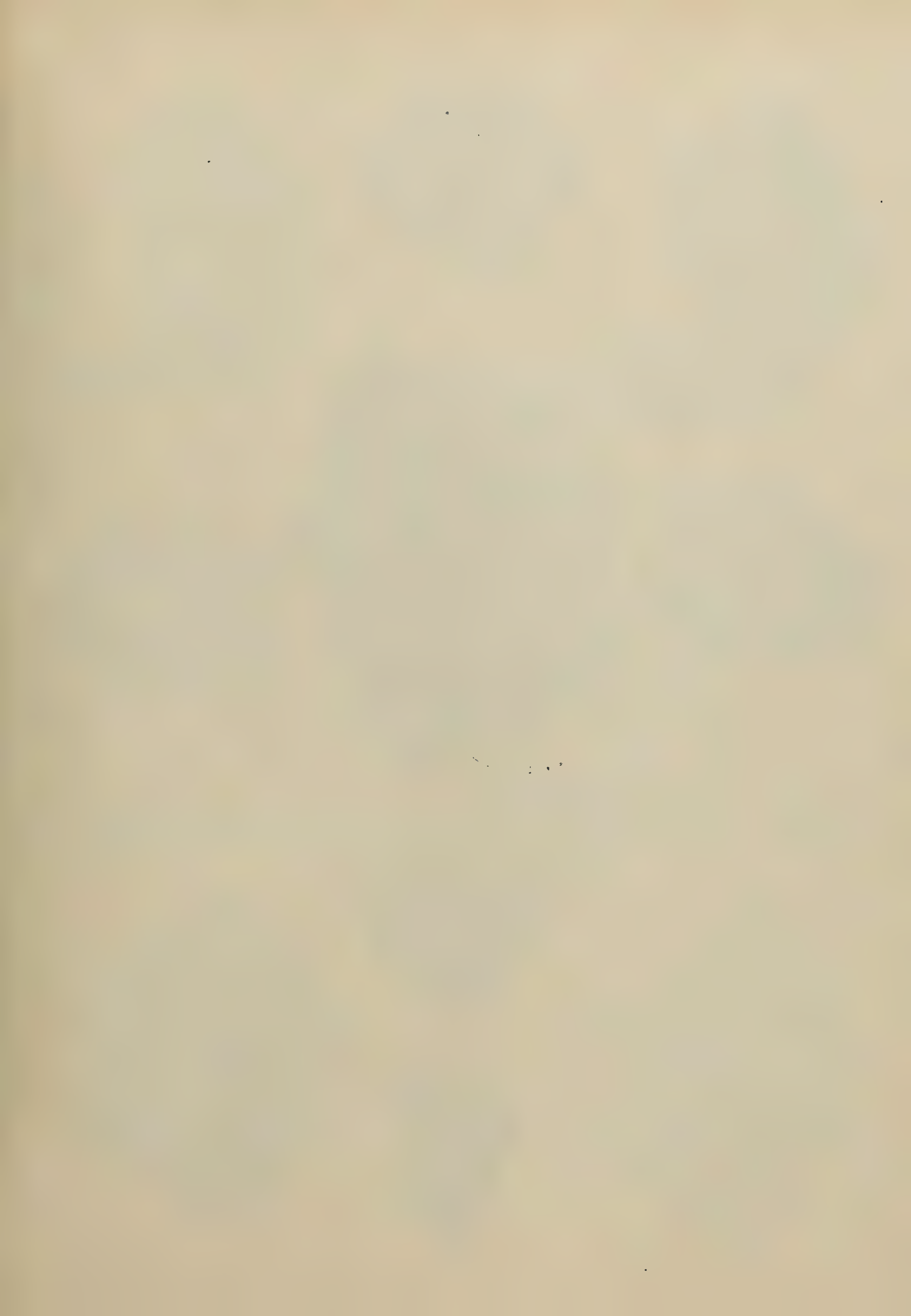
mit sinistraccliver Lagerung der Laterale. Bei $l$ sind die Köpfchen bis auf das Distal, bei $r$ bis auf das Proximal zerstört. Original im Revaler Museum.

### Fig. 10—12. Ischadites cf. Murchisoni *Eichwald.* Backsteinkalk-Geschiebe aus der Umgegend von Berlin.

Steinkerne. Fig. 10a der untere Theil von Fig. 10 in 3/1. Originale im Berliner Museum.


3.
5/1
v
s
T
s
T
v
2.
5/1
5.
1/1
8.
1/1
6.
3/1
7.
1/1
1.
3/1
9
1/1
r
l
10.
1/1
11.
1/1
4.
1/1
10 a
12.
1/1





## Tafel 7.

**Fig. 1, 2. Ischadites Murchisoni *Eichwald*. Unter-Silur. Reval.**

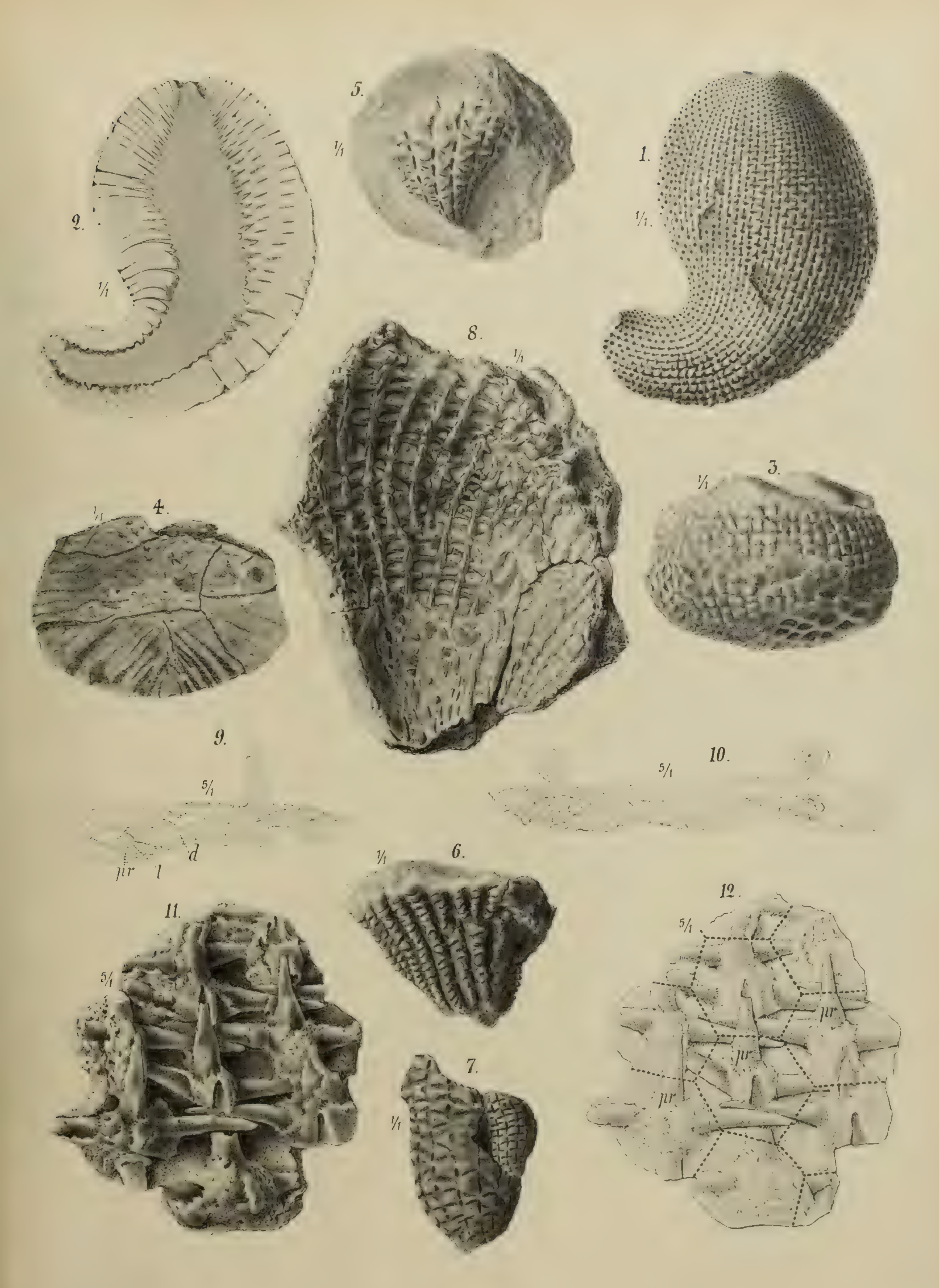
Fig. 1. Steinkern. Original im Münchener Museum.
Fig. 2. Vertical-Schnitt durch das vorige Stück. Radiale leicht gekrümmt.

**Fig. 3, 4. Ischadites Vichtensis *Schlüter sp*. Unteres Ober-Devon. Stolberg bei Aachen.**

Fig. 3. Verdrücktes Stück. Oberfläche stark abgewittert. Original in meiner Sammlung.
Fig. 4. Verticalschnitt durch dasselbe Stück mit leicht gekrümmten Radialen. In 1/1.

**Fig. 5—12. Polygonosphaerites tesselatus Phillips sp. Mittel-Devon.**

Fig. 5. Steinkern. Gerolstein. Original in meiner Sammlung. (Aus dem Nachlasse des Apothekers Winter in Gerolstein).
Fig. 6. Steinkern, stark verwittert, so dass zusammenhängende Längsfurchen entstanden sind. Gerolstein. Original im Berliner Museum.
Fig. 7. Steinkerne von etwas andrer Form als die vorigen. Eifel, wahrscheinlich Gerolstein. Original in der Sammlung des Naturhistorischen Vereins in Bonn.
Fig. 8. Bruchstück mit gut erhaltenen Tangentialen. Die Aussenfläche der Täfelchen mit Alveolites suborbicularis vollständig überrindet. Original in meiner Sammlung. (Aus dem Nachlasse des verstorbenen Apothekers Winter in Gerolstein.) Gerolstein, Calceola Mergel.
Fig. 9 u. 10. Radialschnitte durch die Meridionalarme des Stückes Fig. 8. *d* = Distal, *pr* = Proximal, *l* = Lateralarme. Stark deformirt. In Fig. 10 die Arme durch Incrustation verschmolzen. Dünnschliffe in 5/1.
Fig. 11. Mit der Nadel präparirte Tangentialarme des von Kayser Zeitschr. d. Deut. Geol. Ges. Bd. 27. 1875. Taf. 20, Fig. 2 abgebildeten Specimens. Von innen gesehen, die linkslateralen Arme liegen daher ebenso wie in Fig. 8 über den rechtslateralen. In 5/1. Villmar in Nassau. Originale im Berliner Museum.
Fig. 12 zeigt die Lage der Täfelchen zu den unterliegenden Armen desselben Präparates. Von innen gesehen. *pr* = Proximale.




Rauff & Rose gez.



6



# Inhalt.



Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

